Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бичегкуев, О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 1, 80–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2978>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:52:42

О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах*

© 2010. М. С. Бичегкуев

1. Пусть X — комплексное банахово пространство и $LB(X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Рассматривается функция (вес или весовая функция) $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow (0, \infty)$, определенная на группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. Символом $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство (двусторонних) последовательностей $x: \mathbb{Z} \rightarrow X$ векторов из X , суммируемых с весом α ,

$$\|x\| = \|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)} \right)^p \right)^{1/p},$$

если $p \in [1, \infty)$, и ограниченных относительно α ,

$$\|x\| = \|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)},$$

если $p = \infty$. Если $\alpha \equiv 1$, то пространство $l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X)$ обозначается через $l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$.

Всюду считается, что весовая функция α удовлетворяет условию

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} < \infty. \quad (1)$$

В заметке описан спектр оператора $\mathcal{K}: l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X)$, определенного с помощью равенств

$$(\mathcal{K}x)(n) = Ax(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X),$$

где $A \in LB(X)$, и получены приложения к исследованию дифференциальных операторов, действующих в весовых функциональных пространствах. Основные результаты получены с использованием величин

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}, \\ \mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}, \end{aligned} \quad (2)$$

построенных по весу $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow (0, \infty)$.

Теорема 1. Спектр $\sigma(\mathcal{K})$ оператора $\mathcal{K}$ представим в виде

$$\sigma(\mathcal{K}) = \mathbb{T}\sigma(A)[\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)] = \{\gamma\lambda s : \gamma \in \mathbb{T}, \lambda \in \sigma(A), s \in [\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)]\},$$

где $\mathbb{T} = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\gamma| = 1\}$ — единичная окружность.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00131).

При доказательстве теоремы 1 используется тот факт, что рассмотрение спектра оператора $\mathcal{K}$ в весовом пространстве $l^p_\alpha(\mathbb{Z}, X)$ эквивалентно рассмотрению спектра оператора $\mathcal{K}_\Phi = A\Phi V$ в пространстве $l^p(\mathbb{Z}, X)$ без веса, где $(\Phi x)(n) = \Phi(n)x(n)$, $\Phi(n) = \alpha^{-1}(n)\alpha(n-1)$ и $(Vx)(n) = x(n-1)$. Спектр оператора $\mathcal{K}_\Phi$ инвариантен относительно вращений. Таким образом, его описание сводится к описанию компонент связности — колец. Ключевым шагом доказательства теоремы 1, позволяющим связать эти кольца, является следующая

Лемма. *Если $\sigma(\mathcal{K}_\Phi) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, то проектор Рисса $\mathcal{P}_{\text{int}}$, отвечающий части спектра оператора $\mathcal{K}_\Phi$, лежащей внутри $\mathbb{T}$, имеет вид $(\mathcal{P}_{\text{int}}x)(n) = P_{\text{int}}x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p(\mathbb{Z}, X)$, где $P_{\text{int}}: X \rightarrow X$ — проектор, коммутирующий с оператором A .*

Замечание. Операторы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_\Phi$ являются операторами типа взвешенного сдвига. Исследованию спектра таких операторов посвящена обширная литература (см., например, [1] и цитируемые там источники). В [1], в частности, полностью описан спектр операторов взвешенного сдвига с весами из коммутативных банаховых алгебр в терминах индуцируемых динамических систем и соответствующих инвариантных мер (теоремы 4.4, 7.2, 7.7, 13.10, 17.1, 17.3). Там же доказано, что спектр упомянутого выше оператора ΦV является кольцом с центром в нуле и радиусами $\mathfrak{a}_{\text{int}}(\alpha)$ и $\mathfrak{a}_{\text{out}}(\alpha)$ [1, пример 8.1]. Поэтому в терминах спектров операторов утверждение теоремы 1 выглядит следующим образом: $\sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{K}_\Phi) = \sigma(A)\sigma(\Phi V)$.

Отметим также, что в гильбертовой ситуации теорема 1 непосредственно вытекает из результатов монографии [1]. Действительно, в пространстве $l^2(\mathbb{Z}, X)$, где X — гильбертово пространство, рассмотрение спектра оператора $\mathcal{K}_\Phi = A\Phi V$ эквивалентно рассмотрению спектра оператора $A \otimes \Phi V$. Как известно, спектр тензорного произведения ограниченных операторов равен произведению их спектров, т. е. $\sigma(\mathcal{K}_\Phi) = \sigma(A \otimes \Phi V) = \sigma(A)\sigma(\Phi V)$.

В связи с приведенной леммой подчеркнем, что при исследовании общих операторов взвешенного сдвига принципиальным является описание соответствующих спектральных проекторов Рисса. В [1] такое описание приведено в теоремах 7.2, 7.7 и лемме 19.1.

2. Теперь рассмотрим приложения сформулированного результата к исследованию дифференциальных операторов в весовых функциональных пространствах. Операторы будут определяться с помощью семейства эволюционных операторов.

Под семейством эволюционных операторов на банаховом пространстве X понимается сильно непрерывная операторнозначная функция $\mathcal{U}: \Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \leq t\} \rightarrow LB(X)$ со следующими свойствами: 1) $\mathcal{U}(t, t) = I$, $t \in \mathbb{R}$; 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех $\tau \leq s \leq t$ из $\mathbb{R}$; 3) существуют постоянные $M \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, такие, что $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M \exp \gamma(t-s)$ для всех $(t, s) \in \Delta$. Отметим, что условие 3) эквивалентно условию $\sup_{(t,s) \in \Delta, 0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| < \infty$.

Функцию $\tilde{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ назовем *допустимым весом*, если (скалярное) семейство

$$\mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}: \Delta \rightarrow LB(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}, \quad \mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}(t, s) = \frac{\tilde{\alpha}(s)}{\tilde{\alpha}(t)}, \quad (t, s) \in \Delta,$$

является семейством эволюционных операторов. Ясно, что функция $\tilde{\alpha}$ непрерывна.

Для допустимого веса $\tilde{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ символом $L_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство измеримых (по Бохнеру) функций $x: \mathbb{R} \rightarrow X$, для которых конечна величина

$$\|x\| = \|x\|_{\tilde{\alpha}, p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\|x(\tau)\|}{\tilde{\alpha}(\tau)} \right)^p d\tau \right)^{1/p}, \quad \text{если } p \in [1, \infty),$$

и величина

$$\|x\| = \|x\|_{\tilde{\alpha}, \infty} = \operatorname{vrai} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|x(t)\|}{\tilde{\alpha}(t)}, \quad \text{если } p = \infty. \quad (3)$$

Через $C_{b, \tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных функций $x: \mathbb{R} \rightarrow X$, для которых конечна величина из формулы (3). Наконец, через $S_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство измеримых функций $x: \mathbb{R} \rightarrow X$, для которых

$$\|x\| = \|x\|_{S_{\tilde{\alpha}}^p} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \left(\frac{\|x(\tau)\|}{\tilde{\alpha}(\tau)} \right)^p d\tau \right)^{1/p} < \infty, \quad p \in [1, \infty).$$

Далее символом $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ будет обозначаться одно из перечисленных функциональных пространств. Если $\alpha \equiv 1$, то соответствующие пространства будут обозначаться через $L^p(\mathbb{R}, X)$, $C_b(\mathbb{R}, X)$, $S^p(\mathbb{R}, X)$, а вместо $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ будет использоваться обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow LB(X)$ — семейство эволюционных операторов. Определим оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ следующим образом. Пару функций $(x, f) \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \times \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ отнесем к графику оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, если для всех $(t, s) \in \Delta$ имеют место равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad s \leq t.$$

Таким образом, $x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = f$. Это определение корректно, т. е. функция f единственна для данной функции $x \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}$. Для невесовых пространств такое определение использовалось в работах [2]–[6]. Результаты этих работ существенно используются здесь для исследования дифференциальных операторов в весовых пространствах.

Пусть $T: \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \rightarrow LB(X)$ — сильно непрерывная полугруппа операторов класса C_0 и A — ее инфинитезимальный оператор. Тогда семейство $\mathcal{U}(t, s) = T(t - s)$, $(t, s) \in \Delta$, является семейством эволюционных операторов. Определяемый этим семейством оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ обозначим через $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} = -d/dt + A$.

Далее, через α обозначим сужение веса $\tilde{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ на $\mathbb{Z}$ и наряду с оператором $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим разностный оператор $\mathcal{K}: \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$, $(\mathcal{K}x)(n) = T(1)x(n - 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$. Здесь банахово пространство $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$ совпадает с пространством $l_{\alpha}^p(\mathbb{Z}, X)$, если $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}, X) = L_{\alpha}^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, и $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X) = l_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{Z}, X)$, если $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}, X) = S_{\alpha}^p(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, или $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}, X) = C_{b, \tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$. В этом случае пространство $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$ называется ассоциированным с пространством $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$.

Из приведенной выше теоремы 1 и теоремы 2 (об отображении спектра) из [4] вытекает следующая

Теорема 2. Если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) > 0$, то

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exp \lambda \in \mathbb{T}\sigma(T(1))[\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)]\}.$$

Если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = 0$, $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) > 0$, то справедливо представление $\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \chi_g(T) \ln \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)\}$, где $\chi_g(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln \|T(t)\|)/t$ — показатель роста полугруппы операторов T . Спектр оператора $\mathcal{L}$ пуст при $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = 0$.

Следствие 1. Оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратим разностный оператор $\mathcal{D} = I - \mathcal{K}: \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$, действующий в ассоциированном с $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}, X)$ пространстве $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$.

Следствие 2. Спектр оператора дифференцирования $\mathcal{L}_0 = -d/dt: D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$, где $D(\mathcal{L}_0) = \{x \in \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X) : x \text{ — абсолютно непрерывная функция с } \dot{x} \in \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X)\}$ совпадает с множеством $\{\lambda \in \mathbb{C} : \exp \lambda \in \mathbb{T}[\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)]\}$, если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) > 0$, и с множеством $\sigma(\mathcal{L}_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \ln \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)\}$, если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = 0$, $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) > 0$. Спектр оператора $\mathcal{L}_0$ пуст, если $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = 0$.

Отметим, что теорема 2 может быть обобщена на дифференциальные включения [7].

Автор искренне благодарен рецензенту за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional Differential Equations: I. C^* -theory*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994. [2] В. В. Жиков, Изв. АН СССР, сер. матем., **40**:6 (1976), 1380–1408. [3] В. В. Жиков, Б. М. Левитан, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во МГУ, М., 1978. [4] А. Г. Баскаков, Функци. анализ и его прил., **30**:3 (1996), 1–11. [5] А. Г. Баскаков, Известия РАН, сер. матем., **73**:2 (2009), 3–68. [6] C. Chicone, Y. Latushkin, *Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. [7] М. С. Бичегкуев, Матем. заметки, **79**:4 (2006), 483–487.

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
e-mail: bichegkuev@yandex.ru

Поступило в редакцию
5 июня 2008 г.

УДК 517.988.63

Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского

© 2010. А. И. ПЕРОВ

1. Поводом для написания настоящей работы послужила теорема из [1, с. 153–154], которую мы ниже приведем в несколько измененных обозначениях (теорема 1).

Пусть M — произвольное множество и F — некоторое однозначное отображение этого множества в себя. Рассмотрим уравнение

$$x = Fx \quad (x \in M), \quad (1)$$