Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. В. Вайнштейн, Фильтрующие базисы и когомологии нильпотентных подалгебр алгебры Витта и алгебры петель на sl_2 , *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 1, 4–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2974>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:46:28

Фильтрующие базисы и когомологии нильпотентных подалгебр алгебры Витта и алгебры петель в sl_2

© 2010. Ф. В. ВАЙНШТЕЙН

*Посвящается светлой памяти моей мамы
Марии Семеновны Вайнштейн*

В работе изучаются когомологии с тривиальными коэффициентами алгебр Ли L_k полиномиальных векторных полей на окружности, имеющих нулевой k -джет ($k \geq 1$), и когомологии аналогичных подалгебр $\mathcal{L}_k$ алгебры полиномиальных петель в алгебре sl_2 . Основным результатом является построение специальных базисов внешних комплексов перечисленных алгебр. Используя эту конструкцию, мы получаем следующие результаты. Вычисляются когомологии алгебр L_k и $\mathcal{L}_k$. В терминах полиномов Шура приводятся формулы для циклов, представляющих гомологии этих алгебр. В работе вводятся «стабильные» фильтрации внешних комплексов алгебр L_k и $\mathcal{L}_k$, обобщающие понятие стабильных циклов Гончаровой для алгебр L_k , и дается их полиномиальное описание. Вычисляются спектральные разложения операторов Лапласа алгебр L_1 и $\mathcal{L}_1$.

Пусть $h^3 = 1$, где $h \in \mathbb{C}$ — комплексное число. Обозначим через $L^{(h)}$ алгебру Ли, порожденную над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел конечными линейными комбинациями базисных векторов e_a , где a пробегает кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел, а коммутатор определяется формулой

$$[e_a, e_b] = (b - a)_h e_{a+b}, \quad \text{где } (m)_h = \frac{h^{2m} - h^m}{h^2 - h}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Алгебра $L^{(1)}$ изоморфна алгебре, порожденной дифференцированиями $e_a = t^{a+1}d/dt$ кольца полиномов Лорана $\mathbb{Q}[t^{-1}, t]$. Она называется *алгеброй Витта*. Алгебра $L^{(h \neq 1)}$ изоморфна алгебре $sl_2(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}[t^{-1}, t]$ петель на $sl_2(\mathbb{Q})$ (см. [4, упр. 7.12]).

Как кажется автору, одной из причин многочисленных аналогий между этими двумя алгебрами является возможность представить их коммутаторы в параметрической форме (1). Например, двумерные коциклы, определяющие единственные (с точностью до изоморфизма) универсальные центральные расширения этих алгебр, можно единообразно записать в виде

$$(e_i, e_j) \rightarrow \delta_{i+j,0} \kappa_h(i), \quad \text{где } \kappa_h(i) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^i (i - 2r + 1)_h^2 = \begin{cases} \binom{i+1}{3}, & \text{если } h = 1, \\ \lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor, & \text{если } h \neq 1, \end{cases} \quad (2)$$

($\lfloor a \rfloor$ — целая часть числа a). При $h = 1$ это коцикл Гельфанда–Фукса, а соответствующее расширение называется алгеброй Вирасоро. При $h \neq 1$ получается аффинная алгебра $A_1^{(1)}$.

Пусть $L^{(h)}(k)$ — подалгебра в $L^{(h)}$, порожденная векторами e_a , где $a \geq k \geq -1$. Иногда мы будем использовать обозначения $L_k := L^{(1)}(k)$ и $\mathcal{L}_k := L^{(h \neq 1)}(k)$. При $k \geq 1$ эти алгебры нильпотентны. Наш главный результат состоит в построении специальных базисов внешних комплексов алгебр $L^{(h)}(k)$ для $k \geq 1$. Одним из приложений этой конструкции является вычисление пространств непрерывных когомологий $H^*(L^{(h)}(k); \mathbb{Q})$, где $\mathbb{Q}$ рассматривается как тривиальный $L^{(h)}(k)$ -модуль, а непрерывными считаются $\mathbb{Q}$ -линейные функционалы на $L^{(h)}(k)$ с конечномерными носителями. Мы докажем, в частности, что

$$\sum_{q=0}^{\infty} \dim H^q(L^{(h)}(k); \mathbb{Q}) t^q = \frac{1+t}{(1-t)^k}. \quad (3)$$

Для $h = 1$ эта формула (в ином виде; см. замечание 2.6) была включена в доклад И. М. Гельфанда [10] в качестве гипотезы¹⁾. Первое опубликованное доказательство Л. В. Гончаровой в [3] чрезвычайно громоздко. Позже для $k = 1$ было получено несколько весьма интересных доказательств ее теоремы, основанных на других идеях (см., например, [8], [12])²⁾.

Наша работа мотивирована двумя источниками. Первый — работа Гончаровой [3], где вводятся важные для нас определения неособых и k -основных разбиений и стабильных циклов внешних комплексов алгебр L_k . Главным результатом Гончаровой является доказательство существования стабильного цикла для каждого k -основного разбиения и того, что гомологические классы таких циклов составляют базис пространства гомологий $H_*(L_k; \mathbb{C})$.

Второй источник — работа Гельфанда–Фейгина–Фукса [2]. Авторы рассматривают евклидову структуру во внешнем комплексе алгебры L_1 , в которой векторы $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}$ ортонормированы. Тогда на нем естественно определяется действие линейного самосопряженного «оператора Лапласа» Γ , ядро которого изоморфно гомологиям алгебры L_1 . Основное и неожиданное наблюдение работы [2] состоит в том, что собственные значения этого оператора являются целыми явно вычисляемыми числами. Дополнительно дается красивое описание стабильных циклов алгебр L_k .

К сожалению, работа [2] не вполне корректна: предложенная в ней конструкция собственных векторов оператора Γ , используемая как главный инструмент исследования, часто не работает. Это приводит к ошибке в формулировке основного результата: указанные в работе значения кратностей собственных значений оператора Γ неверны, хотя найденные собственные значения правильны.

Желание прояснить идеи и результаты работ [2] и [3] и понять связь между ними было главным стимулом для автора. Наша работа организована следующим образом.

В §1 собран материал, относящийся к разбиениям и использующийся на протяжении всего изложения. Главный результат формулируется в §2. А именно, в терминах отмеченных k -разбиений из §1 определяются $\varepsilon(k)$ -мономы как некоторые векторы внешнего комплекса $C_*(k)$ алгебры $L^{(h)}(k)$. Основная теорема

¹⁾Насколько известно автору, эта гипотеза принадлежит Д. Б. Фуку.

²⁾В [8] случаи $k = 2, 3$ также рассматриваются, но возникают *ad hoc*, и подход из [8] не обобщается на значения $k > 3$.

2.4 утверждает, что они составляют базис этого комплекса, обладающий «фильтрующими» свойствами. Предполагая это доказанным, в §2 мы вычисляем пространство когомологий $H^*(L^{(h)}(k); \mathbb{Q})$.

Доказательство основной теоремы содержится в §3. Сначала устанавливаются некоторые соотношения во внешних комплексах алгебр $L^{(h)}(k)$, играющие ключевую роль в последующих рассуждениях (лемма 3.1). С их помощью доказывается, что $\varepsilon(1)$ -мономы линейно порождают $C_*(1)$ и обладают заявленными в теореме 2.4 свойствами. Линейная независимость $\varepsilon(1)$ -мономов следует из формулы, выражающей количество разбиений натуральных чисел с различными частями в терминах таких мономов. Эта формула оказывается эквивалентной классическому тождеству теории разбиений, принадлежащему Сильвестру:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + tx^i) = 1 + tx \frac{1 + tx^2}{1 - x} + \sum_{l=2}^{\infty} t^l x^{(3l^2-l)/2} \frac{(1 + tx) \cdots (1 + tx^{l-1})(1 + tx^{2l})}{(1 - x) \cdots (1 - x^{l-1})(1 - x^l)}, \quad (4)$$

см. [13, с. 282]. Доказательство теоремы 2.4 завершается индукцией по k , использующей упомянутые соотношения и одну дополнительную конструкцию для отмеченных разбиений.

Появление тождества Сильвестра при построении фильтрующего базиса кажется весьма интересным. Однако ссылка на него в доказательстве основной теоремы вызывает некоторую неудовлетворенность. Поэтому в дополнительном §8 приводится биективное доказательство нужного нам комбинаторного факта, который, как показано в §3, эквивалентен этому тождеству. Установленная эквивалентность дает тождеству Сильвестра новую интерпретацию.

Последующие параграфы содержат приложения основной теоремы. В §4 вводятся две фильтрации комплекса $C_*(k)$: возрастающая «стабильная» фильтрация, начальным членом которой является пространство стабильных циклов, и убывающая ε -фильтрация. Определение стабильной фильтрации использует только определение комплекса $C_*(k)$, тогда как для определения ε -фильтрации нужна основная теорема. В §4 доказывается, что эти фильтрации двойственны относительно рассматриваемой евклидовой структуры.

В §5, следуя идее работы [2], мы отождествляем цепи алгебр $L^{(h)}(k)$ с кососимметрическими полиномами. В этих терминах мы получаем формулу для действия дифференциала внешнего комплекса, распространяя соответствующую формулу из [2] на $L^{(h)}(k)$. Подход к стабильным циклам, предложенный в [2], также обобщается и дает полиномиальное описание стабильной фильтрации.

Сравнение результатов §4 и §5 приводит к семейству базисов колец симметрических полиномов от конечного числа переменных (следствие 5.4). Такой базис зависит от параметров h и k , состоит из однородных полиномов и нумеруется отмеченными k -разбиениями. При $k = 1$ получается комбинаторная формула для размерности пространства однородных симметрических полиномов $f(t_1, \dots, t_q)$ над $\mathbb{Q}$ заданной степени, для которых

$$f(ht_1, \bar{h}t_1, \dots, ht_m, \bar{h}t_m, t_{m+1}, \dots, t_{q-m}) = 0,$$

где $0 \leq m \leq [q/2]$, $h^3 = 1$ и $\bar{h}$ — комплексно сопряженное число к h . Эта размерность не зависит от выбора h .

В §6 полученные результаты используются для вычисления гомологий $L^{(h)}(k)$. Вначале мы строим базис пространства $H_*(L^{(h)}(k); \mathbb{Q})$, представленный

стабильными циклами, что обобщает результат Гончаровой на алгебры $L^{(h)}(k)$, а затем для этих циклов получаем явные формулы в терминах полиномов Шура.

В §7 рассматривается действие оператора Лапласа $\Gamma^{(h)}$ алгебры $L^{(h)}(1)$. Мы доказываем, что в базисе $\varepsilon(1)$ -мономов оно выражается рациональной треугольной матрицей с явно вычисляемыми диагональными элементами, что, в частности, дает спектр оператора $\Gamma^{(h)}$. Отсюда выводится, что кратности ненулевых собственных значений оператора $\Gamma^{(1)}$ конечны, а их вычисление сводится к теоретико-числовой задаче. Действие оператора $\Gamma^{(h \neq 1)}$ в базисе $\varepsilon(1)$ -мономов диагонально, его спектр совпадает с множеством $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, а кратность любого собственного значения бесконечна. Одним из следствий наших вычислений является инвариантность стабильной фильтрации относительно действия оператора $\Gamma^{(h)}$. Это обобщает утверждение из [2] о действии оператора Лапласа на пространстве стабильных циклов алгебры L_1 . При $h \neq 1$ наш результат о спектральном разложении оператора $\Gamma^{(h)}$ хорошо известен и является частным случаем гораздо более общего факта (см. [11, 3.2–3.4]).

Многие интересные задачи, связанные с когомологиями алгебр $L^{(h)}(k)$, могут быть сведены к вопросам разложения их коцепей по фильтрующему базису. Пример: задача вычисления мультипликативной структуры колец $H^*(L^{(h)}(k); \mathbb{Q})$ (см. замечание 2.7). Другой пример — задача о структуре $H^*(L^{(h)}(k); \mathbb{Q})$ как $L^{(h)}(1)/L^{(h)}(k)$ -модуля при $k \geq 2$ (см. [6], [9]). В полной общности эти задачи не решены.

Часть представленного материала уже публиковалась в [1] и [14]¹⁾, где рассматривались алгебры векторных полей L_k . В настоящей работе, помимо технических упрощений и новых результатов, в рамках единого подхода рассматриваются одновременно алгебры $L^{(h)}(k)$ при $h = 1$ и $h \neq 1$ и подчеркивается аналогия между ними.

Обозначения. Символы α, β, γ (с индексами или без) обозначают рациональные числа. Если не оговорено противное, все векторные пространства считаются определенными над $\mathbb{Q}$; k обозначает натуральное число. Мощность множества M обозначается через $|M|$. Для $x, y \in M$ функция $\delta_{x,y}$ обозначает дельту Кронекера. Внешняя алгебра векторного пространства V обозначается через $\Lambda(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \Lambda^q(V)$, где $\Lambda^q(V)$ есть q -я внешняя степень пространства V . При одновременной ссылке на алгебры $L^{(h)}(k)$ с разными h используется обозначение $L(k)$. Обозначая различные объекты, связанные с этими алгебрами, мы, как правило, будем опускать h , уточняя при необходимости, какое именно h рассматривается.

§1. Неособые, основные и отмеченные разбиения

В этом параграфе вводятся основные определения и обозначения, относящиеся к разбиениям и отмеченным разбиениям. Они используются на протяжении всей работы.

Определение 1.1. *Разбиением* называется конечное упорядоченное множество целых чисел $I = [i_1, \dots, i_q]$, называемых *частями* этого разбиения, таких,

¹⁾Работа [1] содержит ошибку в определении спектральной последовательности, исправленную в [14].

что $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_q$. Разбиение называется *строгим*, если $i_1 < \dots < i_q$. Положим $I^- = i_1$, $I^+ = i_q$.

Числа $\|I\| = i_1 + \dots + i_q$ и $|I| = q$ называются *степенью* и *длиной* разбиения I соответственно.

Упорядоченное подмножество $I' \subset I$ называется *подразбиением* разбиения I . Объединение разбиений I_1 и I_2 — это разбиение, обозначаемое через $I_1 \sqcup I_2$, множество частей которого есть дизъюнктное объединение множеств частей разбиений I_1 и I_2 .

Определение 1.2. *Отмеченным разбиением* называется класс эквивалентности пар $[I; J]$, где I — разбиение, $J \subset I$, а $[I; J]$ и $[I_1; J_1]$ считаются эквивалентными, если $I = I_1$, $J = J_1$ как разбиения. Элементы множества J называются *отмеченными частями*. Разбиение I отождествляется с отмеченным разбиением $[I; \emptyset]$. Числа $\|I\|$ и $|I|$ называется *степенью* и *длиной* отмеченного разбиения $[I; J]$. Положим $[I_1; J_1] \sqcup [I_2; J_2] = [I_1 \sqcup I_2; J_1 \sqcup J_2]$. Множество отмеченных разбиений обозначается через $\mathbf{D}$.

Когда это не вызывает путаницы, мы будем называть отмеченные разбиения просто разбиениями. Вместо явного указания множества отмеченных частей мы иногда будем эти части подчеркивать: $[[1, 4, 6, 7]; [4, 7]] = [1, \underline{4}, \underline{6}, \underline{7}]$. Отметим, что, согласно определению, например, $[\underline{5}, 5] = [5, \underline{5}]$.

Определение 1.3. Пусть I и I' — различные разбиения. Мы пишем $I' \triangleleft I$ (*меньше*), если $|I'| = |I|$, $\|I'\| = \|I\|$ и

$$i'_1 + \dots + i'_r \leq i_1 + \dots + i_r \quad \text{для всех } r, 1 \leq r \leq |I|. \quad (5)$$

Определение 1.4. Пусть $[I; J]$ и $[I'; J']$ — различные отмеченные разбиения. Мы пишем $[I'; J'] \triangleleft [I; J]$, если $|I'| + |J'| = |I| + |J|$ и либо $|I'| < |I|$, либо $I' \triangleleft I$, либо $I' = I$ и $J' \prec J$, где $\prec$ обозначает лексикографический порядок.

Например, $[\underline{5}] \triangleleft [2, 3]$, $[\underline{3}, 6] \triangleleft [3, \underline{6}]$, $[\underline{3}, 6, 10, \underline{12}] \triangleleft [3, \underline{6}, \underline{10}, 12]$.

Легко проверяется, что $\triangleleft$ определяет на $\mathbf{D}$ отношение частичного порядка.

Утверждение (1.16)* книги [5] можно переформулировать следующим образом:

Лемма 1.5. Для целых a, b , $1 \leq a < b \leq q$, определим отображение $R_{a,b}: \mathbb{Z}^q \rightarrow \mathbb{Z}^q$ формулой

$$R_{a,b}(i_1, \dots, i_q) = (i_1, \dots, i_a + 1, \dots, i_b - 1, \dots, i_q).$$

Если $I' \triangleleft I$ и $|I'| = |I|$, то существует последовательность пар целых чисел (a_r, b_r) , $1 \leq a_r < b_r \leq q$, такая, что $I' = I_1 \triangleleft \dots \triangleleft I_m = I$, где $I_{r+1} = R_{a_r, b_r}(I_r)$.

Лемма 1.6. Если $I' \trianglelefteq I$ и $I'_1 \triangleleft I_1$, то $I' \sqcup I'_1 \triangleleft I \sqcup I_1$.

Доказательство. Можно ограничиться случаем $I = I'$. Ввиду леммы 1.5 достаточно доказать неравенство $I \sqcup R_{a,b}(I'_1) \triangleleft I \sqcup I'_1$ для a, b , таких, что $R_{a,b}(I'_1) \triangleleft I'_1$. Но оно очевидно. $\square$

Следствие 1.7. Если $[I'; J'] \trianglelefteq [I; J]$ и $[I'_1; J'_1] \triangleleft [I_1; J_1]$, то $[I'; J'] \sqcup [I'_1; J'_1] \triangleleft [I; J] \sqcup [I_1; J_1]$.

Определение 1.8 [3]. Разбиение $[i_1, \dots, i_q]$ называется *неособым*, если $i_{r+1} - i_r \geq 3$ для всех r , $1 \leq r \leq q-1$. Разбиение вида $\xi(a, q) = [a, a+3, \dots, a+3(q-1)]$ называется *плотным*.

Определение 1.9. Пара $\{k; I\}$, где I — разбиение и $I^- \geq k$, называется k -разбиением. Оно называется *неособым*, если I — неособое разбиение.

Мы будем записывать k -разбиения как обычные разбиения, оговаривая, что рассматриваются именно k -разбиения. Например, $[2, 6]$ можно рассматривать либо как 1-разбиение, либо как 2-разбиение. Это разные объекты.

Определение 1.10 [3]. Неособое k -разбиение $[i_1, \dots, i_q]$ называется *основным*, если

$$i_q \leq 2k + 3(q - 1) \quad \text{при } i_1 > k \quad \text{и} \quad i_q < 2k + 3(q - 1) \quad \text{при } i_1 = k.$$

Например, $\xi(1, q)$ и $\xi(2, q)$ исчерпывают основные 1-разбиения длины $q \geq 1$.

Определение 1.11. Для неособого k -разбиения I существует единственное разложение $I = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_s$, называемое его *стандартной формой*, где $I_1, \dots, I_s$ — неособые k -разбиения, такие, что $I_{a+1}^- - I_a^+ > 3$ для всех a , $1 \leq a \leq s - 1$, и выполнены следующие два условия:

(1) Если $I^- \leq 2k$, то I_1 — основное подразбиение разбиения I максимальной возможной длины. Оно называется основной компонентой разбиения I .

(2) Разбиения I_a , не являющиеся основными, являются плотными. Они называются плотными компонентами разбиения I .

Части I_r^- плотных компонент I_r называются *ведущими частями* разбиения I . Их число называется его *индексом* и обозначается через $\text{ind}_k I$.

Например, для $I = [2, 5, 9, 14, 17]$ его стандартная форма как 1-разбиения — это $[2, 5] \sqcup [9] \sqcup [14, 17]$, а как 2-разбиения — $[2, 5, 9] \sqcup [14, 17]$. Таким образом, $\text{ind}_1 I = 2$, а $\text{ind}_2 I = 1$.

Определение 1.12. *Отмеченным k -разбиением* называется пара $\{k; [I; J]\}$, где $[I; J] \in \mathbf{D}$, I есть k -разбиение, а разбиение $I \setminus J$ строгое.

Определение 1.13. Отмеченное k -разбиение $[I; J]$ называется *неособым*, если I — неособое k -разбиение, а J — подмножество множества ведущих частей разбиения I . В противном случае оно называется *особым*.

Ниже используются следующие обозначения:

$\mathbf{N}(k)$ — множество неособых k -разбиений;

$\mathbf{D}(k)$ — множество отмеченных k -разбиений;

$\mathbf{N}(k)$ — множество неособых отмеченных k -разбиений;

$\mathbf{M}(k)$ — множество основных k -разбиений;

$\mathbf{M}_q(k)$ — множество основных k -разбиений длины q .

Как подмножества множества $\mathbf{D}$ все эти множества наследуют частичный порядок $\triangleleft$.

§2. Теорема о фильтрующем базисе и когомологии алгебр $L(k)$

Обозначим через $\{C_*(k), d\}$ внешний комплекс алгебры $L(k)$, где $C_*(k) = \bigoplus_{q \geq 0} C_q(k)$. Его пространство q -мерных цепей $C_q(k) = \Lambda^q(L(k))$ состоит из конечных линейных комбинаций базисных векторов $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$, называемых k -мономами, где $I = [i_1, \dots, i_q]$ — строгое k -разбиение, а действие граничного оператора d определяется формулой

$$d_k(e_I) = \sum_{1 \leq s < t \leq q} (-1)^{s+t-1} (i_t - i_s)_h e_{i_s+i_t} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{i_s} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{i_t} \wedge \dots \wedge e_{i_q}. \quad (6)$$

Пусть $C_*^{(n)}(k)$ — пространство, порожденное k -мономами e_I , для которых $\|I\| = n$. Тогда $C_*(k) = \bigoplus_{n \geq 0} C_*^{(n)}(k)$ есть прямая сумма комплексов. Определим пространство q -мерных коцепей как $C^q(k) = \bigoplus_{n \geq 0} C_{(n)}^q(k)$, где $C_{(n)}^q(k) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(C_q^{(n)}(k), \mathbb{Q})$.

Введем на $C_*(k)$ скалярное произведение, положив $\langle e_{I_1}, e_{I_2} \rangle = \delta_{I_1, I_2}$. Оно определяет изоморфизмы $C_q^{(n)}(k) \cong C_{(n)}^q(k)$, позволяющие рассматривать цепи алгебры $L(k)$ как ее коцепи. Пусть δ_k — (кограницный) оператор на $C_*(k) = C^*(k)$, сопряженный к d_k относительно введенного скалярного произведения. Из определений следуют формулы

$$\delta_k(e_i) = \sum_{a+b=i; k \leq a < b} (b-a)_h e_a \wedge e_b, \quad (7)$$

$$\delta_k(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}) = \sum_{1 \leq a \leq q} (-1)^{a-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \delta_k(e_{i_a}) \wedge \dots \wedge e_{i_q}. \quad (8)$$

Гомологии комплексов $\{C_*(k), d_k\}$ и $\{C^*(k), \delta_k\}$ называются *гомологиями* и *ко-гомологиями* алгебры $L(k)$ соответственно и обозначаются через $H_*(k)$ и $H^*(k)$.

Определение 2.1. Для $[I; J] \in \mathbf{D}(k)$, $I = [i_1, \dots, i_q]$, положим $e_{[I; J]} = e_{(i_1)} \wedge \dots \wedge e_{(i_q)}$, где

$$e_{(i_a)} = \begin{cases} e_{i_a}, & \text{если } i_a \notin J, \\ \delta_k(e_{i_a}), & \text{если } i_a \in J. \end{cases}$$

Коцепь вида $e_{[I; J]}$ называется $e(k)$ -*мономом*. Она называется $\varepsilon(k)$ -*мономом*, если $[I; J] \in \mathbf{N}(k)$, и *особым* $e(k)$ -*мономом* в противном случае. Для $\varepsilon(k)$ -монома $e_{[I; J]}$ используется также обозначение $\varepsilon_{[I; J]}$.

Имея в виду соответствие между отмеченными k -разбиениями и $e(k)$ -мономами, понятия, относящиеся к таким разбиениям (степень, длина, etc.), мы будем применять к $e(k)$ -монамам. Отметим, что при непустом $[I; J]$ возможно равенство $e_{[I; J]} = 0$. Например, $e_2 \wedge \delta_1 e_3 = 0$. Это мотивирует

Определение 2.2. Мы пишем $e_{[I; J]} \triangleleft e_{[I'; J']}$, если $e_{[I'; J']} \neq 0$ и либо $e_{[I; J]} = 0$, либо $[I; J] \triangleleft [I'; J']$.

Из следствия 1.7 вытекает

Лемма 2.3. Если $e_{[I; J]} \triangleleft e_{[I'; J']}$ и $e_{[I_1; J_1]} \triangleleft e_{[I'_1; J'_1]}$, то $e_{[I; J]} \wedge e_{[I_1; J_1]} \triangleleft e_{[I'; J']} \wedge e_{[I'_1; J'_1]}$.

Теорема 2.4. Множество $\varepsilon(k)$ -мономов составляет базис пространства $C^*(k)$, такой, что

$$e_{[I; J]} = \sum_{[I'; J'] \triangleleft [I; J]} \alpha_{[I'; J']} \varepsilon_{[I'; J']}, \quad \text{если } [I; J] \text{ — особое отмеченное } k\text{-разбиение}; \quad (9)$$

$$\delta_k(\varepsilon_I) = \alpha_I \varepsilon_{[I; I-]} + \sum_{[I'; J'], I' \triangleleft I} \alpha_{[I'; J']} \varepsilon_{[I'; J']} \quad (\alpha_I \neq 0),$$

если I — плотное k -разбиение. (10)

Из формулы (9) следует, что для плотного и основного k -разбиений I выполняются равенства

$$\delta_k(\varepsilon_{[I;I-]}) = \sum_{[I';J'], I' \triangleleft I} \alpha_{[I';J']\varepsilon_{[I';J']}} \quad \text{и} \quad \delta_k(\varepsilon_I) = \sum_{[I';J'], I' \triangleleft I, \text{ind}_k I' > 0} \alpha_{[I';J']\varepsilon_{[I';J']}} \quad (11)$$

соответственно.

Воспользуемся теоремой 2.4 для вычисления $H^*(k) = H^*(L(k); \mathbb{Q})$. Пусть $N_0(k) = N(k)$ и

$$N_{t+1}(k) = N_t(k) \setminus \{\text{множество максимальных элементов в } N_t(k) \text{ относительно } \trianglelefteq\},$$

где $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Пусть $\pi: \mathbf{N}(k) \rightarrow N(k)$ — проекция, $\pi[I; J] = I$, и $E_t(k)$ — линейная оболочка множества $\varepsilon(k)$ -мономов $\varepsilon_{[I;J]}$, где $[I; J] \in \pi^{-1}(N_t(k))$. По теореме 2.4 $C^*(k) = E_0(k)$. Таким образом, мы получаем фильтрацию векторных пространств

$$C^*(k) = E_0(k) \supset E_1(k) \supset E_2(k) \supset \dots \quad (12)$$

Пусть $\varepsilon_{[I;J]} \in E_t(k)$ и $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m$ — стандартная форма k -разбиения I . По формуле (8)

$$\begin{aligned} \delta_k(\varepsilon_{[I;J]}) &= \delta_k(\varepsilon_{[I_1;I_1 \cap J]} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{[I_s;I_s \cap J]}) \\ &= \sum_{1 \leq a \leq s} (-1)^{\eta_a(I;J)} \varepsilon_{[I_1;I_1 \cap J]} \wedge \dots \wedge \delta_k \varepsilon_{[I_a;I_a \cap J]} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{[I_s;I_s \cap J]}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\eta_1(I; J) = 1$ и $\eta_a(I; J) = |I_1| + \dots + |I_{a-1}| + |I_1 \cap J| + \dots + |I_{a-1} \cap J|$ при $a > 1$. Из (10) и (11) следует, что $\delta_k E_t(k) \subset E_t(k)$. Поэтому (12) — фильтрация комплекса $\{C^*(k), \delta_k\}$.

Пусть $\{\mathcal{E}_r(k), \partial_r\}$ обозначает r -ю страницу соответствующей спектральной последовательности. Образ $\varepsilon(k)$ -монома $\varepsilon_{[I;J]}$ при естественной проекции $C^*(k) \rightarrow \mathcal{E}_0(k)$ обозначим тем же символом. Дифференциал ∂_0 действует по формуле (13), в которой δ_k заменено на ∂_0 .

Для $I_a \in M(k)$ из второй формулы (11) и леммы 2.3 следует, что соответствующее слагаемое в правой части формулы (13) принадлежит $E_{t+1}(k)$. То же верно для $I_a^- \in J$, как вытекает из первой формулы (11) и леммы 2.3. В частности, для основного или плотного k -разбиения I

$$\partial_0 \varepsilon_{[I;J]} = \begin{cases} 0, & \text{если } |J| = 1 \text{ или } \text{ind}_k I = 0, \\ \alpha_I \varepsilon_{[I;I-]} \neq 0, & \text{если } |J| = 0 \text{ и } \text{ind}_k I = 1. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть $C(I) \subset \mathcal{E}_0(k)$ — пространство, порожденное всеми цепями $\varepsilon_{[I;J]}$ с фиксированным I . Тогда $\mathcal{E}_0(k) = \bigoplus_{I \in N(k)} C(I)$ — прямая сумма комплексов, как видно из формулы (14).

Из формул (9), (10) и определения спектральной последовательности следует, что $H^*(C(I)) \cong \mathbb{Q} \varepsilon_I$ для основного k -разбиения I и $H^*(C(I)) = 0$ для плотного k -разбиения I .

Формула (13) показывает, что $C(I) = \bigotimes_{1 \leq s \leq m} C(I_s)$ есть тензорное произведение комплексов. Поэтому по формуле Кюннета

$$H^*(C(I)) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } \text{ind}_k I \neq 0, \\ \mathbb{Q}_{\varepsilon_I}, & \text{если } \text{ind}_k I = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\mathcal{E}_1(k) = \bigoplus_{I \in M_q(k)} \mathbb{Q}_{\varepsilon_I}$. Теперь из формулы (14) следует, что $\partial_1 = \partial_2 = \dots = 0$. Значит, $\mathcal{E}_\infty(k) = \mathcal{E}_1(k)$. Вычисление закончено.

Теорема 2.5. Для любого $I \in M_q(k)$ существует коцикл

$$\mathcal{C}_I = \varepsilon_I + \sum_{[I'; J'] \triangleleft I, \text{ind}_k I' > 0} \alpha_{[I'; J']} \varepsilon_{[I'; J']} \in C^q(k), \quad (15)$$

представляющий ненулевой класс $\mathcal{C}_I \in H^q(k)$. Множество гомологических классов коциклов $\mathcal{C}_I$ составляет базис пространства $H^q(k)$.

Замечание 2.6. Теорема 2.5 показывает, что формула (3) эквивалентна легко проверяемой индукцией по k формуле (см. [3])

$$|M_q(k)| = \binom{q+k-1}{k-1} + \binom{q+k-2}{k-1}.$$

Замечание 2.7. Из теорем 2.4 и 2.5 можно извлечь некоторую информацию об умножении в $H^*(k)$, индуцированном внешним умножением коцепей. Заметим, что для $I \in M_q(k)$ и $\psi(k, q) = kq + 3q(q-1)/2$ выполняются неравенства $\psi(k, |I|) \leq \|I\| \leq \psi(2k, |I|)$.

Предположим, что $I_1, I_2 \in M(k)$ и $\mathcal{C}_{I_1} \wedge \mathcal{C}_{I_2}$ представляет ненулевой класс $\mathcal{C}_{I_1} \cdot \mathcal{C}_{I_2} \in H^*(k)$. Тогда по формулам (15), (9) и лемме 2.3 существует $I \in M_{|I_1|+|I_2|}(k)$ с $I \leq I_1 \sqcup I_2$. Поэтому $\psi(k, |I_1| + |I_2|) \leq \|I_1\| + \|I_2\| \leq \psi(2k, |I_1|) + \psi(2k, |I_2|)$. Это дает условие $3|I_1||I_2| \leq k(|I_1| + |I_2|)$, необходимое для того, чтобы $\mathcal{C}_{I_1} \cdot \mathcal{C}_{I_2} \neq 0$. Из него следует тривиальность умножения в когомологиях алгебр $L(1)$ и $L(2)$.

Если $I_1, I_2, I_1 \sqcup I_2 \in M(k)$, то $\mathcal{C}_{I_1} \cdot \mathcal{C}_{I_2} = \text{sg}(I_1, I_2) \mathcal{C}_{I_1 \sqcup I_2}$, где $\text{sg}(I_1, I_2)$ обозначает знак перестановки $\begin{pmatrix} I_1 \sqcup I_2 \\ I_1, I_2 \end{pmatrix}$. Поэтому умножение в $H^*(k)$ при $k > 2$ нетривиально. Его вычисление, благодаря теоремам 2.4 и 2.5, сводится к вычислению коэффициентов α_I разложения

$$\varepsilon_{I_1} \wedge \varepsilon_{I_2} = \sum_{I \leq I_1 \sqcup I_2} \alpha_I \varepsilon_I + \sum_{[I'; J'] \triangleleft I_1 \sqcup I_2, \text{ind}_k I' > 0} \beta_{[I'; J']} \varepsilon_{[I'; J]},$$

где $I_1, I_2, I \in M(k)$. Получение общей формулы для этих коэффициентов кажется трудной комбинаторной задачей.

§3. Доказательство (основной) теоремы 2.4

Лемма 3.1. В комплексе $C^*(k)$ имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{a+b=n} (a)_h e_a \wedge \delta_k(e_b) = 0, \quad (16)$$

$$\sum_{a+b=n} \delta_k(e_a) \wedge \delta_k(e_b) = 0, \quad \sum_{a+b=n} (b-a)_h^2 \delta_k(e_a) \wedge \delta_k(e_b) = 0. \quad (17)$$

Если $h = 1$ или $h \neq 1$ и $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, то

$$\sum_{a+b=n} e_a \wedge \delta_k(e_b) = 0, \quad \sum_{a+b=n} (a)_h (b-a)_h^2 e_a \wedge \delta_k(e_b) = 0. \quad (18)$$

Если $h \neq 1$ и $n \equiv 0 \pmod{3}$, то

$$\sum_{a+b=n} (n-3a) e_a \wedge \delta_k(e_b) = 0, \quad \sum_{a+b=n} (2-3(a)_h^2) e_a \wedge \delta_k(e_b) = 0. \quad (19)$$

Доказательство. Соотношение $\sum_{a+b=n} f(a, b) e_a \wedge \delta_k(e_b) = 0$ эквивалентно тождеству

$$(y-z)_h f(x, y+z) - (x-z)_h f(y, x+z) + (x-y)_h f(z, x+y) = 0.$$

Оно прямо проверяется для (16), (18) и (19). Применение δ_k к (18) или (19) дает (17). $\square$

Определение 3.2. Назовем $e(k)$ -моном $e_{[I;J]}$ *хорошим*, если k -разбиение $[I; J]$ неособо как отмеченное 1-разбиение, и *плохим* в противном случае.

Лемма 3.3. Для любого плохого $e(k)$ -монома $e_{[I;J]} \in C^*(k)$ существует разложение

$$e_{[I;J]} = \sum_{[I';J'] \triangleleft [I;J]} \alpha_{[I';J']} e_{[I';J']}, \quad (20)$$

где все $e(k)$ -мономы $e_{[I';J']}$ хорошие.

Доказательство. Очевидно, что $e(k)$ -моном является плохим, если и только если он содержит подмономы длины 2 из следующего списка, где $\alpha = 0, 1$:

$$x(i, \alpha) = e_{i-1+\alpha} \wedge e_{i+1},$$

$$y_1(i, \alpha) = e_i \wedge \delta_k e_{i+\alpha}, \quad y_2(i, \alpha) = \delta_k e_{i-1+\alpha} \wedge e_{i+1}, \quad y_3(i, \alpha) = e_{i-1} \wedge \delta_k e_{i+1+\alpha},$$

$$z_1(i, \alpha) = \delta_k e_i \wedge \delta_k e_{i+\alpha}, \quad z_2(i, \alpha) = \delta_k e_{i-1} \wedge \delta_k e_{i+1+\alpha}.$$

Пусть $|I| = 2$. Рассмотрим (7) как уравнение с неизвестным $x(i, \alpha)$, соотношения (16), (18) при $h = 1$ или $h \neq 1$ и $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ или соотношения (16), (19) при $h \neq 1$ и $n \equiv 0 \pmod{3}$ как систему уравнений с неизвестными $y_1(i, \alpha)$, $y_2(i, \alpha)$, $y_3(i, \alpha)$ и, наконец, (17) как систему уравнений с неизвестными $z_1(i, \alpha)$, $z_2(i, \alpha)$. Прямая проверка показывает, что эти системы линейных уравнений невырождены. Их решения дают разложения (20) для плохих $e(k)$ -мономов длины 2.

При $|I| > 2$ заменим любой плохой $e(k)$ -подмоном длины 2 (например, самый левый) в $e_{[I;J]}$ линейной комбинацией хороших. Тогда $e_{[I;J]}$ запишется как линейная комбинация $e(k)$ -мономов, каждый из которых меньше $e_{[I;J]}$, как следует из леммы 2.3. Применим ту же процедуру к каждому плохому слагаемому полученной суммы и т. д. Так как количество разбиений $[I'; J']$, меньших $[I; J]$, конечно, через конечное число шагов мы получим разложение (20). $\square$

Определение 3.4. Для $c = \sum \alpha_{[I;J]} e_{[I;J]} \in C^*(k)$ мы пишем $c \approx 0$, если $c = \sum \alpha_{[I';J']} e_{[I';J']}$ и $[I'; J'] \triangleleft [I; J]$ для всех пар $[I; J]$, $[I'; J']$, таких, что $\alpha_{[I;J]} \alpha_{[I';J']} \neq 0$. Для $c_1, c_2 \in C^*(k)$ мы пишем $c_1 \approx c_2$, если $c_1 - c_2 \approx 0$.

Лемма 3.5. Пусть I — плотное k -разбиение. Тогда $\delta_k(\varepsilon_I) \approx \alpha_I \varepsilon_{[I;-]}$, где $\alpha_I \neq 0$.

Доказательство. Применение алгоритма леммы 3.3 к I приводит к формуле

$$e_{[I;I^+]} \approx \begin{cases} (-1)^{|I|-1} I^+ / I^- \varepsilon_{[I;I^-]}, & \text{если } h = 1 \text{ или } h \neq 1 \text{ и } n \not\equiv 0 \pmod{3}, \\ (-1)^{|I|-1} \varepsilon_{[I;I^-]}, & \text{если } h \neq 1 \text{ и } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \quad (21)$$

Если $I = [i_1, \dots, i_q]$ и $I_r = [i_1, \dots, i_r]$, то

$$\delta_k(\varepsilon_I) = \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^{r-1} e_{[I_r; I_r^+]} \wedge \varepsilon_{I \setminus I_r}.$$

Подставляя сюда выражения (21) для $e_{[I_r; I_r^+]}$, получаем формулу

$$\delta_k(\varepsilon_I) \approx \begin{cases} \|I\| / I^- \varepsilon_{[I;I^-]}, & \text{если } h = 1 \text{ или } h \neq 1 \text{ и } n \not\equiv 0 \pmod{3}, \\ |I| \varepsilon_{[I;I^-]}, & \text{если } h \neq 1 \text{ и } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Это завершает доказательство. $\square$

Множества хороших $e(1)$ -мономов и $\varepsilon(1)$ -мономов совпадают. Поэтому из лемм 3.3 и 3.5 следует, что $\varepsilon(1)$ -мономы степени n являются линейной системой образующих пространства $C_*^{(n)}(1)$, для которой выполняются формулы (9) и (10). Чтобы закончить доказательство теоремы 2.4 для $k = 1$, достаточно убедиться в линейной независимости $\varepsilon(1)$ -мономов.

Пусть $\mathbf{N}_{l,m}^{(n)} = \{[I; J] \in \mathbf{N}(1) : \|I\| = n, |I| = l, |J| = m\}$. Число $\varepsilon(1)$ -мономов размерности q и степени n равно количеству элементов множества $\mathbf{N}_q^{(n)} = \bigsqcup_{l+m=q} \mathbf{N}_{l,m}^{(n)}$. С другой стороны, $\dim C_q^{(n)}(1) = |D_q^{(n)}|$, где $D_q^{(n)}$ — множество строгих 1-разбиений длины q степени n . Таким образом, линейная независимость $\varepsilon(1)$ -мономов вытекает из следующего утверждения:

Теорема 3.6. $|D_q^{(n)}| = |\mathbf{N}_q^{(n)}|$.

Достаточно убедиться, что имеет место

Лемма 3.7. Утверждение теоремы 3.6 и тождество (4) эквивалентны.

Доказательство. Положим $A_l(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l |\mathbf{N}_{l,m}^{(n)}| t^m x^n$. Легко видеть, что утверждение теоремы 3.6 эквивалентно тождеству

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + tx^i) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |\mathbf{N}_q^{(n)}(1)| t^q x^n = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} A_l(x, t) t^l.$$

Теперь достаточно проверить, что

$$A_l(x, t) = x^{(3l^2-l)/2} \frac{(1+tx) \cdots (1+tx^{l-1})(1+tx^{2l})}{(1-x) \cdots (1-x^{l-1})(1-x^l)}.$$

Свойство 1-разбиения $[i_1, \dots, i_l]$ быть неособым эквивалентно такому свойству его сопряженного разбиения (см. [5]): это разбиение, в котором $i_1 \geq 1$ частей равно l , $i_2 - i_1 \geq 3$ частей равно $l-1, \dots, i_l - i_{l-1} \geq 3$ частей равно 1. Если $i_1 \geq 3$ или $i_a - i_{a-1} > 3$ для некоторого a ($2 \leq a \leq q$), то соответствующая часть разбиения (i_1 или i_a) может быть либо отмечена (коэффициент t), либо

нет (коэффициент 1). Таким образом,

$$A_{1,l}(x, t) = \left(x^l + x^{2l} + (1+t) \sum_{r=3}^{\infty} x^{rl} \right) \left(x^{3(l-1)} + (1+t) \sum_{r=4}^{\infty} x^{r(l-1)} \right) \cdots \left(x^3 + (1+t) \sum_{r=4}^{\infty} x^r \right).$$

Суммирование геометрических прогрессий в скобках приводит к нужной формуле. $\square$

Теорема 2.4 для $k = 1$ доказана. Для $k > 1$ докажем ее индукцией по k . Введем для этого две полезные операции на отмеченных разбиениях.

Определение 3.8. Положим $\sigma[i_1, \dots, i_q] = [i_1 + 1, \dots, i_q + 1]$ и определим отображение $\sigma: \mathbf{D}(k) \rightarrow \mathbf{D}(k+1)$ формулой $\sigma[I; J] = [\sigma(I \setminus J) \sqcup \sigma^2(J); \sigma^2(J)]$.

Определение 3.9. Пусть $[I; J] \in \mathbf{N}(k)$, $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m$ — стандартная форма k -разбиения I и $J = [I_{a_1}^-, \dots, I_{a_r}^-]$. Положим $\tau[I; J] = [I; J^+] \in \mathbf{D}(k)$, где $J^+ = [I_{a_1}^+, \dots, I_{a_r}^+]$.

Из определений легко следует

Лемма 3.10. Композиция $\sigma\tau$ индуцирует биективное отображение $\sigma\tau: \mathbf{N}(k) \rightarrow \mathbf{N}(k+1)$.

Предположим, что теорема 2.4 доказана для $\varepsilon(k-1)$ -мономов. Тогда множество мономов $e_{\tau[I; J]}$, где $[I; J] \in \mathbf{N}(k-1)$, является базисом в $C^*(k-1)$, таким, что

$$\varepsilon_{[I; J]} = \beta_{[I; J]} e_{\tau[I; J]} + \sum_{[I'; J'] \triangleleft [I; J]} \beta_{[I'; J']} e_{\tau[I'; J']}, \quad \text{где } \beta_{[I; J]} \neq 0. \quad (22)$$

Действительно, формула (21) и лемма 2.3 показывают, что

$$e_{\tau[I; J]} \approx \gamma(I_{a_1}) \cdots \gamma(I_{a_1}) \varepsilon_{[I; J]} \neq 0,$$

где $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m$ — стандартная форма $(k-1)$ -разбиения I , $J = [I_{a_1}^-, \dots, I_{a_r}^-]$, а $\gamma(I_{a_i})$ — коэффициент при $\varepsilon_{[I_{a_i}^-, \dots, I_{a_i}^-]}$ в формуле (21). Поэтому при линейном упорядочении множества $\mathbf{N}(k-1)$, согласованном с $\triangleleft$, подмножество $\varepsilon(k-1)$ -мономов $e_{\tau[I; J]}$ фиксированной степени выражается через базис $\varepsilon(k-1)$ -мономов той же степени с помощью невырожденной верхней треугольной матрицы. Обращая ее, видим, что $e(k-1)$ -мономы $e_{\tau[I; J]}$ также являются базисом пространства $C^*(k-1)$, для которого выполняется формула (22), так как из неравенства $\tau[I'; J'] \triangleleft [I; J]$ следует, что $[I'; J'] \triangleleft [I; J]$.

Определим линейный изоморфизм $\sigma: C^*(k-1) \rightarrow C^*(k)$ формулой $\sigma(e_I) = e_{\sigma(I)}$. Так как $\sigma \delta_k(e_i) = \delta_{k+1}(e_{i+2})$, то $\sigma(e_{[I; J]}) = e_{\sigma[I; J]}$. Применение σ к обеим частям формулы (22) дает

$$\sigma(\varepsilon_{[I; J]}) = \beta_{[I; J]} \varepsilon_{\sigma\tau[I; J]} + \sum_{[I'; J'] \triangleleft [I; J]} \beta_{[I'; J']} \varepsilon_{\sigma\tau[I'; J']}, \quad \text{где } \beta_{[I; J]} \neq 0, \quad (23)$$

поскольку $e_{\sigma\tau[I'; J']} = \varepsilon_{\sigma\tau[I'; J']}$ по лемме 3.10.

По предположению индукции множество цепей $\sigma(\varepsilon_{[I; J]})$ есть базис пространства $C^*(k)$, так как σ — изоморфизм. С другой стороны, множество цепей $\varepsilon_{\sigma\tau[I; J]}$ совпадает с множеством $\varepsilon(k)$ -мономов по лемме 3.10. Эти множества связаны невырожденным треугольным преобразованием, что, как и выше, следует

из (23). Значит, $\varepsilon(k)$ -мономы также составляют базис в $C^*(k)$. Теперь формула (10) следует из леммы 3.5. Осталось проверить формулу (9).

Заметим, что хороший $e(k)$ -моном $e_{[I;J]}$ не является $\varepsilon(k)$ -мономом, если и только если основная компонента неособого k -разбиения I непуста и содержит отмеченные части. Если в разложении (20) такие $e(k)$ -мономы отсутствуют, то оно совпадает с (9).

Алгоритм, аналогичный использованному в доказательстве леммы 3.3, показывает, что достаточно рассмотреть случай $I = [i_1, \dots, i_q] \in M(k)$, $J = [i_q]$ и $i_q - i_{q-1} > 3$. Тогда $\sigma^{-1}[I; I^+] = [I_1; I_1^+]$, где $I_1 \in M(k-1)$. По предположению индукции

$$\sigma^{-1}(e_{[I;I^+]}) = \sum_{[I';J'] \triangleleft \sigma^{-1}[I;I^+], [I';J'] \in \mathbf{N}(k-1)} \alpha_{[I';J']} e_{\tau[I';J']}.$$

Применение к этой формуле оператора σ дает разложение (9) для $e_{[I;I^+]}$ ввиду следующего утверждения:

Лемма 3.11. Пусть $I \in M(k)$, $[I'; J'] \in \mathbf{N}(k)$ и $[I'; J'] \triangleleft [I; I^+]$. Тогда $\sigma\tau[I'; J'] \triangleleft \sigma[I; I^+]$.

Доказательство. Утверждение нетривиально только при $|I'| = |I|$. Пусть $I' = I'_1 \sqcup \dots \sqcup I'_s$ — стандартная форма и $J' = [I'_1]^-$. Так как $I' \triangleleft I$ и I' неособо, то $I'_1 \neq \emptyset$ — основное k -разбиение и $I'_2 \neq \emptyset$. Пусть $|I| = q$ и $I'_1^+ = i'_p$. При $p = q$ утверждение очевидно. Пусть $p < q$.

Достаточно показать, что для всех $r \geq p$ неравенства (5) строгие. Действительно, тогда $\sigma\tau[I'; J'] \triangleleft \sigma[I; I^+]$. Но $\sigma[I; I^+] \notin \mathbf{N}(k+1)$, тогда как $\sigma\tau[I'; J'] \in \mathbf{N}(k+1)$ по лемме 3.10. Следовательно, $\sigma\tau[I'; J'] \triangleleft \sigma[I; I^+]$.

Для $p \leq r \leq q$ из определений получаем

$$\begin{aligned} i_r &< 2k + 3(r-1) \leq i'_r, & \text{если } i_1 = k, \\ i_r &\leq 2k + 3(r-1) < i'_r, & \text{если } i_1 > k \text{ и } i'_1 > k, \\ i_r &\leq 2k + 3(r-1) \leq i'_r, & \text{если } i_1 > k \text{ и } i'_1 = k. \end{aligned} \quad (24)$$

Предположим сначала, что $i'_r > i_r$ для всех $r \geq p$. Тогда минимальное a , такое, что $p \leq a \leq q$ и $i'_1 + \dots + i'_a = i_1 + \dots + i_a$, равно q . Таким образом, неравенства (5) при $r \geq p$ строгие.

Пусть существует $r \geq p$, для которого $i'_r = i_r$, и r_0 — наибольшее такое число. Из (24) следует, что $i'_{r_0} = i_{r_0} = 2k + 3(r_0 - 1)$. Поэтому $l = 2$ и $p = r_0$. Поскольку $i'_p = i_p$ и $i'_r > i_r$ при $r > p$, рассуждая, как и выше, убеждаемся, что при $r \geq p$ неравенства (5) строгие. $\square$

§4. Стабильная фильтрация комплекса $C_*(k)$

В этом параграфе мы будем рассматривать $e(k)$ -мономы как векторы пространства $C_*(k)$.

Определение 4.1. Положим $\text{St}_0(k) = 0$ и для целого $m > 0$

$$\text{St}_m(k) = \{c \in C_*(k) : d_{k+r}\sigma^r(c) \in \text{St}_{m-1}(k+r) \text{ для всех } r \geq 0\}.$$

Векторы пространства $\text{St}_m(k)$ называются m -стабильными цепями, а фильтрация

$$0 = \text{St}_0(k) \subset \text{St}_1(k) \subset \text{St}_2(k) \subset \dots \subset \text{St}_\infty(k) = C_*(k)$$

называется *стабильной фильтрацией* комплекса $C_*(k)$. *Стабильными циклами* называются 1-стабильные цепи (см. [3]).

Определение 4.2. Пусть $c = \sum \alpha_{[I;J]} \varepsilon_{[I;J]}$ — разложение $c \in C_*(k)$ по базису $\varepsilon(k)$ -мономов. Положим $\text{ht}_k(c) = \min\{|J| : \alpha_{[I;J]} \neq 0\}$ и $\text{ht}_k(0) = \infty$. Обозначим через $E_m(k) = E_m(L(k))$ пространство цепей $c \in C_*(k)$, для которых $\text{ht}_k(c) \geq m$. Фильтрация

$$C_*(k) = E_0(k) \supset E_1(k) \supset E_2(k) \supset \dots \supset E_\infty(k) = 0$$

называется ε -*фильтрацией* комплекса $C_*(k)$.

Теорема 4.3. $\text{St}_m(k) = \widehat{E}_m(k) := \{c \in C^*(k) : \langle c, E_m(k) \rangle = 0\}$.

Лемма 4.4. При $m \geq 1$ для любых $c \in E_m(k)$ и $r \gg 0$ существует цепь $c_r \in E_{m-1}(k+r)$, такая, что $\sigma^r(c) = \delta_{k+r}(c_r)$.

Доказательство. Разбиение вида $[I; J] = [i_1, \dots, i_p, \underline{i_{p+1}}, \dots, \underline{i_q}] \in \mathbf{N}(k)$, где $i_p \leq 2k$, назовем стабильным. При стабильном $[I; J]$ следующая формула доказывает лемму для $c = \varepsilon_{[I;J]}$:

$$\varepsilon_{[I;J]} = \varepsilon_{[i_1, \dots, i_p]} \wedge \varepsilon_{[\underline{i_{p+1}}, \dots, \underline{i_q}]} = \delta_k(\varepsilon_{[i_1, \dots, i_p]} \wedge \varepsilon_{[i_{p+1}, \underline{i_{p+2}}, \dots, \underline{i_q}]}).$$

Для любого $[I'; J'] \in \mathbf{N}(k)$ существует $r(I'; J') \gg 0$, такое, что $(\sigma\tau)^{r(I'; J')}[I'; J']$ стабильно. Но тогда существует $r(I; J)$, для которого $(\sigma\tau)^{r(I; J)}[I'; J']$ стабильно для всех $[I'; J'] \in \mathbf{N}(k)$, таких, что $[I'; J'] \leq [I; J]$, поскольку их число конечно.

Из формулы (23) индукцией по r следует, что для $r > 0$

$$\sigma^r(\varepsilon_{[I;J]}) = \beta_{r, [I;J]} \varepsilon_{(\sigma\tau)^r[I;J]} + \sum_{[I'; J'] < [I; J]} \beta_{r, [I'; J']} \varepsilon_{(\sigma\tau)^r[I'; J']}, \quad \text{где } \beta_{r, [I;J]} \neq 0. \quad (25)$$

Пусть $c = \sum_{[I;J]} \alpha_{[I;J]} \varepsilon_{[I;J]}$ и $r(c) = \max\{r(I; J) : \alpha_{[I;J]} \neq 0\}$. Применяя $\sigma^{r(c)}$ к c , получаем утверждение леммы 4.4 из формулы (25) и уже рассмотренного случая стабильных $[I; J]$. $\square$

Доказательство теоремы 4.3. Докажем теорему индукцией по m . При $m = 0$ утверждение очевидно. Пусть $\text{St}_p(k) = \widehat{E}_p(k)$ для $p < m$.

Убедимся сначала, что цепь $c \in \widehat{E}_m(k)$ является m -стабильной. Из формулы (25) следует, что $\sigma^r(E_m(k)) = E_m(k+r)$. Так как $\langle \sigma^r(c_1), \sigma^r(c_2) \rangle = \langle c_1, c_2 \rangle$ для любых $c_1, c_2 \in C_*(k)$, то

$$\langle \sigma^r(c), E_m(k+r) \rangle = \langle \sigma^r(c), \sigma^r(E_m(k)) \rangle = \langle c, E_m(k) \rangle = 0.$$

Поэтому $\sigma^r(c) \in \widehat{E}_m(k+r)$. С другой стороны, $\delta_{k+r}(E_{m-1}(k+r)) \subset E_m(k+r)$ по теореме 2.4. Теперь требуемое включение $d_{k+r}\sigma^r(c) \in \text{St}_{m-1}(k) = \widehat{E}_{m-1}(k+r)$ следует из равенства

$$\langle d_{k+r}\sigma^r(c), E_{m-1}(k+r) \rangle = \langle \sigma^r(c), \delta_{k+r}(E_{m-1}(k+r)) \rangle = 0.$$

Осталось показать, что любая m -стабильная цепь принадлежит $\widehat{E}_m(k)$. Ввиду разложения $C_*(k) = \widehat{E}_m(k) \oplus E_{m+1}(k)$ достаточно проверить, что для любого $c \in E_{m+1}(k)$ существует $r \geq 0$, для которого $d_{k+r}\sigma^r(c) \notin \widehat{E}_{m-1}(k+r)$.

По лемме 4.4 найдутся r и $c_r \in E_m(k+r)$, такие, что $\sigma^r(c) = \delta_{k+r}(c_r)$. Следовательно,

$$\langle d_{k+r}\sigma^r(c), c_r \rangle = \langle \sigma^r(c), \delta_{k+r}(c_r) \rangle = \langle \sigma^r(c), \sigma^r(c) \rangle \neq 0.$$

Значит, $d_{k+r}\sigma^r(c) \notin \widehat{E}_m(k+r)$. Но тогда $d_{k+r}\sigma^r(c) \notin \widehat{E}_{m-1}(k+r) \subset \widehat{E}_m(k+r)$. $\square$

Следствие 4.5. Для $[I; J] \in \mathbf{N}(k)$ обозначим через $\widehat{\varepsilon}_{[I; J]} \in C_*(k)$ цепь, для которой

$$\langle \widehat{\varepsilon}_{[I; J]}, \varepsilon_{[I'; J']} \rangle = \delta_{[I; J], [I'; J']}$$

при всех $[I'; J'] \in \mathbf{N}(k)$. Множество цепей $\widehat{\varepsilon}_{[I; J]}$ составляет базис пространства $C_*(k)$. Те из них, для которых $|J| \leq m-1$, составляют базис пространства $\text{St}_m(k)$. В частности, базис пространства стабильных циклов из $C_*(k)$ составляют цепи $\widehat{\varepsilon}_I$, где $I \in \mathbf{N}(k)$.

Доказательство. Утверждение о базисе следует из теоремы 2.4 и невырожденности скалярного произведения. Второе утверждение следует из теоремы 4.3. $\square$

§5. Стабильная фильтрация и кососимметрические полиномы

Напомним несколько фактов о (косо)симметрических полиномах (см. [5, гл. I, §§3, 5]). Пусть $\text{Sym}_q[t]$ обозначает $\mathbb{Q}$ -алгебру симметрических полиномов, а $\text{Alt}_q[t]$ — векторное пространство кососимметрических полиномов с рациональными коэффициентами от переменных $t_1, \dots, t_q$. Положим $\text{Sym}_0[t] = \text{Alt}_0[t] = \mathbb{Q}$. Когда это не вызывает недоразумений, будем записывать полином $f(t_1, \dots, t_q)$ как $f(t)$. Для строгих разбиений $I = [i_1, \dots, i_q]$ полиномы

$$\Delta_I(t_1, \dots, t_q) = \det(t_r^{i_m})_{(r, m=1, \dots, q)}$$

составляют базис в $\text{Alt}_q[t]$. Умножение

$$\Delta_I(t_1, \dots, t_q) \wedge \Delta_{I'}(t_1, \dots, t_{q'}) = \text{sg}(I, I') \Delta_{I \sqcup I'}(t_1, \dots, t_{q+q'}),$$

где $\text{sg}(I_1, I_2)$ обозначает знак перестановки $\binom{I_1 \sqcup I_2}{I_1, I_2}$, наделяет $\text{Alt}[t] = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \text{Alt}_q[t]$ структурой антикоммутативной градуированной $\mathbb{Q}$ -алгебры.

Полином $V_q(t) = \Delta_{\rho(q)}(t)$, где $\rho(q) = [0, 1, \dots, q-1]$, называется определителем Вандермонда. Симметрические полиномы $S_I(t) = \Delta_{I+\rho(q)}(t)/V_q(t)$, где $|I|$ — любое разбиение с $|I| = q$, называются полиномами Шура. Они составляют базис в $\text{Sym}_q[t]$. Известно, что

$$S_{I_1}(t)S_{I_2}(t) = S_{I_1+I_2}(t) + \sum_{I \triangleright I_1+I_2} \alpha_I S_I(t), \quad (26)$$

где $I_1 + I_2$ — покомпонентная сумма разбиений, а $\alpha_I \in \mathbb{Z}$. Нетрудно доказать, что

$$V_q^2(t) = S_{2\rho(q)}(t) + \sum_{I \triangleright 2\rho(q)} \beta_I S_I(t). \quad (27)$$

Отождествим цепь $c = \sum_I r_I e_I \in C_q(k)$ с полиномом $c(t) = \sum_I r_I \Delta_I(t)$.

Лемма 5.1. Пусть $c \in C_q(L^{(h)}(k))$ и $q \geq 2$. Тогда

$$d_k(c(t)) = \sum_{1 \leq a \leq q-1} (-1)^{a-1} c_a(t_1, \dots, t_{q-1}; h), \quad (28)$$

где $c_a(t_1, \dots, t_{q-1}; h) = (h^2 - h)^{-1} c(t_1, \dots, t_{a-1}, ht_a, h^2 t_a, t_{a+1}, \dots, t_{q-1})$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $c(t) = \Delta_I(t)$. Для $q = 2$ формула (28) прямо следует из (1). Для $q > 2$ она получается индукцией по q из формулы действия d_k на k -мономах. При проверке удобно воспользоваться формулой

$$t_1^m \wedge c(t_1, \dots, t_{q-1}) = \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^{p-1} t_r^m c(t_1, \dots, \widehat{t_r}, \dots, t_q),$$

где $c(t_1, \dots, t_{q-1}) \in \text{Alt}_{q-1}[t]$. Мы опускаем соответствующее рутинное вычисление. $\square$

Обозначим через $\text{Sym}_{m,q}^{(h)}[t] \subset \text{Sym}_q[t]$ пространство полиномов $p(t)$, для которых

$$\mathbb{T}_{s,q}^{(h)}(p(t)) = p(ht_1, \bar{h}t_1, \dots, ht_s, \bar{h}t_s, t_{s+1}, \dots, t_{q-s}) = 0$$

при всех s , $0 \leq s \leq m \leq [q/2]$. Для $c \in C_q(k)$ пусть $\tilde{c}(t) \in \text{Sym}_q[t]$ — единственный полином, такой, что $c(t) = (t_1 \cdots t_q)^k V_q(t) \tilde{c}(t)$.

Теорема 5.2. $c \in \text{St}_{m,q}(k) = \text{St}_m(k) \cap C_q(k)$, если и только если $\tilde{c}(t) \in \text{Sym}_{m,q}^{(h)}[t]$.

Доказательство. Оператор σ действует на $c(t)$ как умножение на $t_1 \cdots t_q$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $k = 1$. Используем индукцию по m . При $m = 0$ утверждение очевидно. Пусть $m \geq 1$. Так как $V_q(t) = \prod_{q \geq i > j \geq 1} (t_i - t_j)$, то

$$c_a(t_1, \dots, t_{q-1}; h) = (t_1 \cdots t_{q-1})^k V_{q-1}(t) R_a(t; h) \varphi_a(t; h),$$

где $\varphi_a(t; h) = \varphi_a(t_1, \dots, t_{q-1}; h) = \tilde{c}(t_1, \dots, t_{a-1}, ht_a, \bar{h}t_a, t_{a+1}, \dots, t_{q-1})$ и

$$R_a(t; h) = R_a(t_1, \dots, t_{q-1}; h) = t_a \prod_{1 \leq i \leq q-1, i \neq a} \frac{(ht_a - t_i)(\bar{h}t_a - t_i)}{t_a - t_i}.$$

Для $c \in \text{St}_{m,q}(1)$ применим формулу (28) к $\sigma^r(c) \in C_q(r+1)$. Сокращая общий множитель $(t_1 \cdots t_{q-1})^{r+1} V_{q-1}(t)$, в силу индуктивного предположения получаем, что $c \in \text{St}_{m,q}(1)$, если и только если для любого целого $r \geq 1$

$$t_1^{r-1} R_1(t; h) \varphi_1(t; h) + \cdots + t_{q-1}^{r-1} R_{q-1}(t; h) \varphi_{q-1}(t; h) = p_r(t; h) \in \text{Sym}_{m-1,q-1}^{(h)}[t]. \quad (29)$$

При $r = 1, \dots, q-1$ это дает систему уравнений с неизвестными $X_a(t; h) = R_a(t; h) \varphi_a(t; h)$.

Применим $\mathbb{T}_{m-1,q-1}^{(h)}$ к формуле (29). Так как $\mathbb{T}_{m-1,q-1}^{(h)}(p_r(t; h)) = 0$, то при $1 \leq a \leq 2(m-1)$ имеем $\mathbb{T}_{m-1,q-1}^{(h)}(X_a(t; h)) = 0$, поскольку $\mathbb{T}_{m-1,q-1}^{(h)}(R_a(t; h)) = 0$.

Поэтому при $2(m-1)+1 \leq r$, $a \leq q-1$ равенства (29) превращаются в систему уравнений с неизвестными $\mathbb{T}_{m-1,q-1}^{(h)}(X_a(t; h))$, которая имеет нулевое решение, так как ее определитель $(t_{2m-1} \cdots t_{q-m})^{2(m-1)} V_{q-2m+1}(t_{2m-1}, \dots, t_{q-m})$ не равен нулю. Так как $\mathbb{T}_{m-1,q-1}^{(h)}(R_{2(m-1)+1}(t; h)) \neq 0$, то $\mathbb{T}_{m-1,q-1}^{(h)}(\varphi_{2(m-1)+1}(t; h)) = \mathbb{T}_{m,q}^{(h)}(\tilde{c}(t)) = 0$. $\square$

Следствие 5.3 (ср. [6]). *Цепь $c \in C_q(L^{(h)}(k))$ является стабильным циклом при $h = 1$, если и только если $c(t)$ делится на $V_q^3(t)$, и при $h \neq 1$, если и только если $c(t)$ делится на $V_q(t^3) = V_q(t_1^3, \dots, t_q^3)$.*

Доказательство. Для $h = 1$ из теоремы 5.2 следует, что $\tilde{c}(t)$ делится на $t_2 - t_1$ и, следовательно, ввиду симметричности, на $V_q^2(t)$. Тогда $c(t)$ делится на $V_q^3(t)$. Для $h \neq 1$ из теоремы 5.2 следует, что $\tilde{c}(t)$ делится на $(t_2 - ht_1)(t_2 - \bar{h}t_1)$. Тогда $c(t)$ делится на $(t_2 - t_1)(t_2 - ht_1)(t_2 - \bar{h}t_1) = t_2^3 - t_1^3$ и, следовательно, на $V_q(t^3)$. Достаточность следует из формулы (28). $\square$

Следствие 5.4. Полиномы $((t_1 \cdots t_q)^k V_q(t))^{-1} \hat{e}_{[I;J]}(t)$, где $[I;J] \in \mathbf{N}(k)$, $|I| + |J| = q$ и $|J| = m - 1$, составляют базис пространства $\text{Sym}_{m,q}^{(h)}[t]$.

Размерность его подпространства однородных полиномов степени n равна числу разбиений $[I;J] \in \mathbf{N}(1)$, для которых $|I| + |J| = q$, $|J| = m - 1$ и $\|I\| = n + q(q+1)/2$.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из теоремы 5.2 и следствия 4.5. Второе — частный случай первого при $k = 1$. $\square$

§6. Стабильные циклы и гомологии алгебр $L(k)$

Теорема 6.1. Гомологические классы стабильных циклов $\hat{e}_I$, где $I \in M_q(k)$, составляют базис пространства $H_q(L^{(h)}(k))$.

Доказательство. По теореме 2.5 для $I_0 \in M_q(k)$ существует коцикл $\mathcal{C}_{I_0} \in C^q(k)$, такой, что $\langle \mathcal{C}_{I_0}, \hat{e}_I \rangle = \delta_{I_0, I}$ при любом $I \in M_q(k)$. Так как $\hat{e}_I$ — цикл для любого $I \in \mathbf{N}(k)$, цепь $z = \sum_{I \in M_q(k)} \beta_I \hat{e}_I \in C_q(k)$ представляет класс гомологий в $H_q(k)$. Если $z = d_k(x)$, то $\beta_{I_0} = \langle z, \mathcal{C}_{I_0} \rangle = \langle d_k(x), \mathcal{C}_{I_0} \rangle = \langle x, \delta_k(\mathcal{C}_{I_0}) \rangle = 0$. Следовательно, любой ненулевой вектор пространства, порожденного циклами $\hat{e}_I$, где $I \in M_q(k)$, представляет ненулевой q -мерный класс в $H_q(k)$. Так как $\hat{e}_I$ линейно независимы, это завершает доказательство, поскольку $\dim H_q(k) = |M_q(k)|$ по теореме 2.5. $\square$

Теорема 6.2. Гомологические классы стабильных циклов

$$Z_I(t) = \begin{cases} S_{I-3\rho(q)}(t) V_q^3(t), & \text{если } h = 1, \\ S_{I-3\rho(q)}(t) V_q(t^3), & \text{если } h \neq 1, \end{cases}$$

где $I \in M_q(k)$, составляют базис пространства $H_q(L^{(h)}(k))$.

Доказательство. Достаточно доказать формулу

$$Z_I(t) = \hat{e}_I(t) + \sum_{I' \triangleright I} \alpha_{I'} \hat{e}_{I'}(t). \quad (30)$$

Действительно, если $I \in M(k)$ и $I' \triangleright I$ — неособое k -разбиение, то $I' \in M(k)$. Поэтому при $I \in M(k)$ в формуле (30) все I' принадлежат $M(k)$ и в линейном порядке множества $\mathbf{D}(k)$, согласованном с $\trianglelefteq$, матрица перехода от множества цепей $Z_I(t)$ к множеству цепей $\hat{e}_I(t)$ является верхней треугольной. По теореме 6.1 цепи $\hat{e}_I$ составляют базис пространства гомологий. Значит, то же верно для цепей $Z_I(t)$.

Заметим, что $Z_I(t) = \Delta_I(t) + \sum_{I' \triangleright I} \alpha_{I'} \Delta_{I'}(t)$. Для $h \neq 1$ это следует из выражения (26), примененного к произведению полиномов $S_{I-3\rho(q)}(t)$ и $S_{2\rho(q)}(t)$ и умноженного на $V_q(t)$, а для $h = 1$ — из выражений (26) и (27).

Таким образом, $Z_I(t) = \Delta_I(t) + \sum_{I' \triangleright I} \alpha_{I'} \Delta_{I'}(t) + \sum_{I'' \triangleright I} \alpha_{I''} \Delta_{I''}(t)$, где I' — неособые, а I'' — особые k -разбиения. Цепь $c(t) = Z_I(t) - \widehat{\varepsilon}_I(t) - \sum_{I' \triangleright I} \alpha_{I'} \widehat{\varepsilon}_{I'}(t)$ является стабильным циклом согласно предложению 5.3.

Из определения цикла $\widehat{\varepsilon}_I$ следует, что $\widehat{\varepsilon}_I(t) = e_I(t) + \sum_{\tilde{I}} \beta_{\tilde{I}} e_{\tilde{I}}$, где k -разбиения $\tilde{I}$ особые. Поэтому c является линейной комбинацией особых мономов. Так как c — стабильный цикл, $\langle c, E_1(k) \rangle = 0$ по теореме 4.3. С другой стороны, $\langle c, e_I \rangle = 0$ для любого неособого k -разбиения I . По теореме 2.4 множество таких e_I вместе с базисом пространства $E_1(k)$ составляют базис пространства $C_*(k)$. Следовательно, $c = 0$. Это завершает доказательство формулы (30). $\square$

§7. Операторы Лапласа алгебр $L^{(h)}(1)$

Определение 7.1. Эндоморфизм $\Gamma_k^{(h)} = d_k \delta_k + \delta_k d_k$ пространства $C_*(k; \mathbb{R}) = C_*(k) \otimes \mathbb{R}$ называется *оператором Лапласа*, а векторы его ядра — *гармоническими цепями* алгебры $L(k)$.

Очевидно, что $\Gamma_k^{(h)}$ — самосопряженный оператор, коммутирующий с d_k и δ_k . Комплекс $C_*(k; \mathbb{R})$ есть прямая сумма собственных подпространств оператора $\Gamma_k^{(h)}$, являющихся его подкомплексами. Для ненулевых собственных значений они ациклически, а пространство гармонических цепей изоморфно $H_*(k; \mathbb{R})$. Это стандартное общее утверждение (см. [7]).

Определение 7.2 (Б. Л. Фейгин). Линейный эндоморфизм A векторного пространства $\Lambda(V)$ называется *оператором второго порядка степени m* , если $A(\Lambda^q(V)) \subset \Lambda^{q+m}(V)$ и для любых $v_1, \dots, v_q \in V$ ($q \geq 2$)

$$A(v_1 \wedge \dots \wedge v_q) = \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} A_{i,j}(v_1 \wedge \dots \wedge v_q) - (q-2) \sum_{1 \leq i \leq q} A_i(v_1 \wedge \dots \wedge v_q),$$

где $A_{i,j}(v_1 \wedge \dots \wedge v_q) = A(v_i \wedge v_j) \wedge v_1 \wedge \dots \wedge \widehat{v}_i \wedge \dots \wedge \widehat{v}_j \wedge \dots \wedge v_q$ и $A_i(v_1 \wedge \dots \wedge v_q) = v_1 \wedge \dots \wedge A(v_i) \wedge \dots \wedge v_q$.

Легко доказывается, что для $u_1 \in \Lambda^{r_1}(V), \dots, u_q \in \Lambda^{r_q}(V)$ и $q \geq 2$

$$A(u_1 \wedge \dots \wedge u_q) = \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{\omega(i,j)} A_{i,j}(u_1 \wedge \dots \wedge u_q) - (q-2) \sum_{1 \leq i \leq q} A_i(u_1 \wedge \dots \wedge u_q), \quad (31)$$

где $\omega(i, j) = r_i(r_1 + \dots + r_{i-1}) + r_j(r_1 + \dots + r_{j-1}) - r_i r_j$.

Лемма 7.3. $\Gamma_k^{(h)}$ является оператором второго порядка степени 0.

Доказательство — это формальная проверка, использующая только то, что d_k есть оператор второго порядка, а δ_k действует по формуле (8). $\square$

Исследуем оператор Лапласа $\Gamma^{(h)} = \Gamma_1^{(h)}$ алгебры $L^{(h)}(1)$. Для $I = [i_1, \dots, i_q]$ положим $\kappa_h(I) = \kappa_h(i_1) + \dots + \kappa_h(i_q)$ и $(I)_h = (i_1)_h + \dots + (i_q)_h$, где $\kappa_h(i)$ определено формулой (2).

Теорема 7.4. Положим $\lambda^{(h)}(I) = \kappa_h(I) - ((I)_h^2 - (I)_h)/2$. Тогда

$$\Gamma^{(h)}(\varepsilon_{[I;J]}) \approx \lambda^{(h)}(I) \varepsilon_{[I;J]}. \quad (32)$$

Более того, $\Gamma^{(h \neq 1)}(\varepsilon_{[I;J]}) = \lambda^{(h)}(I) \varepsilon_{[I;J]}$. В частности, спектр оператора $\Gamma^{(h)}$ совпадает с множеством чисел $\lambda^{(h)}(I)$, где $I \in N(1)$.

Доказательство. Легко проверяется, что $\Gamma^{(h)}(e_i) = \lambda^{(h)}(i)e_i$. Поэтому и $\Gamma^{(h)}(\delta_1 e_i) = \lambda^{(h)}(i)\delta_1 e_i$. Это доказывает формулу (32) для $\varepsilon(1)$ -мономов длины 1.

Пусть $D^{(h)}(e_I) = \Gamma^{(h)}(e_I) - \lambda^{(h)}(I)e_I$. Прямое вычисление показывает, что

$$\langle D^{(h)}(e_i \wedge e_j), e_u \wedge e_v \rangle = \begin{cases} (3i)_h(v-u)_h, & \text{если } i \leq u < v \leq j, \\ (3u)_h(j-i)_h, & \text{если } u < i < j < v, \end{cases} \quad i+j = u+v.$$

Отсюда следует, что $\Gamma^{(h \neq 1)}(e_i \wedge e_j) = \lambda^{(h)}(i, j)e_i \wedge e_j$, так как $(3m)_{h \neq 1} = 0$. Поскольку $\Gamma^{(h)}$ — оператор второго порядка, это дает формулу $\Gamma^{(h \neq 1)}(e_I) = \lambda^{(h)}(I)e_I$. Таким образом, $\Gamma^{(h \neq 1)} = p - (e_0^2 - e_0)/2$, где линейные отображения e_0 и p определяются формулами $e_0(e_I) = (I)_h e_I$ и $p(e_I) = \kappa_h(I)e_I$. Учитывая, что e_0 коммутирует с δ_1 , а p коммутирует с δ_1 при $h \neq 1$, мы получаем формулу (32).

Пусть $h = 1$. Непосредственно проверяемые формулы

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(e_i \wedge e_j) &= \lambda^{(1)}(i, j)e_i \wedge e_j - 3(i+j) \sum_{1 \leq r < i} r e_{i-r} \wedge e_{j+r} + 3i \delta_1 e_{i+j}, \\ \Gamma^{(1)}(\delta_1 e_i \wedge e_j) &= \lambda^{(1)}(i, j)\delta_1 e_i \wedge e_j \\ &\quad - 3 \sum_{1 \leq r < i} r((i+2j+2r)\delta_1 e_{i-r} \wedge e_{j+r} + (i-2r)e_{i-r} \wedge \delta_1 e_{j+r}) \end{aligned}$$

доказывают (32) для $\varepsilon(1)$ -мономов $e_i \wedge e_j$ и $\delta_1 e_i \wedge e_j$, поскольку $j-i \geq 3$. Из них же получается нужный результат для $\varepsilon(1)$ -мономов $e_i \wedge \delta_1 e_j$ и $\delta_1 e_i \wedge \delta_1 e_j$ ввиду формул

$$\Gamma^{(1)}(e_i \wedge \delta_1 e_j) = \Gamma^{(1)}(\delta_1 e_i \wedge e_j) - \delta_1 \Gamma^{(1)}(e_i \wedge e_j), \quad \Gamma^{(1)}(\delta_1 e_i \wedge \delta_1 e_j) = \delta_1 \Gamma^{(1)}(\delta_1 e_i \wedge e_j).$$

Таким образом, для $\varepsilon(1)$ -мономов длины 2 при $h = 1$ формула (32) верна.

Пусть $\varepsilon_{[I; J]} = e_{(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{(i_q)}$ — произвольный $\varepsilon(1)$ -моном, где $q > 2$. В формуле (31) положим $A = \Gamma^{(h)}$ и $u_a = e_{(i_a)}$. Используя полученные выражения для $\varepsilon(1)$ -мономов длины 1 и 2 и лемму 2.3, видим, что $\Gamma^{(1)}(\varepsilon_{[I; J]}) \approx \lambda(I)\varepsilon_{[I; J]}$, где

$$\lambda(I) = \sum_{1 \leq a < b \leq q} \lambda^{(1)}(i_a, i_b) - (q-2) \sum_{1 \leq a \leq q} \lambda^{(1)}(i_a) = \lambda^{(1)}(I).$$

Формула (32) отсюда следует в силу теоремы 2.4. □

Следствие 7.5. $\dim H_q(L^{(h)}(1)) = 2$ для $q > 0$.

Доказательство. Ввиду однозначного соответствия между гомологиями и гармоническими цепями достаточно показать, что $\lambda^{(h)}(I) = 0$ для $I \in \mathbf{N}(1)$ только в случаях $I = \xi(1, q)$ или $I = \xi(2, q)$.

Для $h = 1$ утверждение следует из легко проверяемой формулы

$$\lambda^{(1)}(I) = \frac{1}{6} \left(\|I\|(i_1-1)(i_1-2) + \sum_{1 \leq a < q} \|I\|_{a+1}(i_a + i_{a+1})(i_{a+1} - i_a - 3) \right), \quad (33)$$

где $\|I\|_m = i_m + \cdots + i_q$. Пусть $h \neq 1$. Поскольку $\lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor = \frac{i-(i)_h}{3}$, из теоремы 7.4 следует, что $\lambda^{(h \neq 1)}(I) = 0$, только если

$$\|I\| = (3(I)_h^2 - (I)_h)/2.$$

Так как $\|I\| \geq (3q^2 - q)/2$ и $|(I)_h| \leq q$, то $(I)_h = \pm q$. Поэтому $I = \xi(1, q)$ или $I = \xi(2, q)$. $\square$

Следствие 7.6. Уравнение $\lambda^{(1)}(I) = \lambda > 0$, где $I \in \mathbf{N}(1)$, имеет не более конечного числа решений. Пусть $I_1, \dots, I_{r(\lambda)}$ — все эти решения, а $m(\lambda)$ обозначает кратность собственного значения λ оператора $\Gamma^{(1)}$. Тогда $m(\lambda) = 2^{\text{ind}_1 I_1} + \dots + 2^{\text{ind}_1 I_{r(\lambda)}}$.

Доказательство. Поскольку $I \in \mathbf{N}(1)$, вектор

$$v = ((i_1 - 1)(i_1 - 2), i_2 - i_1 - 3, \dots, i_q - i_{q-1} - 3) = (v_1, \dots, v_q)$$

ненулевой, а его координаты неотрицательны, как следует из формулы (33). Из нее же следует оценка $\lambda = \lambda^{(1)}(I) > \frac{1}{6} \sum_{a=1}^q \|I\|_a v_a$. При $\lambda > 0$ это неравенство имеет не более конечного числа решений на множестве троек $\{q, I, v\}$, где I — разбиение, $v \neq 0$ — целочисленный вектор с неотрицательными координатами и $|I| = \dim(v) = q$. Это доказывает первое утверждение.

Если $\lambda^{(1)}(I) = \lambda$ и V_I — пространство, порожденное векторами $\varepsilon_{[I;J]}$, то

$$m(\lambda) = \dim \bigoplus_{I \in \mathbf{N}(1), \lambda^{(1)}(I) = \lambda > 0} V_I.$$

Поскольку эта сумма конечна и $\dim(V_I) = 2^{\text{ind}_1 I}$, мы получаем нужную формулу для $m(\lambda)$. $\square$

Следствие 7.7. Имеет место включение $\Gamma^{(h)}(\text{St}_m(1)) \subset \text{St}_m(1)$. Более того, $\Gamma^{(h \neq 1)}(\widehat{\varepsilon}_{[I;J]}) = \lambda^{(h)}(I) \widehat{\varepsilon}_{[I;J]}$ и

$$\Gamma^{(1)}(\widehat{\varepsilon}_{[I;J]}) = \lambda^{(1)}(I) \widehat{\varepsilon}_{[I;J]} + \sum_{[I';J'] \text{ tr}[I;J]} \alpha_{[I';J']} \widehat{\varepsilon}_{[I';J']}. \quad (34)$$

В частности, кратность собственного значения λ оператора $\Gamma^{(1)}$ на пространстве стабильных циклов алгебры L_1 равна числу решений уравнения $\lambda^{(1)}(I) = \lambda$, где $I \in \mathbf{N}(1)$.

Доказательство. Поскольку $\Gamma^{(h)}(E_m(1)) \subset E_m(1)$ по теореме 7.4, мы получаем первое утверждение, так как

$$\langle \Gamma^{(h)}(\text{St}_m(1)), E_{m+1}(1) \rangle = \langle \text{St}_m(1), \Gamma^{(h)}(E_{m+1}(1)) \rangle = 0.$$

Для $h \neq 1$ второе утверждение очевидно, поскольку $\Gamma^{(h \neq 1)}$ в базисе $\varepsilon(1)$ -мономов действует диагонально.

Для $h = 1$ и $\widehat{\varepsilon}_{[I;J]} \in \text{St}_m(L_1)$ из первого утверждения следует формула

$$\Gamma^{(1)}(\widehat{\varepsilon}_{[I;J]}) = \sum_{[I';J'], \|I'\| = \|I\|, |J'| \geq m} \alpha_{[I';J']} \widehat{\varepsilon}_{[I';J']},$$

где $\alpha_{[I';J']} = \langle \Gamma^{(1)}(\widehat{\varepsilon}_{[I;J]}), \varepsilon_{[I';J']} \rangle = \langle \widehat{\varepsilon}_{[I;J]}, \Gamma^{(1)}(\varepsilon_{[I';J']}) \rangle$.

Так как $\Gamma^{(1)}(\varepsilon_{[I';J']}) = \lambda^{(1)}(I') \varepsilon_{[I';J']} + \dots$, согласно формуле (32), то $\alpha_{[I;J]} = \lambda^{(1)}(I)$ и $\alpha_{[I';J']} = 0$, если $[I';J'] \triangleleft [I;J]$ или $[I;J]$ и $[I';J']$ несравнимы. $\square$

Следствие 7.8 (ср. [6]). Стабильный цикл $Z_I(t) = S_{I-3\rho(q)}(t) V_q^3(t) \in C_*(L_1)$, где $I \in \mathbf{N}(1)$ максимально относительно $\trianglelefteq$, есть собственный вектор оператора $\Gamma^{(1)}$. В частности, гармонические цепи алгебры L_1 размерности $q > 0$ исчерпываются цепями $Z_{\xi(1,q)}(t)$ и $Z_{\xi(2,q)}(t)$.

Доказательство. Из максимальности разбиения I и формулы (30) следует, что $Z_I(t) = \widehat{\varepsilon}_I$. По той же причине формула (34) показывает, что $\widehat{\varepsilon}_I$ — собственный вектор оператора $\Gamma^{(1)}$. $\square$

Замечание 7.9. Для алгебр $L_{-1,0}^{(h)}$ гармонические цепи исчерпываются цепями $e_{-1} \wedge e_0 \wedge e_1$ и e_0 соответственно. Можно показать, что при $k \geq 1$

$$\Gamma_k^{(h \neq 1)} = p + \frac{1}{2} \left((k+1)_h^2 e_0 - e_0^2 - \sum_{r=1}^{k-1} (e_r e_r^* + e_r^* e_r) \right), \quad \text{где } p(e_I) = \frac{\|I\| - (I)_h}{3} e_I,$$

а e_r^* — оператор, сопряженный к присоединенному действию e_r . Отсюда следуют формулы

$$\Gamma_k^{(h \neq 1)} = \begin{cases} p + \frac{1}{2}(e_{-1}e_1 + e_0^2 + e_1e_{-1}), & \text{если } k = -1, \\ p + \frac{1}{2}(e_0^2 + e_0), & \text{если } k = 0, \\ p - \frac{1}{2}(e_0^2 - e_0), & \text{если } k = 1, \\ p - \frac{1}{2}(e_{-1}e_1 + e_0^2 + e_1e_{-1}), & \text{если } k = 2. \end{cases}$$

Из них нетрудно получить спектральные разложения для $\Gamma_k^{(h \neq 1)}$ при $k = -1, 0, 1, 2$. Можно доказать, что цепи $e_1^r(e_2 \wedge e_5 \wedge \dots \wedge e_{3q-1})$, где $r = 0, 1, \dots, 2q$, составляют базис пространства q -мерных гармонических цепей алгебры $L_2^{(h \neq 1)}$, а стабильная фильтрация этой алгебры инвариантна относительно действия $\Gamma_2^{(h \neq 1)}$.

Спектры операторов $\Gamma_k^{(1)}$ при $k \neq 0, 1$ и $\Gamma_k^{(h \neq 1)}$ при $k > 2$ включают сложные иррациональные значения. Но можно надеяться на существование обозримого множества многочленов, параметризованного числами h и k , совокупность корней которых совпадает с этими спектрами. Вероятно, кратности ненулевых собственных значений операторов $\Gamma_k^{(1)}$ конечны при любом $k \geq -1$.

§8. Дополнение: комбинаторное доказательство теоремы 3.6

Построим биективное отображение $S: D_q^{(n)} \rightarrow N_q^{(n)}$. Напомним, что диаграмма разбиения $I = [i_1, \dots, i_q]$ — это множество «вершин» $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, таких, что $1 \leq b \leq q$ и $1 \leq a \leq i_b$. Диагональ разбиения I есть множество вершин, для которых $a + b = q + 1$.

Пусть диагональ разбиения I содержит r вершин. Пронумеруем их снизу вверх. Обозначим через x_i число вершин диаграммы, лежащих в строке справа от i -й вершины диагонали, включая саму эту вершину, а через y_i — число вершин, лежащих в столбце строго ниже i -й вершины. Тогда I можно интерпретировать как пару последовательностей

$$I = (x_1, \dots, x_r \mid y_1, \dots, y_r), \quad \text{где } 1 \leq x_1 < \dots < x_r, 0 \leq y_1 < \dots < y_r.$$

Такая пара соответствует строгому разбиению, если и только если

- (1) $x_{i+1} - x_i \geq 2$ для $i = 1, \dots, r-1$,
- (2) $y_{i+1} - y_i = 1$ или 2 для $i = 1, \dots, r-1$,
- (3) $y_1 = 0$ или 1 ,
- (4) если $x_1 = 1$, то $y_1 = 0$.

Пусть $I = (x_1, \dots, x_r \mid y_1, \dots, y_r) \in D_q^{(n)}$ и $1 \leq a_1 < \dots < a_s \leq r$ — все числа, для которых $y_{a_k} - y_{a_k-1} = 2$ (по определению $y_0 = -1$). Положим $S(I) = [\tilde{I}; \tilde{J}]$, где

$$\tilde{I} = [x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r], \quad \tilde{J} = [x_{a_1} + y_{a_1}, \dots, x_{a_s} + y_{a_s}].$$

Поскольку $s = q - r$, из условий (1)–(4) следует, что $S(I) \in \mathcal{N}_q^{(n)}$.

Определим отображение $S^{-1}: \mathbf{N}_q^{(n)} \rightarrow D_q^{(n)}$. Пусть $[I; J] \in \mathbf{N}_q^{(n)}$, где $I = [i_1, \dots, i_{|I|}]$. Положим $S^{-1}[I; J] = (x_1, \dots, x_{|I|} \mid y_1, \dots, y_{|J|})$, где

$$y_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } i_1 \notin J, \\ 1, & \text{если } i_1 \in J, \end{cases} \quad y_a = \begin{cases} y_{a-1} + 1, & \text{если } i_a \notin J, \\ y_{a-1} + 2, & \text{если } i_a \in J, \end{cases} \quad 2 \leq a \leq |J|,$$

и $x_a = i_a - y_a$. Очевидно, что $|S^{-1}[I; J]| = y_{|J|} + 1 = |I| + |J| = q$. Поэтому $S^{-1}[I; J] \in D_q^{(n)}$. Из определений следует, что S и S^{-1} взаимно обратны. Теорема 3.6 доказана.

Например, для разбиения $I = [2, 3, 5, 6, 8, 9] = (2, 4, 7, 9 \mid 0, 2, 4, 5)$ с диаграммой

частями разбиения $S(I)$ являются количества вершин, соединенных сплошными линиями. Такая часть отмечается, если нижняя вершина диаграммы, ей соответствующая, лежит ниже диагонали и в строке справа от нее нет других вершин. Поэтому $S[2, 3, 5, 6, 8, 9] = [2, \underline{6}, \underline{11}, 14]$.

Замечание 8.1. Используя лемму 3.10 и полученную комбинаторную интерпретацию тождества Сильвестра, можно доказать следующее его обобщение:

$$\prod_{i=k}^{\infty} (1 + tx^i) = 1 + tx^k \frac{1 + tx^{k+1}}{1 - x} + \sum_{l=2}^{\infty} t^l x^{kl+3l(l-1)/2} \frac{(1 + tx^k) \cdots (1 + tx^{l+k-2})(1 + tx^{2l+k-1})}{(1 - x) \cdots (1 - x^{l-1})(1 - x^l)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ф. В. Вайнштейн, *Фильтрующие базисы, когомологии бесконечномерных алгебр Ли и операторы Лапласа*, Функц. анализ и его прил., **19:4** (1985), 11–22.
- [2] И. М. Гельфанд, Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли и операторы Лапласа*, Функц. анализ и его прил., **12:4** (1978), 1–5.
- [3] Л. В. Гончарова, *Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой*, Функц. анализ и его прил., **7:2** (1973), 6–14; **7:3** (1973), 33–44.
- [4] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [5] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [6] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, *Гомологии алгебр Ли векторных полей на прямой*, Функц. анализ и его прил., **14:3** (1980), 45–60.

- [7] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, М., Наука, 1984.
- [8] B. L. Feigin, D. B. Fuchs, *Verma modules over the Virasoro algebra*, in: *Topology* (Leningrad, 1982), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1060, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 230–245.
- [9] B. L. Feigin, D. B. Fuchs, V. S. Retakh, *Massey operations in the cohomology of the infinite-dimensional Lie algebra L_1* , in: *Topology and geometry—Rohlin Seminar*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1346, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 13–31.
- [10] I. M. Gelfand, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras: some questions of integral geometry*, in: *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 95–111.
- [11] Sh. Kumar, *Kac–Moody groups, their flag varieties and representation theory*, *Progress in Math.*, vol. 204, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.
- [12] A. Rocha-Caridi, N. R. Wallach, *Characters of irreducible representations of the Lie algebra of vector fields on the circle*, *Invent. Math.*, **72**:1 (1983), 57–75.
- [13] J. J. Sylvester, F. Franklin, *A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion*, *Amer. J. Math.*, **5**:1–4 (1882), 251–330.
- [14] F. V. Weinstein, *Filtering bases: a tool to compute cohomologies of abstract subalgebras of the Witt algebra*, in: *Unconventional Lie algebras*, *Adv. Soviet Math.*, vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 155–216.

Universität Bern, Institut für Anatomie
e-mail: Weinstein@ana.unibe.ch

Поступило в редакцию
23 февраля 2008 г.