Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич, Проблема Кёнигса
и крайние неподвижные точки, *Функц. анализ и
его прил.*, 2010, том 44, выпуск 1, 87–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2976>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:18:37

Условие 1) означает, что отображение T является взаимно однозначным и поэтому существует обратное отображение T^{-1} , определенное на области значений отображения T . Условие 2) означает, что область определения обратного отображения T^{-1} содержит конус K (может быть, совпадая с ним). Условие 3) означает, что обратное отображение T^{-1} является монотонным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, М., 1970. [2] Ю. В. Трубников, А. И. Перов, *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*, Наука и техника, Минск, 1986. [3] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960. [4] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1967. [5] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматлит, М., 1962. [6] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962. [7] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1977. [8] P. P. Zabrejko, *Collect. Math.*, **48**:4–6 (1997), 825–859. [9] Л. Коллатц, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, Мир, М., 1969. [10] Дж. Ортега, В. Рейнболдт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М., 1975. [11] А. И. Перов, Обобщенный принцип сжимающих отображений, *Вестник ВГУ*, 2005, № 1, 196–207.

Воронежский госуниверситет
e-mail: perov@nosc.vsu.ru

Поступило в редакцию
30 января 2008 г.

УДК 517.432+517.515+515.958

Проблема Кёнигса и крайние неподвижные точки

© 2010. В. А. СЕНДЕРОВ, В. А. ХАЦКЕВИЧ

Проблема вложения Кёнигса (КЕ-проблема), возникшая в работах Г. Кёнигса, П. Леви и Ж. Адамара в связи с решением различных прикладных задач, имеет более чем вековую историю. Общая формулировка этой проблемы такова. Пусть D — область комплексного банахова пространства и $f \in \text{Hol}(D)$. Существует ли семейство $\{F(t)\}_{t \geq 0} \subset \text{Hol}(D)$, непрерывно (в топологии локально равномерной сходимости над D) зависящее от t и такое, что $F(0) = I$, $F(1) = f$ и $F(s+t) = F(s) \circ F(t)$ при всех $s, t \geq 0$?

Если семейство $\{F(t)\}_{t \geq 0}$ существует, то говорят, что f обладает КЕ-свойством.

В последние годы появились новые работы, относящиеся к КЕ-проблеме и к ее приложениям. Так, в [1]–[5] рассматривался случай, когда D — единичный открытый шар пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, а f — порождаемое (плюс-)оператором A по формуле (1) (см. ниже) преобразование шара D . Этот же случай рассматривается и в данной работе.

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ — комплексное индефинитное ($\min\{\dim \mathfrak{H}_1, \dim \mathfrak{H}_2\} > 0$) пространство Крейна и A — оператор с блок-матрицей $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Пусть

$D = \mathcal{K}$ — открытый единичный шар пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$. Формула

$$\mathcal{F}_A(K) = (A_{21} + A_{22}K)(A_{11} + A_{12}K)^{-1}, \quad (1)$$

где $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и $A_{ij} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_j, \mathfrak{H}_i)$ при $i, j = 1, 2$, определяет в $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ дробно-линейное отображение (д.л.о.) $\mathcal{F}_A$.

Обозначение $\mathcal{F}_A$ мы будем, как правило, сохранять и за естественными сужениями рассматриваемого отображения.

Ниже мы без специальных оговорок будем использовать определения из функционального анализа и теории пространств с индефинитной метрикой (см. фундаментальные монографии [6] и [7]). В частности, всюду определенный линейный ограниченный оператор T в $\mathfrak{H}$ мы будем называть плюс-оператором, если $[x, x] \geq 0$ влечет за собой $[Tx, Tx] \geq 0$. Плюс-оператор T называется строгим, если $\inf_{[x, x]=1} [Tx, Tx] > 0$, и бистрогим, если при этом T^* — также строгий плюс-оператор. Далее, оператор A с блок-матрицей $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ мы будем, в соответствии с терминологией работ [8]–[10], называть верхним треугольным, если $A_{21} = 0$, и нижним треугольным, если $A_{12} = 0$.

Напомним, что крайними точками единичного шара пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ являются максимальные частичные изометрии, т. е. изометрии $(C : C^*C = I)$ и коизометрии $(C : CC^* = I)$ [11, гл. XIII, п. 99].

Пусть плюс-оператор A определяет аффинное отображение $\mathcal{F}_A$,

$$\mathcal{F}_A(K) = (A_{21} + A_{22}K)A_{11}^{-1}, \quad (2)$$

открытого шара $\mathcal{K}$ в себя. Очевидно, что $\mathcal{F}_A(\overline{\mathcal{K}}) \subseteq \overline{\mathcal{K}}$; кроме того, д.л.о. $\mathcal{F}_A : \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$ непрерывно в слабой операторной топологии. Поскольку, помимо этого, непустое выпуклое множество $\overline{\mathcal{K}}$ в этой топологии компактно, то по теореме Шаудера–Тихонова–Гликсберга (см., например, [7, гл. III, теорема 3.6]) отображение $\mathcal{F}_A$ имеет в $\overline{\mathcal{K}}$ хотя бы одну неподвижную точку.

Пусть C — неподвижная точка д.л.о. $\mathcal{F}_A$ вида (2). Тогда $A_{21} + A_{22}C = CA_{11}$, или $A_{21} = CA_{11} - A_{22}C$. Подставляя последнее равенство в (2), получаем

$$\mathcal{F}_A(K) = A_{22}(K - C)A_{11}^{-1} + C, \quad (3)$$

где $K \in \mathcal{K}$.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{F}_A : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ — д.л.о. вида либо

1) $\mathcal{F}_A(K) = A_{22}(K - C) + C$, где $K \in \mathcal{K}$, C — коизометрия, либо

2) $\mathcal{F}_A(K) = (K - C)A_{11}^{-1} + C$, где $K \in \mathcal{K}$, C — изометрия.

Тогда $\sigma_p(A_{22}) \subseteq (0, 1]$ в случае 1), $\sigma_p(A_{11}^{-1}) \subseteq (0, 1]$ в случае 2).

Теорема 2. В условиях леммы 1 мы имеем $A_{22} = \alpha I$, где $\alpha \in (0, 1]$, в случае 1) и $A_{11}^{-1} = \alpha I$, где $\alpha \in (0, 1]$, в случае 2).

Доказательство для случая 1. Нетрудно доказать, что

$$(A_{22}x, x) \neq 0 \quad \text{при } x \neq 0. \quad (*)$$

Пусть $\mathcal{P} : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2'$ — произвольный двумерный ортопроектор. Достаточно доказать, что $\mathcal{P}A_{22}\mathcal{P} = \alpha I$. Пусть для некоторого $B = \mathcal{P}A_{22}\mathcal{P}$ это не так. Выберем в $\mathfrak{H}_2'$ ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$, векторы которого не являются собственными для B . Из (*) следует, что все элементы матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \tau \end{pmatrix}$

оператора B в этом базисе ненулевые. Из (*) следует также, что $\alpha\tau - \gamma\beta \neq 0$. Определим оператор $\widehat{K} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_2)$ соотношениями $\widehat{K}e_1 = xe_1 + ze_2$, где $1 > x > (|\alpha|^2 - |\gamma|^2)/(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)$, $z = \alpha(1-x)/\gamma$, $\widehat{K}(e_1^\perp) = \{0\}$. Так как $|x|^2 + |z|^2 < 1$, то $\|\widehat{K}\| < 1$. Пусть $a = (A_{22}(\widehat{K} - I) + I)e_1$. Тогда $a = e_1 + (\beta x + \tau z - \beta)e_2$, поскольку

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta x + \tau z \end{pmatrix}.$$

Так как $\alpha\tau \neq \gamma\beta$, то $\beta x + \tau z - \beta \neq 0$.

Таким образом, $\|a\| > 1$, $\|\mathcal{F}_A(\widehat{K}C)\| > 1$. Противоречие.

Замечание 3. Как показывают примеры, заменить коизометрию либо изометрию в теореме 2 произвольным линейным оператором с нормой 1 нельзя. С другой стороны, пусть $\mathcal{F}_A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — аффинное д.л.о. вида

$$\mathcal{F}_A(K) = \alpha(K - C) + C, \quad (4)$$

где $K \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\|C\| = 1$. Тогда $\alpha \in (0, 1]$.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{F}_A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — аффинное д.л.о. вида (3), где $K \in \mathcal{H}$, C — унитарный оператор, и пусть либо 1) A_{11} , либо 2) A_{22} — унитарный оператор. Тогда $A_{22} = \alpha C A_{11} C^{-1}$, где $\alpha \in (0, 1]$.

Доказательство. опирающееся на теорему 2, в случае 1) получается с помощью рассмотрения ψ , такого, что

$$\psi(K) = C A_{11}^{-1} C^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1} + A_{22} K),$$

а в случае 2) — с помощью рассмотрения ψ , такого, что

$$\psi(K) = (K A_{11}^{-1} + C - A_{22} C A_{11}^{-1}) C^{-1} A_{22} C,$$

— аффинных д.л.о., переводящих $\mathcal{H}$ в себя и удовлетворяющих условиям 1) и 2) леммы 1 соответственно.

Теорема 5. Пусть верхний треугольный плюс-оператор A , такой, что $0 \in \rho(A_{11})$, определяет на некотором подмножестве пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ д.л.о. $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_A(C) = C$, где C — унитарный оператор, и пусть хотя бы один из операторов A_{11} и A_{22} унитарен. Тогда $A_{22} = \alpha C A_{11} C^{-1}$, где $\alpha \in (0, 1]$.

Доказательство получается с помощью теоремы 4.

Из теорем 2, 4 и 5 и замечания 3 настоящей заметки с помощью предложений из [3] получаются наши основные утверждения:

Теорема 6. Пусть $\mathcal{F}_A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — аффинное д.л.о. вида (3), где $K \in \mathcal{H}$ и либо $A_{11} = I$ и C — коизометрия, либо $A_{22} = I$ и C — изометрия.

Тогда отображение $\mathcal{F}_A$ обладает КЕ-свойством.

Теорема 7. Всякое отображение $\mathcal{F}_A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ вида (4) обладает КЕ-свойством.

Теорема 8. Пусть верхний треугольный плюс-оператор A , такой, что $0 \in \rho(A_{11})$, определяет на некотором подмножестве пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ д.л.о. $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_A(C) = C$, где C — унитарный оператор, и пусть хотя бы один из операторов A_{11} и A_{22} единичный. Тогда $\mathcal{F}_A|_{\mathcal{H}}$ отображает $\mathcal{H}$ в себя и обладает КЕ-свойством.

Ключевым моментом доказательств является теорема 2 настоящей заметки. Так, в условиях теоремы 6 из теоремы 2 следует, что в обоих случаях мы приходим к нижним треугольным операторным матрицам (плюс-операторов A), на главных диагоналях которых стоят, в некотором порядке, единичный и равномерно положительный операторы. Отсюда, согласно леммам 2 и 3 из [3], следует, что отображения $\mathcal{F}_A$ обладают КЕ-свойством.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Khatskevich, S. Reich, D. Shoikhet, *Nonlinear Anal.*, **47**:6 (2001), 3977–3988.
 [2] V. Khatskevich, S. Reich, D. Shoikhet, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **69**:1–2 (2003), 67–98. [3] В. Хацкевич, В. Сендеров, ДАН, **403**:5 (2005), 607–609. [4] М. Елин, V. Khatskevich, in: *Contemp. Math.*, vol. 382, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 113–120. [5] М. Елин, V. Khatskevich, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **6**:1 (2005), 173–185.
 [6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы, т. 1, Общая теория*, Мир, М., 1962. [7] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986. [8] В. А. Хацкевич, В. А. Сендеров, Докл. РАН, **379**:4 (2001), 455–458. [9] V. Khatskevich, V. Senderov, *Funct. Different. Equ.*, **10**:1/2 (2003), 239–258. [10] V. Khatskevich, V. Senderov, in: *Fields Inst. Commun.*, vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 331–344. [11] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Van Nostrand Co., Princeton, NJ–Toronto, Ont.–London, 1967.

email: jsadovskaya@mail.ru
 International College of Technology, ORT Braude
 e-mail: victor_kh@hotmail.com

Поступило в редакцию
 22 мая 2008 г.

УДК 517.9

Асимптотика интегрального ядра и регуляризованный след диффузионной полугруппы

© 2010. С. А. СТЕПИН

Представление диффузионного ядра $p_V(x, y, t)$ — фундаментального решения уравнения $\partial_t u = (\Delta/2 + V(x))u$ — в виде континуального (винеровского) интеграла дает способ нахождения коэффициентов асимптотического разложения

$$p_V(x, y, t) \sim p_0(x, y, t) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, y) t^n \right\}, \quad t \downarrow 0. \quad (1)$$

Процедура их вычисления сводится к интегрированию с весом потенциала V и его частных производных по отрезку, соединяющему x и y , и подсчету моментов $E_\kappa(s_1, \dots, s_m)$ гауссовской меры вида

$$(2\pi)^{-m/2} (\det a_{ij})^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} x_1^{\kappa_1} \dots x_m^{\kappa_m} \exp \left(-\frac{1}{2} a^{ij} x_i x_j \right) dx_1 \dots dx_m,$$

где $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ — мультииндекс, $a_{ij} = \min\{s_i, s_j\} - s_i s_j$ и a^{ij} — элементы матрицы, обратной к a_{ij} . Интегральное представление ядра p_V применяется