Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Порталури, Индефинитная теория Штурма,
Функц. анализ и его прил., 2009, том 43, вы-
пуск 4, 91–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2972>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:19:20

УДК 517.97

Индефинитная теория Штурма*

© 2009. А. ПОРТАЛУРИ

Введение. Теория Штурма для дифференциальных уравнений второго порядка была обобщена рядом авторов на системы уравнений, а также на уравнения высшего порядка с положительным ведущим коэффициентом. (См., в частности, [1], [2] и [6].) В этой заметке мы приводим аналоги осцилляционных теорем Штурма (с граничным условием Дирихле) для индефинитных систем уравнений вида

$$l(x, D)v := p_{2m} \frac{d^{2m}v}{dx^{2m}} + p_{2m-2}(x) \frac{d^{2m-2}v}{dx^{2m-2}} + \dots + p_1(x) \frac{dv}{dx} + p_0(x)v = 0, \quad (1)$$

где p_i — это гладкое семейство комплексных матриц порядка n , а p_{2m} — матрица вида $\text{diag}(I_{n-\nu}, -I_\nu)$, $\nu \geq 0$. Это обобщение получено на пути, намеченном в работах [4] и [5], в которых рассматривались уравнения второго порядка. Полные доказательства теорем, а также их связи с индексом Маслова будут опубликованы в другой работе.

1. Вариационный подход и основные результаты. Мы применяем к уравнению (1) вариационный подход, описанный в работе [2], и придерживаемся обозначений, принятых в указанной работе. Для n -мерного комплексного эрмитова пространства $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{H}^m := H^m(J, \mathbb{C}^n)$ соболевское пространство всех H^m -отображений из $J := [0, 1]$ в $\mathbb{C}^n$.

Эрмитовой формой, зависящей от производных, мы называем форму $\Omega(x)[u] = \sum_{i,j=0}^m \langle D^i u(x), \omega_{i,j}(x) D^j u(x) \rangle$, где $\omega_{i,j}$ — гладкое семейство эрмитовых матриц, зависящее от x , причем старший коэффициент есть постоянная матрица вида $\omega_{m,m} := p_{2m}$ и $\omega_{i,2m-1-i} = 0$ для всех $i = 0, \dots, m$. Каждая эрмитова форма, зависящая от производных, задает эрмитову форму $q: \mathcal{H}^m \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $q(u) := \int_J \Omega(x)[u] dx$. Если $v \in \mathcal{H}^m$ и $u \in \mathcal{H}^{2m}$, то, интегрируя по частям, можно записать соответствующую билинейную форму $q(u, v)$ в виде

$$q(u, v) = \int_J \langle u(x), l(x, D)v(x) \rangle dx + \phi(u, v), \quad (2)$$

где $l(x, D)$ — это дифференциальный оператор вида (1) и $\phi(u, v)$ — билинейная форма, зависящая только от $(m-1)$ -струи $j^m v(x) := (v(x), \dots, v^{(m-1)}(x))$ и от $(2m-1)$ -струи $j^{2m} u(x)$, взятых в граничных точках $x = 0, 1$.

Пусть $\mathcal{H}_0^m = \mathcal{H}_0^m(J) := \{u \in \mathcal{H}^m: j^{m-1}u(0) = 0 = j^{m-1}u(1)\}$, и пусть q_Ω означает ограничение эрмитовой формы q на $\mathcal{H}_0^m$. Для каждого $\lambda \in J$ рассмотрим пространство $\mathcal{H}_0^m([0, \lambda])$ с формой $\int_{[0, \lambda]} \Omega(x) dx$. Используя подстановку $x \mapsto \lambda x$, перенесем эту форму на пространство $\mathcal{H}_0^m(J)$; таким образом,

* Автор частично поддержан проектом MIUR «Вариационные методы и нелинейные дифференциальные уравнения».

приходим к формам Ω_λ и q_λ , заданным формулами

$$\Omega_\lambda(x)[u] := \sum_{i,j=0}^m \langle D^i u(x), \lambda^{2m-(i+j)} \omega_{i,j}(\lambda x) D^j u(x) \rangle$$

и

$$q_\lambda(u) := \int_J \Omega_\lambda(x)[u] dx$$

соответственно, и к дифференциальному оператору $l_\lambda(x, D)$ вида

$$l_\lambda(x, D)v := p_{2m} \frac{d^{2m}v}{dx^{2m}} + \sum_{k=0}^{2m-2} p_k(\lambda x) \lambda^{2m-k} \frac{d^k v}{dx^k}.$$

В итоге получаем гладкое семейство фредгольмовых эрмитовых форм $\lambda \mapsto q_\lambda$, действующих на пространстве $\mathcal{H}_0^m$, причем

$$q_1 = q_\Omega \quad \text{и} \quad q_0(u) = \int_J \langle p_{2m} D^m u, D^m u \rangle dx.$$

Введем следующее определение.

Определение 1. *Сопряженной точкой* для q_Ω назовем такую точку $\lambda \in (0, 1]$, в которой $\ker q_\lambda \neq \{0\}$.

Пусть $\{C_\lambda\}$ — семейство ограниченных самосопряженных фредгольмовых операторов в соболевском гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^m$, порожденных формами q_λ согласно теореме Рисса об общем виде линейных функционалов.

Лемма 2. *Эрмитова форма q_0 является невырожденной. Кроме того, q_λ — фредгольмова эрмитова форма (т.е. C_λ — фредгольмов оператор). В частности, $\dim \ker q_\lambda < +\infty$ и форма q_λ невырождена в том и только в том случае, когда $\ker q_\lambda = \{0\}$.*

Если форма q_Ω невырождена, т.е. точка 1 не является для нее сопряженной, введем следующее определение.

Определение 3. *(Регуляризованный) индекс Морса формы q_Ω* есть величина

$$\mu_{\text{Mor}}(q_\Omega) := -\text{sf}(q_\lambda, J), \quad (3)$$

где sf означает *спектральный поток семейства* $\{q_\lambda\}$, т.е. разность между числом положительных собственных чисел оператора C_λ при $\lambda = 0$, которые становятся отрицательными при переходе к точке $\lambda = 1$, и числом отрицательных собственных чисел оператора C_λ в точке $\lambda = 0$, которые становятся положительными при переходе к точке $\lambda = 1$. (Подробное изложение см., например, в [4].)

Введем теперь понятие сопряженного индекса. Согласно (2), имеем равенство $q(u, v) = \int_J \langle v(x), l(x, D)u(x) \rangle dx$ при $u \in \mathcal{H}_0^{2m}$ и $v \in \mathcal{H}_0^m$; поэтому элементы ядра формы q_λ — это слабые решения граничной задачи Дирихле вида

$$\begin{cases} l(x, D)u = 0, \\ j^{m-1}u(0) = 0 = j^{m-1}u(1). \end{cases}$$

Положим $\mathcal{O} = \{z := \lambda + is \in \mathbb{C} : 0 < \lambda < 1, -1 < s < 1\}$. Для каждой точки $z \in \mathcal{O}$ зададим оператор $A_z u := l_\lambda(x, D)u + isu$, где u удовлетворяет граничным

условиям $j^{m-1}u(0) = 0 = j^{m-1}u(1)$. Для каждой точки $w = (w_1, \dots, w_m) \in (\mathbb{C}^n)^m$ обозначим через $u_z(w, x)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} l(x, D)u + isu = 0, \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{m-1}(0) = 0, \quad u^m(0) = w_1, \dots, u^{2m-1}(0) = w_m \end{cases}$$

(это решение единственное) и зададим эндоморфизм $\mathcal{R}_z: (\mathbb{C}^n)^m \rightarrow (\mathbb{C}^n)^m$ формулой $\mathcal{R}_z(w) := j^{m-1}(u_z(w, 1))$. Ясно, что $u \in \ker A_z$ в том и только в том случае, когда $(u^m(0), \dots, u^{2m-1}(0)) \in \ker \mathcal{R}_z$. Отсюда, используя свойство регулярности слабого решения, получаем, что следующие три высказывания равносильны:

- (i) $\ker A_z \neq \{0\}$;
- (ii) $\operatorname{Im} z = 0$ и $\lambda = \operatorname{Re} z$ есть сопряженная точка;
- (iii) $\det \mathcal{R}_z = 0$.

Из этих трех равносильных высказываний следует, что функция $\rho(z) := \det \mathcal{R}_z$ не обращается в нуль на границе $\partial\mathcal{O}$.

Определение 4. *Сопряженный индекс $\mu_{\text{con}}(q_\Omega)$ рассматриваемой формы q_Ω есть взятое со знаком минус число оборотов кривой $\rho|_{\partial\Omega} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ вокруг нуля, или, другими словами, взятый со знаком минус индекс Брауера, т. е. $-\deg(\rho, \mathcal{O}, 0)$.*

Используя сказанное, мы можем теперь сформулировать наш основной результат; при этом мы придерживаемся введенных выше обозначений.

Теорема 5 (обобщенная осцилляционная теорема Штурма). *Справедливо равенство*

$$\mu_{\text{con}}(q_\Omega) = \mu_{\text{Mor}}(q_\Omega).$$

Теорема 6 (обобщенная теорема сравнения Штурма). *Пусть Ω_0, Ω_1 — зависящие от производных эрмитовы формы, причем $\Omega_0[u](x) \leq \Omega_1[u](x)$ для всех $x \in J$. Тогда*

$$\mu_{\text{Mor}}(q_{\Omega_0}) \leq \mu_{\text{Mor}}(q_{\Omega_1}).$$

2. Доказательства. Доказательство теоремы 5. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Первый шаг. Заметим, что семейство $\{A_z\}$ можно представить в виде $\{A + B_z\}$, где A — фиксированный неограниченный замкнутый оператор, а B_z есть A -ограниченное возмущение оператора A , зависящее от z ; при этом на множестве $\partial\mathcal{O}$ определена операторнозначная 1-форма $dA_z A_z^{-1}$. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 4.4 из статьи [4], можно доказать следующую лемму.

Лемма 7. *Форма $dA_z A_z^{-1}$ принимает значения в классе ядерных операторов, и*

$$\mu_{\text{con}}(q_\Omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{O}} \operatorname{Tr} dA_z A_z^{-1}.$$

Предположим теперь, что семейство $\{A_\lambda\}_{\lambda \in J}$ имеет только регулярные точки пересечения с многообразием необратимых операторов. Это означает, что квадратичная форма $\Gamma(A, \lambda)$, полученная как ограничение на ядро оператора A_λ формы $\langle A'_\lambda \cdot, \cdot \rangle$, невырожденна. Так как регулярные точки пересечения

изолированы, то множество таких точек конечно. Покажем, что если $\mathcal{D}_j$ есть достаточно малая окрестность точки пересечения $\lambda_j \in \mathcal{O}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_j} \text{Tr } dA_z A_z^{-1} = \text{sign } \Gamma(A, \lambda_j). \quad (4)$$

Для фиксированного j выберем число $\mu > 0$ так, чтобы единственной точкой спектра оператора A_{λ_j} в интервале $[-\mu, \mu]$ являлась точка 0; затем возьмем столь малое η , что числа μ и $-\mu$ не принадлежат спектру оператора A_λ при $|\lambda - \lambda_j| < \eta$. Для такого λ обозначим через P_λ ортогональный проектор в H на спектральное подпространство, которое соответствует части спектра оператора A_λ , лежащей в интервале $[-\mu, \mu]$. Тогда $A_\lambda P_\lambda = P_\lambda A_\lambda$ в области определения оператора A_λ . Согласно результату из [3, гл. II, разд. 6], существует такое гладкое семейство $U = \{U_\lambda\}$ унитарных операторов в H , определенное при $\lambda \in [\lambda_j - \eta, \lambda_j + \eta]$, что $U_{\lambda_j} = \text{Id}_H$ и $P_\lambda U_\lambda = U_\lambda P_{\lambda_j}$. Можно доказать, что оператор $\dot{U}_\lambda U_\lambda^{-1}$ ядерный. Рассмотрим теперь гладкую операторнозначную функцию $N_z = U_\lambda^{-1} A_z U_\lambda$, определенную в некоторой окрестности множества $\mathcal{D}_j = [\lambda_j - \eta, \lambda_j + \eta] \times [-1, 1]$, и дифференциальную 1-форму $\theta = dN_z N_z^{-1}$. Ясно, что форма θ принимает значения в множестве ядерных операторов и $\text{Tr } dA_z A_z^{-1} = \text{Tr } dN_z N_z^{-1}$.

Второй шаг. Если подпространства $H_j = \text{Im } P_{\lambda_j} = \ker A_{\lambda_j}$ образуют разложение в прямую ортогональную сумму, $H = H_j \oplus H_j^\perp$, то 1-форма θ разлагается на сумму форм $\theta_0 = dN_z N_z^{-1}|_{H_j}$ и $\theta_1 = dN_z N_z^{-1}|_{H_j^\perp}$. Таким образом, переходя к следам операторов, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_j} \text{Tr } \theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_j} \text{Tr } \theta_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_j} \text{Tr } \theta_1, \quad (5)$$

причем последнее слагаемое в (5) обращается в нуль.

Так как $\text{Tr}(dN_z N_z^{-1}) = d \log \det(N_z)$, то оператор $N_z|_{H_j^\perp}$ обратим на множестве $\overline{\mathcal{O}}$, а потому 1-форма θ_1 точна. Рассмотрим теперь семейство M симметрических эндоморфизмов $[\lambda_j - \eta, \lambda_j + \eta] \rightarrow \mathcal{L}(H_j)$ вида $M_\lambda = N_\lambda|_{H_j}$. Элементарный подсчет показывает, что $\text{sign } \Gamma(M, \lambda_j) = \text{sign } \Gamma(A, \lambda_j)$.

Третий шаг. Пусть M — указанное выше семейство и $M_z = M_\lambda + is \text{Id}$ для $z \in \mathcal{D}_j$. Тогда

$$\text{sign } \Gamma(M, \lambda_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_j} \text{Tr } dM_z M_z^{-1}.$$

Используя результат из [3, гл. II, теорема 6.8], можно привести M_λ к диагональной форме, а тогда наше утверждение доказывается непосредственным интегрированием. Отсюда и из (5) вытекает (4).

Четвертый шаг. Из определения регулярности легко выводится, что каждая регулярная точка пересечения для семейства $\{A_\lambda\}$ есть также регулярная точка пересечения для семейства $q = \{q_\lambda\}$, т. е. форма пересечения, определенная как ограничение $\Gamma(q, \lambda)$ формы $\dot{q}_\lambda$ на $\ker q_\lambda$, невырожденна. Кроме того, формы пересечения $\Gamma(A, \lambda)$ и $\Gamma(q, \lambda)$ совпадают. Напомним, что для семейства, имеющего только регулярные точки пересечения, спектральный поток равен сумме индексов форм пересечения; поэтому из леммы 7 и формулы (4) вытекает утверждение теоремы 5 для семейств, имеющих только регулярные пересечения. Чтобы

завершить рассуждение, остается показать, что приведенное выше вычисление можно перенести на произвольное семейство, имеющее только регулярные пересечения. С этой целью рассмотрим семейство $\{A_z\}$ на вещественной прямой и применим к этому семейству соображения Роббина и Саламона относительно возмущений семейств. Согласно теореме 4.22 из [7], можно указать такое $\delta > 0$, что семейство $\{A_\lambda^\delta\} := \{A_\lambda + \delta \text{Id}\}$ состоит из самосопряженных фредгольмовых операторов и имеет только регулярные точки пересечения. Пусть $\{\mathcal{R}_z^\delta\}$ — семейство матриц, ассоциированное с возмущенным семейством $\{A_z^\delta\}$; положим $\rho^\delta(z) := \det \mathcal{R}_z^\delta$. Взяв попарно не пересекающиеся замкнутые окрестности $\mathcal{D}_j$ точек $(\lambda_j, 0)$ в области $\mathcal{O}$ и суммируя по всем точкам пересечения, получаем равенство

$$\begin{aligned} \mu_{\text{con}}(q_\Omega) &= - \sum_{j=1}^k \deg(\rho^\delta, \mathcal{D}_j, 0) = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_j} \text{Tr } dA_z^\delta (A_z^\delta)^{-1} \\ &= - \sum_{j=1}^k \text{sign } \Gamma(A, \lambda_j) = - \text{sf}(q_\lambda, J); \end{aligned}$$

здесь мы использовали свойство гомотопической инвариантности спектрального потока. Теорема 5 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 6. Так как старшие члены фредгольмовых эрмитовых форм q_λ^1 и q_λ^2 совпадают, то их разность слабо полунепрерывна по отношению к каждой из них. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать следующее: если q^1 и q^2 — допустимые семейства фредгольмовых эрмитовых форм на $\mathcal{H}_0^m$, причем их разность слабо полунепрерывна и $q_0^1 = q_0^2$, $q_1^2 \leq q_1^1$, то $\text{sf}(q^2) \leq \text{sf}(q^1)$. Именно это утверждение мы и докажем.

Легко видеть, что существует столь малое число $\eta > 0$, что семейство $\tilde{q}_\lambda^1 = q_\lambda^1 + \lambda \eta \|\cdot\|^2$ состоит из фредгольмовых эрмитовых форм и гомотопно семейству q^1 (гомотопия осуществляется при помощи семейства $(t, \lambda) \rightarrow q_\lambda^1 + t\lambda\eta \|\cdot\|^2$), а потому $\text{sf}(\tilde{q}^1) = \text{sf}(q^1)$. При этом $\tilde{q}_0^1 = q_0^2$ и $q_1^2 < \tilde{q}_1^1$. Итак, имеем семейство фредгольмовых эрмитовых форм на множестве $T = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ вида $\phi(s, \lambda) = s\tilde{q}_\lambda^1 + (1-s)q_\lambda^2$. Применяя к нему свойство инвариантности спектрального потока при свободной гомотопии замкнутых кривых, получаем, что спектральный поток ограничения семейства ϕ на ∂T равен нулю. Кроме того, $\text{sf}(\tilde{q}^1) - \text{sf}(q^2) = \text{sf}(\rho)$, где $\rho(s) = (1-s)q_1^2 + s\tilde{q}_1^1$. Так как форма $\dot{\rho} = \tilde{q}_1^1 - q_1^2$ положительно определена в каждой точке пересечения, то все точки пересечения регулярны и каждая из них дает положительный вклад $\dim \ker \rho(s)$ в спектральный поток семейства ρ . Итак, $\text{sf}(\rho) \geq 0$, а потому $\text{sf}(q^2) \leq \text{sf}(q^1)$. $\square$

Благодарность. Я благодарю Джакомо Пейсаховича за неоднократные полезные обсуждения. Я весьма благодарен рецензенту за многочисленные предложения и критику, а также на указание ряда ошибок в первоначальном тексте.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, Функц. анализ и его приложен., **19:4** (1985), 1–10. [2] H. Edwards, Ann. of Math., **80** (1964), 2–57. [3] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 132, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1980. [4] M. Musso, J. Pejsachowicz, A. Portaluri, Topological Methods in Nonlinear

Analysis, **25**:1 (2005), 69–99. [5] M. Musso, J. Pejsachowicz, A. Portaluri, Esaim Control Optim. Calc. Var., **13**:3 (2007), 598–621. [6] В. Ю. Овсиенко, Матем. заметки, **47**:3 (1990), 65–73. [7] J. Robbin, D. Salamon, Bull. London Math. Soc., **27** (1995), 1–33.

Università del Salento, Italy
e-mail: alessandro.portaluri@unile.it

Поступило в редакцию

15 мая 2007 г.

В переработанном виде

10 декабря 2008 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 23.09.2009. Подписано к печати 27.10.2009. Формат 70×100/16

Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 2,0 тыс. Бум. л. 3,0

Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 253 экз. Заказ 706.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56

Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,

117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90

Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6