Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Асимптотика интегрального ядра и
регуляризованный след диффузионной полугрупп,
Функци. анализ и его прил., 2010, том 44, вы-
пуск 1, 90–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2975>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:59:55

Ключевым моментом доказательств является теорема 2 настоящей заметки. Так, в условиях теоремы 6 из теоремы 2 следует, что в обоих случаях мы приходим к нижним треугольным операторным матрицам (плюс-операторов A), на главных диагоналях которых стоят, в некотором порядке, единичный и равномерно положительный операторы. Отсюда, согласно леммам 2 и 3 из [3], следует, что отображения $\mathcal{F}_A$ обладают КЕ-свойством.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Khatskevich, S. Reich, D. Shoikhet, *Nonlinear Anal.*, **47**:6 (2001), 3977–3988.
 [2] V. Khatskevich, S. Reich, D. Shoikhet, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **69**:1–2 (2003), 67–98.
 [3] В. Хацкевич, В. Сендеров, *ДАН*, **403**:5 (2005), 607–609.
 [4] M. Elin, V. Khatskevich, in: *Contemp. Math.*, vol. 382, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 113–120.
 [5] M. Elin, V. Khatskevich, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **6**:1 (2005), 173–185.
 [6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы, т. 1, Общая теория*, Мир, М., 1962.
 [7] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
 [8] В. А. Хацкевич, В. А. Сендеров, *Докл. РАН*, **379**:4 (2001), 455–458.
 [9] V. Khatskevich, V. Senderov, *Funct. Different. Equ.*, **10**:1/2 (2003), 239–258.
 [10] V. Khatskevich, V. Senderov, in: *Fields Inst. Commun.*, vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 331–344.
 [11] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Van Nostrand Co., Princeton, NJ–Toronto, Ont.–London, 1967.

email: jsadovskaya@mail.ru
 International College of Technology, ORT Braude
 e-mail: victor_kh@hotmail.com

Поступило в редакцию
 22 мая 2008 г.

УДК 517.9

Асимптотика интегрального ядра и регуляризованный след диффузионной полугруппы

© 2010. С. А. СТЕПИН

Представление диффузионного ядра $p_V(x, y, t)$ — фундаментального решения уравнения $\partial_t u = (\Delta/2 + V(x))u$ — в виде континуального (винеровского) интеграла дает способ нахождения коэффициентов асимптотического разложения

$$p_V(x, y, t) \sim p_0(x, y, t) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, y) t^n \right\}, \quad t \downarrow 0. \quad (1)$$

Процедура их вычисления сводится к интегрированию с весом потенциала V и его частных производных по отрезку, соединяющему x и y , и подсчету моментов $E_\kappa(s_1, \dots, s_m)$ гауссовской меры вида

$$(2\pi)^{-m/2} (\det a_{ij})^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} x_1^{\kappa_1} \dots x_m^{\kappa_m} \exp \left(-\frac{1}{2} a^{ij} x_i x_j \right) dx_1 \dots dx_m,$$

где $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ — мультииндекс, $a_{ij} = \min\{s_i, s_j\} - s_i s_j$ и a^{ij} — элементы матрицы, обратной к a_{ij} . Интегральное представление ядра p_V применяется

здесь также для получения двусторонних оценок регуляризованного следа соответствующей эволюционной полугруппы.

Задача построения асимптотического разложения фундаментального решения параболического уравнения диффузионного типа при $t \downarrow 0$ тесно связана с аналогичным вопросом для функции Грина ассоциированного гиперболического (волнового) уравнения, а также с коротковолновой асимптотикой ядра резольвенты соответствующего эллиптического оператора. Первый результат такого типа восходит к Адамару [1], чья конструкция параметрикса дает рекуррентную процедуру вычисления коэффициентов разложения фундаментального решения гиперболического уравнения в ряд по степени гладкости. Дальнейшие результаты в этой области были получены в [2]–[8]; здесь отмечены лишь публикации, напрямую связанные с предметом настоящей работы. Размеры данной заметки не позволяют остановиться в ней подробнее на литературе по маловременным асимптотикам для параболической задачи (этому вопросу будет посвящена отдельная работа, которая готовится к печати).

Отметим связанную с обоими аспектами, рассмотренными в настоящей заметке, недавнюю публикацию [9], в которой можно найти комментарии по истории вопроса и литературные указания. Обстоятельный обзор современного состояния теории регуляризованных следов содержится в [10], где имеется подробная библиография.

1. Параметрикс и формула Фейнмана–Каца. В случае ограниченности и непрерывности потенциала V фундаментальное решение $p_V(x, y, t)$ представляет собой интегральное ядро квазиограниченной операторной полугруппы $\exp(tH_V)$, где $H_V = \Delta/2 + V(x)$, для которого имеет место формула Фейнмана–Каца

$$p_V(x, y, t) = \int \exp \left(\int_0^t V(\omega(s)) ds \right) d\mu_{x,y}^t(\omega). \quad (2)$$

Здесь $\omega(s)$ — параметризация пути, соединяющего точки $\omega(0) = x$ и $\omega(t) = y$, а интеграл берется по всем таким путям относительно соответствующей (условно) меры Винера $\mu_{x,y}^t$.

Наряду с формулой (2) для ядра $p_V(x, y, t)$ имеется так называемое представление параметрикса, которое получается при решении уравнения

$$e^{tH_V} = e^{tH_0} + \int_0^t e^{sH_0} V e^{(t-s)H_V} ds$$

методом итераций. Заметим, что представление параметрикса и формула Фейнмана–Каца выводятся одно из другого разложением в ряд экспоненты из (2) с последующим почленным интегрированием; такой способ вывода формулы Фейнмана–Каца распространяет ее на случай комплексных потенциалов.

Предлагаемый способ нахождения нерекуррентных формул для коэффициентов $c_n(x, y)$ основывается на представлении ядра $p_V(x, y, t)$, которое занимает промежуточное положение между формулой (2) и разложением параметрикса и получается, в предположении ограниченности потенциала, в процессе преобразования одного из них в другое.

Теорема 1. В случае комплекснозначного потенциала $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ коэффициенты асимптотического разложения (1) вычисляются по формулам

$$c_n(x, y) = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=\kappa \\ |\kappa|=2(n-m)}} \int_0^1 \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\beta_1} \partial_{x_3}^{\gamma_1} V(\xi(s_1)) ds_1 \int_0^{s_1} \partial_{x_1}^{\alpha_2} \partial_{x_2}^{\beta_2} \partial_{x_3}^{\gamma_2} V(\xi(s_2)) ds_2 \\ \dots \int_0^{s_{m-1}} \partial_{x_1}^{\alpha_m} \partial_{x_2}^{\beta_m} \partial_{x_3}^{\gamma_m} V(\xi(s_m)) \Phi_{\alpha\beta\gamma}(s_1, \dots, s_m) ds_m,$$

где $\xi(s) = x + (y - x)s$, а вес $\Phi_{\alpha\beta\gamma}(s_1, \dots, s_m)$ задается выражением

$$\left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j! \beta_j! \gamma_j!} \right) E_\alpha(s_1, \dots, s_m) E_\beta(s_1, \dots, s_m) E_\gamma(s_1, \dots, s_m).$$

Сформулированный результат распространяется на случай пространства любой размерности и потенциального возмущения генератора произвольного диффузионного процесса. Отметим, что нереккурентные формулы для локальных инвариантов исходного уравнения диффузионного типа были получены в [13], где использовались результаты из [3].

2. Схема доказательства теоремы 1. Мера $\mu_{x,y}^t$ сосредоточена на броуновских траекториях $\omega(s)$, выходящих из $x = \omega(0)$ и приходящих в $y = \omega(t)$, представляющих собой реализации трехмерного винеровского процесса

$$\omega(s) = \left(1 - \frac{s}{t}\right)x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}b\left(\frac{s}{t}\right),$$

где $b(\tau) = (b_1(\tau), b_2(\tau), b_3(\tau))$ — так называемый «броуновский мост», компоненты которого суть реализации независимых гауссовских процессов с нулевым средним и ковариацией $\text{cov}\{b_i(s), b_j(t)\} = (\min\{s, t\} - st)\delta_{ij}$. В соответствии с этим формула (2) принимает (см. [11]) вид

$$p_V(x, y, t) = p_0(x, y, t) \mathbb{E} \left(\exp \left(t \int_0^1 V(\xi(s) + \sqrt{t}b(s)) ds \right) \right),$$

где $\mathbb{E}$ — математическое ожидание, отвечающее процессу $b(\tau)$. Построение асимптотического представления (1) сводится, таким образом, к разложению аргумента функционала $\mathbb{E}$ по степеням t и последующему вычислению математических ожиданий от соответствующих коэффициентов (ср. [4], [5] и [12]). При этом для первого нетривиального слагаемого имеем

$$\int_0^1 \mathbb{E}(V(\xi(s) + \sqrt{t}b(s))) ds \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m/2}}{m!} \int_0^1 \mathbb{E}(\langle b(s) \nabla \rangle^m V(\xi(s))) ds,$$

а учитывая, что $\mathbb{E}(\langle b(s) \nabla \rangle^{2n-1} V(\xi(s))) = 0$, получаем асимптотическую формулу

$$\int_0^1 \mathbb{E}(V(\xi(s) + \sqrt{t}b(s))) ds \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(2n)!!} \int_0^1 \Delta^n V(\xi(s)) (s(1-s))^n ds.$$

Аналогично преобразуются следующие слагаемые:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} \mathbb{E} \left(\left(\int_0^1 V(\xi(s) + \sqrt{t} b(s)) ds \right)^m \right) \\ &= \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{m-1}} \mathbb{E}(V(\xi(s_1) + \sqrt{t} b(s_1)) \cdots V(\xi(s_m) + \sqrt{t} b(s_m))) ds_m, \end{aligned}$$

где сомножители $V(\xi(s_j) + \sqrt{t} b(s_j))$ ввиду равномерной по $s \in [0, 1]$ оценки $\mathbb{P}\{|b(s)| > |\ln t|\} = O(|\ln t| \exp(-\ln^2 t))$ можно заменить их тейлоровскими разложениями при $t \downarrow 0$. С учетом равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_1! \cdots \kappa_m!} \mathbb{E}(\langle b(s_1) \nabla \rangle^{\kappa_1} V(\xi(s_1)) \cdots \langle b(s_m) \nabla \rangle^{\kappa_m} V(\xi(s_m))) \\ &= \sum_{\kappa_j = \alpha_j + \beta_j + \gamma_j} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\beta_1} \partial_{x_3}^{\gamma_1} V(\xi(s_1)) \cdots \partial_{x_1}^{\alpha_m} \partial_{x_2}^{\beta_m} \partial_{x_3}^{\gamma_m} V(\xi(s_m)) \Phi_{\alpha\beta\gamma}(s_1, \dots, s_m) \end{aligned}$$

закключаем, что коэффициент $c_n^{(m)}$ при t^{n-m} в разложении рассматриваемого выражения по степеням t имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{|\kappa|=2(n-m)} \sum_{\kappa_j = \alpha_j + \beta_j + \gamma_j} \int_0^1 \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\beta_1} \partial_{x_3}^{\gamma_1} V(\xi(s_1)) ds_1 \int_0^{s_1} \partial_{x_1}^{\alpha_2} \partial_{x_2}^{\beta_2} \partial_{x_3}^{\gamma_2} V(\xi(s_2)) ds_2 \\ & \quad \cdots \int_0^{s_{m-1}} \partial_{x_1}^{\alpha_m} \partial_{x_2}^{\beta_m} \partial_{x_3}^{\gamma_m} V(\xi(s_m)) \Phi_{\alpha\beta\gamma}(s_1, \dots, s_m) ds_m; \end{aligned}$$

так, например,

$$\begin{aligned} c_n^{(n-1)} &= \frac{1}{2(n-2)!} \left(\int_0^1 V(\xi(s)) ds \right)^{n-2} \int_0^1 \Delta V(\xi(s)) s(1-s) ds \\ &+ \frac{1}{(n-3)!} \left(\int_0^1 V(\xi(s)) ds \right)^{n-3} \int_0^1 \langle \nabla V(\xi(s_1)) \int_0^{s_1} \nabla V(\xi(s_2)) s_2 ds_2 \rangle (1-s_1) ds_1. \end{aligned}$$

Наконец, искомые коэффициенты $c_n = c_n(x, y)$ вычисляются по формуле $c_n = c_n^{(1)} + \cdots + c_n^{(n)}$, которая при $n = 4$ дает

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{48} \int_0^1 \Delta^3 V(\xi(s)) (s(1-s))^3 ds + \frac{1}{24} \left(\int_0^1 V(\xi(s)) ds \right)^4 \\ &+ \frac{1}{8} \left\{ \int_0^1 \Delta^2 V(\xi(s)) (s(1-s))^2 ds \int_0^1 V(\xi(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^1 \Delta V(\xi(s)) s(1-s) ds \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \langle \nabla(\Delta V)(\xi(t)) \int_0^t \nabla V(\xi(s)) s ds \rangle t(1-t)^2 dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \langle \nabla V(\xi(s)) \int_0^s \nabla(\Delta V)(\xi(t)) t^2(1-t) dt \rangle (1-s) ds \right\} \\
& + \frac{1}{4} \left(\int_0^1 V(\xi(s)) ds \right)^2 \int_0^1 \Delta V(\xi(s)) s(1-s) ds \\
& + \int_0^1 V(\xi(s)) ds \int_0^1 \langle \nabla V(\xi(t)) \int_0^t \nabla V(\xi(s)) s ds \rangle (1-t) dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_0^t \text{Tr}\{V''_{xx}(\xi(t)) \cdot V''_{xx}(\xi(s))\} s^2 ds.
\end{aligned}$$

3. Оценки регуляризованного следа. Здесь, как и выше, для простоты рассматривается случай трехмерного оператора Шрёдингера. Известно, что при условии суммируемости потенциала операторы H_V и H_0 являются резольвентно сравнимыми. Особую трудность в этом контексте представляет вопрос об обосновании асимптотики следа разности резольвент на спектре, который (в связи с выводом формул следов) впервые изучался в [2]. В работе [9] предложен основанный на предварительном изучении высокоэнергетической асимптотики матрицы рассеяния обходной путь решения этой задачи, на который обратил внимание автора один из рецензентов.

В случае резольвентно сравнимых операторов H_V и H_0 ядерность разности экспонент $\exp(tH_V)$ и $\exp(tH_0)$ и свойства соответствующего следа устанавливаются через посредство преобразования Лапласа разности соответствующих резольвент. В работе [8] формула Бирмана–Крейна (см. [14]) и представление типа (2) применялись для вычисления коэффициентов асимптотического разложения следа $\text{Tr}(e^{tH_V} - e^{tH_0})$ при $t \downarrow 0$. В предположении суперэкспоненциального убывания потенциала V на бесконечности при условии отсутствия связанных состояний и спектральной особенности в нуле в работе [15] установлено неравенство

$$|\text{Tr}(e^{tH_V} - e^{tH_0})| \leq C(V)t^{-1/2}. \quad (3)$$

Сформулированное ниже предложение дополняет и усиливает эту оценку, а также показывает, насколько она точна.

Теорема 2. Пусть вещественный потенциал $V \in L^1(\mathbb{R}^3)$ непрерывен и ограничен. Тогда оператор $\exp(tH_V) - \exp(tH_0)$ ядерный и имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (\exp(tV(x)) - 1) dx & \geq (2\pi t)^{3/2} \text{Tr}(e^{tH_V} - e^{tH_0}) \\
& \geq \int_{\mathbb{R}^3} dx \left\{ \exp \left(t \int_{\mathbb{R}^3} V(x + \sqrt{t}\xi) \varphi(|\xi|) d\xi \right) - 1 \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\varphi(\tau) = \int_0^1 (2\pi s(1-s))^{-3/2} \exp \left(-\frac{\tau^2}{2s(1-s)} \right) ds.$$

Ввиду непрерывности ядра $p_V(x, y, t)$, рассматриваемый регуляризованный след совпадает с интегралом

$$\int_{\mathbb{R}^3} (p_V(x, x, t) - p_0(x, x, t)) dx$$

и, таким образом, согласно формуле Фейнмана–Каца,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(e^{tH_V} - e^{tH_0}) &= \int_{\mathbb{R}^3} dx \int \left\{ \exp \left(\int_0^t V(\omega(s)) ds \right) - 1 \right\} d\mu_{x,x}^t(\omega) \\ &= (2\pi t)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E} \left(\exp \left(t \int_0^1 V(x + \sqrt{t} b(s)) ds \right) - 1 \right) dx. \end{aligned}$$

Здесь в силу неравенства Йенсена имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(e^{tH_V} - e^{tH_0}) &\leq (2\pi t)^{-3/2} \mathbb{E} \left(\int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^3} (\exp(tV(x + \sqrt{t} b(s))) - 1) dx \right) \\ &= (2\pi t)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} (\exp(tV(x)) - 1) dx. \end{aligned}$$

Прием, основанный на неравенстве выпуклости, применялся ранее [16] в задаче об оценке сверху числа связанных состояний оператора Шрёдингера.

Для получения оценки снизу регуляризованного следа также воспользуемся неравенством Йенсена:

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(t \int_0^1 V(x + \sqrt{t} b(s)) ds \right) \right) \geq \exp \left(t \int_0^1 \mathbb{E}(V(x + \sqrt{t} b(s))) ds \right),$$

где

$$\mathbb{E}(V(x + \sqrt{t} b(s))) = (2\pi s(1-s))^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x + \sqrt{t} \xi) \exp \left(-\frac{|\xi|^2}{2s(1-s)} \right) d\xi.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (2\pi t)^{3/2} \mathrm{Tr}(e^{tH_V} - e^{tH_0}) &\geq \int_{\mathbb{R}^3} dx \left\{ \exp \left(t \int_0^1 \frac{ds}{(2\pi s(1-s))^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} V(x + \sqrt{t} \xi) \exp \left(-\frac{|\xi|^2}{2s(1-s)} \right) d\xi \right) - 1 \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \exp \left(t \int_{\mathbb{R}^3} V(x + \sqrt{t} \xi) \varphi(|\xi|) d\xi \right) - 1 \right\} dx \geq t \int_{\mathbb{R}^3} V(x) dx. \end{aligned}$$

Последнее неравенство (ср. [17]) устанавливает точность (по порядку) оценки (3) в случае, когда $\int_{\mathbb{R}^3} V(x) dx > 0$. С другой стороны, оно же распространяет (3) на класс отрицательных потенциалов $V \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Применительно к таким потенциалам двусторонняя оценка из теоремы 2 указывает на точность верхней границы убывания регуляризованного следа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Dover Publ., New York, 1952. [2] В. С. Буслаев, Проблемы матем. физ., 1966, № 1, 82–101. [3] S. Agmon, Y. Kannai, Israel J. Math., 5 (1967), 1–30. [4] А. А. Арсеньев, Журнал выч. матем. и матем. физ., 7:6 (1967), 1298–1319. [5] В. С. Буслаев, Проблемы

матем. физ., 1967, № 2, 85–107. [6] В. М. Бабич, Ю. О. Рапопорт, Проблемы матем. физ., 1974, № 7, 21–38. [7] Y. Kannai, Commun. Partial Differ. Equations, **2**:8 (1977), 781–830. [8] Y. Colin de Verdiere, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), **14**:1 (1981), 27–39. [9] Д. Р. Яфаев, Функц. анализ и его прил., **41**:3 (2007), 60–83. [10] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, УМН, **61**:5 (2006), 89–156. [11] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York–London, 1979. [12] С. А. Молчанов, УМН, **30**:1 (1975), 3–59. [13] M. Hitrik, I. Polterovich, J. London Math. Soc., **68**:2 (2003), 402–418. [14] М. Ш. Бирман, М. Г. Крейн, ДАН СССР, **144**:3 (1962), 475–478. [15] A. Sá Barreto, M. Zworski, Comm. Pure Appl. Math., **49** (1996), 1271–1280. [16] E. Lieb, Bull. Amer. Math. Soc., **82**:5 (1976), 751–753. [17] М. Ш. Бирман, В. А. Слоущ, Функц. анализ и его прил., **43**:3 (2009), 26–32.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
University of Białystok
e-mail: astepina@inbox.ru

Поступило в редакцию
6 февраля 2008 г.
В переработанном виде
5 декабря 2008 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 23.12.2009. Подписано к печати 28.01.2010. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 2,0 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 245 экз. Заказ 974.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6