Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Мутафян, И. Ю. Типунин, Двойная аффинная алгебра Гекке в логарифмической конформной теории поля, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 1, 68–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2979>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:33:44

Двойная аффинная алгебра Гекке в логарифмической конформной теории поля*

© 2010. Г. С. Мутафян, И. Ю. Типунин

Построено представление двойной аффинной алгебры Гекке, симметризация которого совпадает с центром квантовой группы $\overline{U}_q sl(2)$ и, вследствие двойственности Каждана–Люстига, с алгеброй Верлинде $(1, p)$ -модели логарифмической конформной теории поля.

§1. Введение

В последнее время в логарифмической конформной теории поля [1] был достигнут существенный прогресс благодаря использованию квантово-групповых методов. (См. недавний обзор [2].) В рамках общей двойственности Каждана–Люстига [5] для $(1, p)$ -моделей была установлена эквивалентность между категориями представлений киральной алгебры и квантовой группы $\overline{U}_q sl(2)$ [4]. Замечательно, что эта эквивалентность индуцирует изоморфизм между представлением модулярной группы на центре квантовой группы и ее представлением на пространстве обобщенных характеров $(1, p)$ -модели [6]. Более того, алгебра Верлинде $(1, p)$ -модели ([7], [8], см. также [9]) совпадает [6] с кольцом Гротендика алгебры $\overline{U}_q sl(2)$:

$$\chi^\alpha(s)\chi^{\alpha'}(s') = \sum_{\substack{s''=|s-s'|+1 \\ \text{step}=2}}^{s+s'-1} \tilde{\chi}^{\alpha\alpha'}(s''), \quad s, s' = 1, \dots, p, \alpha = \pm 1, \quad (1.1)$$

где

$$\tilde{\chi}^\alpha(s) = \begin{cases} \chi^\alpha(s), & 1 \leq s \leq p, \\ \chi^\alpha(2p-s) + 2\chi^{-\alpha}(s-p), & p+1 \leq s \leq 2p-1. \end{cases}$$

Особенностью логарифмической конформной теории поля является неполупростота алгебры Верлинде. Однако в классификации алгебр Верлинде с помощью общей теории алгебр Гекке [11] это не является чем-то необычным. Возникает естественное предположение [12], что алгебра Верлинде $(1, p)$ -модели может быть реализована в теории представлений алгебр Гекке. В настоящей работе построено представление алгебры Гекке, определяющее алгебру Верлинде $(1, p)$ -модели.

*Работа первого автора была частично поддержана грантом РФФИ №07-01-00523. Работа второго автора была частично поддержана грантами LSS-4401.2006.2 и РФФИ 05-02-17217, а также фондом «Династия».

1.1. АГ. Мы рассматриваем простейшую алгебру Гекке (АГ) [11] с генераторами X, Y, T и соотношениями

$$TXT = X^{-1}, \quad TY^{-1}T = Y, \quad XY = \mathfrak{q}YXT^2, \quad (1.2)$$

$$(T - \mathfrak{t}^{1/2})(T + \mathfrak{t}^{-1/2}) = 0, \quad \mathfrak{t} = \mathfrak{q}^2. \quad (1.3)$$

В дальнейшем мы используем параметр деформации

$$\mathfrak{q} = e^{i\pi/p}, \quad \mathfrak{q}^{1/2} = e^{i\pi/(2p)}, \quad (1.4)$$

где $p = 3, 4, 5, 6, \dots$. Будем обозначать эту алгебру через $\mathfrak{H}$. Группа $PSL(2, \mathbb{Z})$ представлена автоморфизмами алгебры $\mathfrak{H}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tau_+, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tau_-,$$

где

$$\tau_+ : Y \rightarrow \mathfrak{q}^{-1/2}XY, \quad X \rightarrow X, \quad T \rightarrow T, \quad (1.5)$$

$$\tau_- : X \rightarrow \mathfrak{q}^{1/2}YX, \quad Y \rightarrow Y, \quad T \rightarrow T. \quad (1.6)$$

Преобразование Фурье действует следующим образом:

$$\sigma : X \rightarrow Y^{-1}, \quad Y \rightarrow XT^2, \quad T \rightarrow T, \quad \sigma = \tau_+ \tau_-^{-1} \tau_+ = \tau_-^{-1} \tau_+ \tau_-^{-1}. \quad (1.7)$$

1.2. Представление алгебры $\mathfrak{H}$. Мы рассматриваем представление $\mathcal{Z}$ алгебры $\mathfrak{H}$ размерности $6p - 4$, приводимое, но неразложимое. Представление $\mathcal{Z}$ содержит максимальное подпредставление V^{-2} , которое определено в [11] как фактор, $V^{-2} = \mathcal{P}/(X^{2p} + X^{-2p} - 2)$, где $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ — стандартное представление алгебры $\mathfrak{H}$ в пространстве полиномов Лорана. Неприводимый фактор $\mathcal{M} = \mathcal{Z}/V^{-2}$ имеет размерность $2p - 4$ и изоморфен представлению V_{2p-4} из [11], которое, в свою очередь, является фактором $\mathcal{P}/\varepsilon_{-p+2}$, где $\varepsilon_{-p+2} = \prod_{j=2}^{p-1} (\mathfrak{q}^{-j}X - \mathfrak{q}^jX^{-1})$. Представление V^{-2} также приводимо и содержит максимальное $2p + 4$ -мерное неприводимое подпредставление $\mathcal{W}$; при этом фактор $\mathcal{E} = V^{-2}/\mathcal{W}$ изоморфен $\mathcal{M}$.

В §2 мы описываем представление $\mathcal{Z}$ в явном виде, указав базис и действие операторов T, X, Y на нем. Затем описываем его структуру, указывая в явном виде подпредставления и факторы.

Пространство $\mathcal{Z}$ наделено коммутативным ассоциативным умножением, описанным в разд. 1.6. Далее будет показано, как это умножение приводит к умножению в алгебре Верлинде.

Образующие σ и τ_+ группы $PSL(2, \mathbb{Z})$ реализованы как сопряжения с некоторыми операторами на $\mathcal{Z}$, обозначенными через $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{v}$ соответственно. Оператор $\mathfrak{v}$ — это просто умножение на элемент из $\mathcal{Z}$, также обозначенный через $\mathfrak{v}$. Мы называем $\mathfrak{v}$ гауссианом по аналогии с [11].

1.3. Симметризация. Оператор T имеет в $\mathcal{Z}$ два различных собственных значения $\mathfrak{q}$ и $-\mathfrak{q}^{-1}$. Собственное подпространство с собственным значением $\mathfrak{q}$ имеет размерность $3p - 1$. Мы обозначаем его через $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}}$. Согласно общей теории [11], $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}}$ — ассоциативная коммутативная алгебра с умножением, индуцированным умножением в $\mathcal{Z}$, и в то же время $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}}$ является представлением группы $SL(2, \mathbb{Z})$, индуцированным действием $PSL(2, \mathbb{Z})$ в $\mathcal{Z}$. Операторы $\mathfrak{S}, \mathfrak{v}, C = -(X + X^{-1})$ и $H = -(Y + Y^{-1})$ сужаются до действия в $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}}$. Теперь можно

сформулировать главный результат статьи (все квантово-групповые определения см. в [6]):

1.4. Теорема. • $\mathcal{T}_q$ изоморфно центру квантовой группы $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ как ассоциативная коммутативная алгебра и как представление группы $SL(2, \mathbb{Z})$.

• При этом изоморфизме собственные векторы оператора C соответствуют образам при отображении Радфорда, а собственные векторы оператора H — образам при отображении Дринфельда характеров неприводимых представлений квантовой группы $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$.

• Гауссов элемент v соответствует ленточному элементу в $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$.

1.5. Следствие. Собственные векторы оператора $Y + Y^{-1}$, определенные в (5.1), перемножаются согласно (1.1).

В §4 мы описываем подпространство T с собственным значением q , а в §5 доказываем теорему 1.4. Обозначения этой части соответствуют обозначениям в [6].

1.6. Представление $\mathcal{Z}$. Структуру представления $\mathcal{Z}$ проще всего описывать в собственных базисах операторов X и Y . Эти операторы не диагонализуются, их жорданова форма состоит из блоков размерности 2. При этом жордановы формы операторов X и Y^{-1} совпадают. Базисы, в которых операторы X и Y^{-1} имеют жорданову форму, мы называем X -базисом и Y -базисом соответственно.

1.6.1. X -базис. В представлении $\mathcal{Z}$ есть базис, состоящий из векторов

$$\begin{aligned} w_1, \dots, w_{2p}, e_1, e_p, e_{p+1}, e_{2p}, \quad e_2, \dots, e_{p-1}, e_{p+2}, \dots, e_{2p-1}, \\ m_2, \dots, m_{p-1}, m_{p+2}, \dots, m_{2p-1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подпредставление $\mathcal{W}$ порождено векторами $w_1, \dots, w_{2p}, e_1, e_p, e_{p+1}, e_{2p}$. Образы векторов $e_2, \dots, e_{p-1}, e_{p+2}, \dots, e_{2p-1}$ ($m_2, \dots, m_{p-1}, m_{p+2}, \dots, m_{2p-1}$) при канонической проекции образуют базис в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{M}$). В базисе (1.8) имеем

$$Xw_s = q^s w_s, \quad Xe_s = q^s (e_s + w_s), \quad Xm_s = q^s m_s. \quad (1.9)$$

Этот базис мы называем X -базисом.

1.6.2. Умножение в $\mathcal{Z}$. Представление $\mathcal{Z}$ наделено коммутативным ассоциативным умножением, которое наиболее просто описывается в базисе (1.8):

$$e_i e_j = \delta_{i,j} e_j, \quad e_i w_j = \delta_{i,j} w_j, \quad e_i m_j = \delta_{i,j} m_j, \quad w_i w_j = w_i m_j = m_i m_j = 0. \quad (1.10)$$

1.6.3. Y -базис. В пространстве $\mathcal{Z}$ можно выделить также базис

$$\begin{aligned} u_1, \dots, u_{2p}, f_1, f_p, f_{p+1}, f_{2p}, \quad f_2, \dots, f_{p-1}, f_{p+2}, \dots, f_{2p-1}, \\ k_2, \dots, k_{p-1}, k_{p+2}, \dots, k_{2p-1}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

в котором действие Y^{-1} дается следующими соотношениями:

$$Y^{-1} u_s = q^s u_s, \quad Y^{-1} f_s = q^s (f_s + u_s), \quad Y^{-1} k_s = q^s k_s. \quad (1.12)$$

Базис (1.11) мы называем Y -базисом.

В разд. 2.3 мы укажем, как элементы Y -базиса выражаются через X -базис.

1.6.4. Действие группы $PSL(2, \mathbb{Z})$. Оператор $\mathcal{S}$ отображает X -базис в Y -базис:

$$\mathcal{S}w_s = u_s, \quad \mathcal{S}e_s = f_s, \quad \mathcal{S}m_s = k_s. \quad (1.13)$$

Гауссов элемент выражается через элементы X -базиса следующим образом:

$$v = \sum_{s=1}^{2p} q^{-(s^2-1)/2} e_s - w_1 + q^{-p^2/2} w_{p+1} + \left(\sum_{s=2}^{p-1} + \sum_{s=p+2}^{2p-1} \right) q^{-(s^2-1)/2} ((p-s)w_s + pm_s). \quad (1.14)$$

В разд. 3.1 мы установим свойства оператора $\mathcal{S}$. Будет показано (в основном с помощью прямых вычислений), что этот оператор действует как оператор σ из (1.7). В разд. 3.2 будут установлены свойства оператора v . Затем в конце §3 будет проверено выполнение соотношений группы $PSL(2, \mathbb{Z})$.

1.7. Обозначения. Далее нам понадобятся полиномы Чебышева

$$U_s(x) = x^{s-1} + x^{s-3} + \dots + x^{-(s-3)} + x^{-(s-1)}. \quad (1.15)$$

а также следующие обозначения:

$$\{s\} = \frac{q^s + q^{-s}}{q - q^{-1}}, \quad [s] = \frac{q^s - q^{-s}}{q - q^{-1}}, \quad \omega_s = \frac{p\sqrt{2p}}{[s]^2} (-1)^{p+s+1}, \quad \xi_s = \frac{-(-1)^{p-s} p\sqrt{2p}}{q^s - q^{-s}}, \quad (1.16)$$

$$[s, j] = \begin{cases} s, & j = 0, 2p, \\ (-1)^{s-1} s, & j = p, \\ [sj]/[j], & j \bmod p \neq 0, \end{cases} \quad \{s, j\} = \begin{cases} 0, & j \bmod p = 0, \\ \{sj\}/[j] & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.17)$$

2. Представление алгебры $\mathfrak{H}$

Здесь мы еще раз возвращаемся к представлению V^{-2} [11] и определяем представление $\mathcal{Z}$, являющееся его расширением. Затем находим жорданов базис для Y , в котором действие Y^{-1} дается формулами (1.12).

2.1. Полиномиальное представление V^{-2} . Для описания V^{-2} мы приведем здесь стандартное [11] представление алгебры $\mathfrak{H}$ в пространстве полиномов Лорана $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$. Действие генераторов алгебры $\mathfrak{H}$ задается следующим образом:

$$T = t^{1/2} s + \frac{t^{1/2} - t^{-1/2}}{X^2 - 1} (s - 1), \quad Y = -s p T, \quad (2.1)$$

где

$$s f(X) = f(X^{-1}), \quad p f(X) = f(qX) \quad \text{и} \quad t = q^k, \quad (2.2)$$

а операторы X , X^{-1} действуют просто умножением. (Отметим, что эти формулы отличаются от соответствующих формул в [11] знаком в определении $Y \rightarrow s p T$.) Представление V^{-2} является $4p$ -мерным представлением в факторпространстве $\mathcal{P}/(X^{2p} + X^{-2p} - 2)$.

2.1.1. Предложение. • Операторы X и Y имеют в V^{-2} собственные значения q^s , $s = 1, \dots, 2p$, каждое кратности 2.

• Жорданов базис оператора X состоит из функций e_s и w_s , где $s = 1, \dots, 2p$.

• Собственный базис оператора Y состоит из функций u_s , где $s = 1, \dots, 2p$, функций k_s , где $s = 2, \dots, p-1, p+2, \dots, 2p-1$, и функций $f_1, f_p, f_{p+1}, f_{2p}$.

Операторы X и Y^{-1} действуют в этом базисе следующим образом:

$$Xw_s = q^s w_s, \quad Xe_s = q^s(e_s + w_s), \quad (2.3)$$

$$Y^{-1}u_s = q^s u_s, \quad Y^{-1}f_s = q^s(f_s + u_s), \quad Y^{-1}k_s = q^s k_s. \quad (2.4)$$

Доказательство. Все эти функции от переменной X имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} w_s &= \frac{1}{4p^2}(X^{2p} - 1) \sum_{j=0}^{2p-1} q^{-sj} X^j, \\ e_s &= \frac{1}{2p} + \frac{1}{4p^2} \sum_{j=1}^{2p-1} (2p-j)(q^{-sj} X^j + q^{sj} X^{-j}), \end{aligned} \quad s = 1, \dots, 2p, \quad (2.5)$$

и

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{(-1)^s}{p\sqrt{2p}} \left(q^s \frac{U_{p-s}(X) + U_{p+s}(X)}{2} + q \frac{U_{p-s}(q^{-1}X) + U_{p+s}(q^{-1}X)}{2} \right), \\ u_{p+s} &= \frac{(-1)^{p+s}}{p\sqrt{2p}} \left(q^{p+s} \frac{U_s(X) + U_{2p-s}(X)}{2} + q \frac{U_s(q^{-1}X) + U_{2p-s}(q^{-1}X)}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$s = 1, \dots, p,$

$$\begin{aligned} k_s &= \frac{(-1)^{s+1}}{p\sqrt{2p}} \left(q^s U_{p-s}(X) + q U_{p-s}(q^{-1}X) \right), \\ k_{p+s} &= \frac{(-1)^{p+s}}{p\sqrt{2p}} \left(q^{p+s} U_s(X) + q U_s(q^{-1}X) \right), \end{aligned} \quad s = 2, \dots, p-1 \quad (2.7)$$

$$f_s = \frac{1}{p\sqrt{2p}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{p+1}U_{2p}(X), & s = p, \\ U_p(X), & s = 2p, \\ \frac{1}{2}(-1)^p q X U_{2p}(X), & s = p+1, \\ -q X U_p(X), & s = 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Равенства (2.3) проверяются прямым вычислением. Легко проверить, что $1 = \sum_{s=1}^{2p} e_s$. Вместе с (2.3) это дает $X^j = \sum_{s=1}^{2p} q^{sj}(e_s + jw_s)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т.е. функции e_s и w_s являются линейно независимыми и действительно образуют базис в V^{-2} .

Соотношения (2.4) также проверяются прямым вычислением:

$$\begin{aligned} YU_s(q^{-1}X) &= (q^s + q^{-s})U_s(q^{-1}X) - q^{-1}U_s(X), \\ YU_s(X) &= qU_s(q^{-1}X). \end{aligned}$$

Проверка линейной независимости этих векторов является стандартной. (См. определение 2.5.4 и теоремы 2.5.9 и 2.9.3 из [11].) $\square$

Представление V^{-2} приводимо. В нем есть $2p + 4$ -мерное подпредставление $\mathcal{W}$, порожденное функциями $w_1, \dots, w_{2p}, e_1, e_p, e_{p+1}, e_{2p}$. Факторпространство $\mathcal{E} = V^{-2}/\mathcal{W}$ изоморфно представлению V_{2p-4} , определенному в [11] как фактор $V_{2p-4} = \mathcal{P}/\varepsilon_{-p+2}$, где $\varepsilon_{-p+2} = \prod_{j=2}^{p-1} (q^{-j}X - q^jX^{-1})$.

Разложение произвольного многочлена $f(X)$ по базису e_s, w_s дается выражением

$$f(X) = \sum_{s=1}^{2p} \left(f(q^s) e_s + \left(X \frac{df(X)}{dX} \Big|_{X=q^s} \right) w_s \right). \quad (2.9)$$

С его помощью проверяем, что $u_1, \dots, u_{2p}, f_1, f_p, f_{p+1}, f_{2p}$ принадлежат $\mathcal{W}$ и, следовательно, жордановы формы операторов X и Y^{-1} совпадают в $\mathcal{W}$. Во всем пространстве V^{-2} они не совпадают, т. е. автоморфизм (1.7) не может быть реализован как сопряжение в этом пространстве. Чтобы преодолеть эту трудность, мы расширяем V^{-2} до представления $\mathcal{Z}$ размерности $6p - 4$, добавляя векторы $m_2, \dots, m_{p-1}$ и $m_{p+2}, \dots, m_{2p-1}$. Оператор X действует на них по формуле $Xm_s = q^s m_s$. Построенное пространство $\mathcal{Z}$ уже не описывается в терминах многочленов от одной переменной. Мы описываем его как некое абстрактное векторное пространство.

2.2. Представление $\mathcal{Z}$ в X -базисе. Примем следующее определение представления $\mathcal{Z}$. Представление $\mathcal{Z}$ алгебры $\mathcal{H}$ является $6p - 4$ -мерным векторным пространством с базисом из $4p$ элементов e_s и $w_s, s = 1, \dots, 2p$, и $2p - 4$ элементов $m_s, s = 2, \dots, p - 1, p + 2, \dots, 2p - 1$. Действие алгебры $\mathcal{H}$ определим следующим образом:

$$Xw_s = q^s w_s, \quad Xe_s = q^s (e_s + w_s), \quad Xm_s = q^s m_s, \quad (2.10)$$

$$Tw_p = -q^{-1} w_p - (q - q^{-1}) e_p, \quad Tw_{2p} = -q^{-1} w_{2p} - (q - q^{-1}) e_{2p}, \quad (2.11)$$

$$Tw_s = -\frac{q^{-s}}{[s]} w_s - \frac{[s-1]}{[s]} w_{2p-s}, \quad s \neq 0, p, \quad (2.12)$$

$$Te_p = q e_p, \quad Te_{2p} = q e_{2p}, \quad (2.13)$$

$$Te_s = -\frac{q^{-s}}{[s]} e_s + \frac{[s-1]}{[s]} e_{2p-s} + \frac{2}{(q - q^{-1})[s]^2} (w_s - w_{2p-s}), \quad s \neq 0, p, \quad (2.14)$$

$$Tm_{2p-1} = q m_{2p-1} - (q + q^{-1}) w_1, \quad Tm_{p-1} = q m_{p-1}, \quad (2.15)$$

$$Tm_s = -\frac{q^{-s}}{[s]} m_s + \frac{[s-1]}{[s]} m_{2p-s}, \quad s = 2, \dots, p-2, p+2, \dots, 2p-2, \quad (2.16)$$

$$Yw_p = -q^{-1} w_{p+1} + (q - q^{-1}) e_{p+1}, \quad Yw_{2p} = -q^{-1} w_1 + (q - q^{-1}) e_1, \quad (2.17)$$

$$Yw_s = -\frac{q^{-s}}{[s]} w_{2p-s+1} - \frac{[s-1]}{[s]} w_{s+1}, \quad s \neq 0, p, \quad (2.18)$$

$$Ye_p = -q e_{p+1}, \quad Ye_{2p} = -q e_1, \quad (2.19)$$

$$Ye_s = \frac{q^{-s}}{[s]} e_{2p-s+1} - \frac{[s-1]}{[s]} e_{s+1} - \frac{2}{(q - q^{-1})[s]^2} (w_{s+1} - w_{2p-s+1}), \quad s \neq 0, p, \quad (2.20)$$

$$Ym_{2p-1} = -q m_2 - (q + q^{-1}) w_0, \quad Ym_{p-1} = -q m_{p+2}, \quad (2.21)$$

$$Ym_s = -\frac{[s-1]}{[s]} m_{s+1} + \frac{q^{-s}}{[s]} m_{2p-s+1}, \quad s = 2, \dots, p-2, p+2, \dots, 2p-2. \quad (2.22)$$

По определению базис e, w, t является X -базисом (1.8), и при этом жорданова структура оператора X задается формулами (2.10).

2.2.1. Лемма. *Операторы X, Y и T , определенные в (2.10)–(2.22), удовлетворяют соотношениям (1.2) и (1.3).*

Доказательство. Прямое вычисление. □

Определим ассоциативное коммутативное умножение в $\mathbb{Z}$ по формулам (1.10).

2.2.2. Предложение. • $\mathbb{Z}$ приводимо.

• Подпространство

$$\mathcal{W} \equiv \{w_1, \dots, w_{2p}, e_1, e_p, e_{p+1}, e_{2p}\} \quad (2.23)$$

размерности $2p+4$ инвариантно относительно действия $\mathbb{H}$ и, следовательно, является подпредставлением.

• Факторпространство $\mathbb{Z}/\mathcal{W}$ разлагается в прямую сумму: $\mathbb{Z}/\mathcal{W} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{M}$, где $\mathcal{E} \equiv \{e_2, \dots, e_{p-1}, e_{p+2}, \dots, e_{2p-1}\}$ и $\mathcal{M} \equiv \{m_2, \dots, m_{p-1}, m_{p+2}, \dots, m_{2p-1}\}$.

Доказательство. Утверждения прямо следуют из (2.10)–(2.22). □

2.3. Y -базис. В этом разделе мы докажем, что оператор Y имеет жорданову форму в базисе (1.11).

2.3.1. Предложение. *Жорданов базис оператора Y состоит из $6p-4$ векторов: $4p$ векторов f_s, u_s для $s = 1, \dots, 2p$, и $2p-4$ векторов k_s для $s = 2, \dots, p-1, p+2, \dots, 2p-1$. Оператор Y^{-1} действует на этих векторах согласнo (1.12).*

Доказательство. Определим следующие векторы, выразив их через X -базис: векторы

$$u_s = \sum_{j=1}^{2p} u_{j,s}^{(w)} w_j + \sum_{j=1}^{2p} u_{j,s}^{(e)} e_j, \quad s = 1, \dots, 2p, \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} u_{j,s}^{(w)} &= \frac{(-1)^{s+j}}{\sqrt{2p}} (q^s \{s, j\} - q \{s, j-1\}), \quad j = 1, \dots, 2p, \\ u_{1,s}^{(e)} &= (-1)^s \frac{q}{\sqrt{2p}}, \quad u_{2p,s}^{(e)} = (-1)^s \frac{q^s}{\sqrt{2p}}, \\ u_{p+1,s}^{(e)} &= (-1)^{p+1} \frac{q}{\sqrt{2p}}, \quad u_{p,s}^{(e)} = (-1)^{p+1} \frac{q^s}{\sqrt{2p}}, \\ u_{j,s}^{(e)} &= 0, \quad j \neq 1, p, p+1, 2p, \end{aligned} \quad (2.25)$$

векторы

$$k_s = \sum_{j=1}^{2p} k_{j,s}^{(w)} w_j + \sum_{j=1}^{2p} k_{j,s}^{(e)} e_j, \quad s = 2, \dots, p-1, p+2, \dots, 2p-1, \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned}
 k_{j,s}^{(w)} &= -\frac{(p-s)}{p} u_{j,s}^{(w)} - \frac{(-1)^{s+j}}{p\sqrt{2p}} (q^s[s, j]\{1, j\} - q[s, j-1]\{1, j-1\}), \\
 k_{1,s}^{(e)} &= (-1)^{s+1} \frac{(q^s[s] + q(p-s))}{p\sqrt{2p}}, \quad k_{p,s}^{(e)} = (-1)^p \frac{(q[s] + q^s(p-s))}{p\sqrt{2p}}, \\
 k_{p+1,s}^{(e)} &= (-1)^p \frac{(q^s[s] + q(p-s))}{p\sqrt{2p}}, \quad k_{2p,s}^{(e)} = (-1)^{s+1} \frac{(q[s] + q^s(p-s))}{p\sqrt{2p}}, \\
 k_{j,s}^{(e)} &= \frac{(-1)^{s+j}}{p\sqrt{2p}} (q^s[s, j] - q[s, j-1]) \quad j \neq 1, p, p+1, 2p,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

и векторы

$$f_s = \sum_{j=1}^{2p} f_{j,s}^{(w)} w_j + \sum_{j=1}^{2p} f_{j,s}^{(e)} e_j + \left(\sum_{j=2}^{p-1} + \sum_{j=p+2}^{2p-1} \right) f_{j,s}^{(m)} m_j, \quad s = 1, \dots, 2p, \tag{2.28}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_{1,s}^{(w)} &= \frac{2(-1)^{s+1} q^{2s}}{(q - q^{-1})\sqrt{2p}}, \quad f_{p,s}^{(w)} = \frac{q(-1)^{p+1}[s]}{\sqrt{2p}}, \quad f_{p+1,s}^{(w)} = \frac{2(-1)^p q^{2s}}{(q - q^{-1})\sqrt{2p}}, \\
 f_{2p,s}^{(w)} &= \frac{q(-1)^s [s]}{\sqrt{2p}}, \\
 f_{j,s}^{(w)} &= -p(p-j)k_{j,s}^{(e)} + \frac{(-1)^{s+j}}{\sqrt{2p}} (q[s, j-1] + q^s\{s, j\}), \quad j \neq 1, p, p+1, 2p, \\
 f_{p,s}^{(e)} &= (-1)^{p+s+1} f_{2p,s}^{(e)} = (-1)^{p+1} \frac{q^s}{\sqrt{2p}}, \quad f_{j,s}^{(e)} = 0, \quad j \neq p, 2p, \\
 f_{j,s}^{(m)} &= -p^2 k_{j,s}^{(e)}, \quad j \neq 1, p, p+1, 2p, \\
 f_{j,s}^{(m)} &= 0, \quad s = 1, p, p+1, 2p.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Теперь (1.12) проверяется прямым вычислением с использованием формул (2.17)–(2.22).

Доказать линейную независимость этих векторов можно следующим образом. Из разложения по X -базису следует, что векторы $u_s, f_1, f_p, f_{p+1}, f_{2p}$ принадлежат $\mathcal{W}$, векторы k_s принадлежат $\mathcal{W} + \mathcal{E}$, а векторы f_s при $s = 2, \dots, p-1, p+2, \dots, 2p-1$ принадлежат $\mathcal{W} + \mathcal{M}$. Напомним, что при изоморфизме $\mathcal{W} + \mathcal{E} \sim V^{-2}$ векторы $u_s, k_s, f_1, f_p, f_{p+1}, f_{2p}$ соответствуют линейно независимым функциям (2.6)–(2.8) в V^{-2} , т. е. эти векторы тоже линейно независимы. В частности, векторы $u_s, f_1, f_p, f_{p+1}, f_{2p}$ образуют базис в $\mathcal{W}$ и, следовательно, образы векторов k_s при проекции пространства $\mathcal{W} + \mathcal{E}$ на $\mathcal{E} = (\mathcal{W} + \mathcal{E})/\mathcal{W}$ образуют базис в $\mathcal{E}$. Будем обозначать их также через k_s . Напомним, что при изоморфизме $\mathcal{E} \sim \mathcal{M}$ векторы k_s соответствуют векторам f_s и, следовательно, f_s при $s = 2, \dots, p-1, p+2, \dots, 2p-1$ являются линейно независимыми. В итоге получаем линейную независимость всех векторов u, f, k . $\square$

§3. Действие группы $PSL(2, \mathbb{Z})$ в $\mathcal{Z}$

В этом параграфе мы определяем операторы $\mathcal{S}$ и $\mathbf{v}$ и доказываем, что они удовлетворяют соотношениям группы $PSL(2, \mathbb{Z})$. Сопряжения с операторами $\mathcal{S}$ и $\mathbf{v}$ определяют автоморфизмы σ и τ соответственно.

3.1. σ . Определим оператор $\mathcal{S}$ как отображение X -базиса в Y -базис согласно (1.13).

3.1.1. Предложение. $\mathcal{S}$ удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{S}X\mathcal{S}^{-1} = Y^{-1}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{S}Y\mathcal{S}^{-1} = XT^2, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{S}T\mathcal{S}^{-1} = T, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{S}^2 = \mathbf{q}T^{-1}. \quad (3.4)$$

Доказательство. (3.1) следует из определения оператора $\mathcal{S}$.

(3.4) является стандартным фактом теории алгебр Гекке. (См. [11].)

(3.3) проверяется следующим образом: $\mathcal{S}^2 = \mathbf{q}T^{-1} \implies \mathcal{S}T = T\mathcal{S}(= \mathbf{q}\mathcal{S}^{-1}) \implies \mathcal{S}T\mathcal{S}^{-1} = T$.

(3.2) проверяется следующим образом: $\mathcal{S}X\mathcal{S}^{-1} \stackrel{(3.1)}{=} Y^{-1} \implies \mathcal{S}X^{-1}\mathcal{S}^{-1} = Y \implies \mathcal{S}Y\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^2X^{-1}\mathcal{S}^{-2} \stackrel{(3.4)}{=} T^{-1}X^{-1}T \stackrel{(1.2)}{=} XT^2$. $\square$

3.2. τ_+ . Автоморфизм τ_+ может быть реализован как сопряжение с элементом $\mathbf{v} \in \mathcal{Z}$, определенным в (1.14).

3.2.1. Предложение. Введем оператор τ_+ формулой

$$\tau_+(x) = \mathbf{v}^{-1}x\mathbf{v} \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

где $\mathbf{v}$ определен в (1.14). Для этого оператора выполняется соотношение (1.5).

Доказательство проводится прямым вычислением. $\square$

3.2.2. Предложение. Отображение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{v}.$$

определяет действие группы $PSL(2, \mathbb{Z})$ в $\mathcal{Z}$.

Доказательство. Выполнение соотношений группы $PSL(2, \mathbb{Z})$ следует [11] из выполнения равенств (3.1)–(3.4), (1.5). $\square$

§4. Собственное подпространство оператора T с собственным значением $\mathbf{q}$

В этом параграфе мы определяем представление симметризованной алгебры Гекке. В §5 мы докажем, что оно изоморфно центру квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{q}}sl(2)$.

Пусть $\mathcal{T}_{\mathbf{q}}$ обозначает собственное подпространство оператора T с собственным значением $\mathbf{q}$. Оно $3p-1$ -мерно. Операторы X и Y не могут быть сужены на $\mathcal{T}_{\mathbf{q}}$, но «симметризованные» операторы $C = -(X + X^{-1})$ и $H = -(Y + Y^{-1})$

могут. Действительно, для произвольного $\mathbf{a} \in \mathcal{T}_q$ имеем

$$\begin{aligned} T(X + X^{-1})\mathbf{a} &\stackrel{(1.2)}{=} (X^{-1}T^{-1} + TX^{-1})\mathbf{a} = (q^{-1} + T)X^{-1}\mathbf{a} \\ &\stackrel{(1.3)}{=} (q + T^{-1})X^{-1}\mathbf{a} = (qX^{-1} + XT)\mathbf{a} = q(X + X^{-1})\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Следовательно, $(X + X^{-1})\mathbf{a} \in \mathcal{T}_q$. Аналогичное вычисление показывает, что H также сужается на $\mathcal{T}_q$.

4.1. C-базис. Собственными векторами оператора $C = -(X + X^{-1})$ являются

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= e_p, \quad \mathbf{e}_p = e_{2p}, \quad \mathbf{e}_s = e_{p+s} + e_{p-s}, \\ \mathbf{w}_1^+ &= \frac{1}{q - q^{-1}}m_{p-1}, \quad \mathbf{w}_1^- = \frac{1}{q - q^{-1}}(w_{p+1} - w_{p-1} - m_{p-1}), \\ \mathbf{w}_s^+ &= \frac{[s]}{q - q^{-1}}(m_{p-s} + m_{p+s}), \quad \mathbf{w}_s^- = \frac{[s]}{q - q^{-1}}(w_{p+s} - w_{p-s} - m_{p-s} - m_{p+s}), \\ \mathbf{w}_{p-1}^+ &= \frac{1}{q - q^{-1}}(m_{2p-1} - w_1), \quad \mathbf{w}_{p-1}^- = \frac{1}{q - q^{-1}}(w_{2p-1} - m_{2p-1}), \\ \mathbf{w}_s &= \mathbf{w}_s^+ + \mathbf{w}_s^- = \frac{[s]}{q - q^{-1}}(w_{p+s} - w_{p-s}), \quad s = 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Действие оператора C на них прямо определяется из (2.10):

$$C\mathbf{e}_0 = \mu_0\mathbf{e}_0, \quad C\mathbf{e}_p = \mu_p\mathbf{e}_p, \quad (4.2)$$

$$C\mathbf{e}_s = \mu_s\mathbf{e}_s + (q - q^{-1})^2\mathbf{w}_s, \quad s = 1, \dots, p-1, \quad (4.3)$$

$$C\mathbf{w}_s^\pm = \mu_s\mathbf{w}_s^\pm, \quad s = 1, \dots, p-1, \quad (4.4)$$

где

$$\mu_s = q^s + q^{-s}, \quad 0 \leq s \leq p. \quad (4.5)$$

Умножение в $\mathcal{T}_q$ индуцируется умножением (1.10):

$$\mathbf{e}_r\mathbf{w}_s^\pm = \delta_{r,s}\mathbf{w}_s^\pm, \quad \mathbf{e}_r\mathbf{e}_s = \delta_{r,s}\mathbf{e}_s, \quad \mathbf{w}_r^\pm\mathbf{w}_s^\pm = 0. \quad (4.6)$$

4.2. H-базис. Собственными векторами оператора $H = -(Y + Y^{-1})$ являются

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= f_p, \quad \mathbf{f}_p = f_0, \quad \mathbf{f}_s = f_{p+s} + f_{p-s}, \\ \mathbf{u}_1^+ &= \frac{1}{q - q^{-1}}k_{p-1}, \quad \mathbf{u}_1^- = \frac{1}{q - q^{-1}}(u_{p+1} - u_{p-1} - k_{p-1}), \\ \mathbf{u}_s^+ &= \frac{[s]}{q - q^{-1}}(k_{p-s} + k_{p+s}), \quad \mathbf{u}_s^- = \frac{[s]}{q - q^{-1}}(u_{p+s} - u_{p-s} - k_{p-s} - k_{p+s}), \\ \mathbf{u}_{p-1}^+ &= \frac{1}{q - q^{-1}}(k_{2p-1} - u_1), \quad \mathbf{u}_{p-1}^- = \frac{1}{q - q^{-1}}(u_{2p-1} - k_{2p-1}), \\ \mathbf{u}_s &= \mathbf{u}_s^+ + \mathbf{u}_s^- = \frac{[s]}{q - q^{-1}}(u_{p+s} - u_{p-s}), \quad s = 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Действие оператора H на них определяется из (1.12):

$$Hf_0 = \mu_0 f_0, \quad Hf_p = \mu_p f_p, \quad Hf_s = \mu_s f_s + (q - q^{-1})^2 u_s, \quad s = 1, \dots, p-1, \quad (4.7)$$

$$Hu_s^\pm = \mu_s u_s^\pm, \quad s = 1, \dots, p-1, \quad (4.8)$$

с теми же собственными значениями (4.5).

4.3. Действие группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Операторы $\mathcal{S}$ и v сужаются на $\mathcal{T}_q$. То есть $\mathcal{T}_q$ является представлением группы $SL(2, \mathbb{Z})$. А именно, оператор $\mathcal{S}$ в $\mathcal{T}_q$ действует по следующим формулам:

$$\mathcal{S}e_s = f_s, \quad s = 0, \dots, p, \quad \mathcal{S}w_s^\pm = u_s^\pm, \quad s = 1, \dots, p-1, \quad (4.9)$$

и так как $T = q$ в $\mathcal{T}_q$, имеем $\mathcal{S}^2 = 1$. Отметим также, что в $\mathcal{T}_q$ выполняется равенство $\mathcal{S}C\mathcal{S}^{-1} = H$ как следствие формул (3.1) и (3.2).

§5. Доказательство теоремы 1.4

Пространство $\mathcal{T}_q$ и центр квантовой группы $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ из [6] имеют одинаковую размерность, равную $3p-1$. Далее поставим в соответствие элементам C -базиса (H -базиса) в $\mathcal{T}_q$ образы Радфорда (образы Дринфельда) q -характеров неприводимых представлений:

$$\begin{aligned} \omega_s w_s^+ &\leftrightarrow \widehat{\phi}^+(s), & \omega_{p-s} w_{p-s}^- &\leftrightarrow \widehat{\phi}^-(s), & s = 1, \dots, p-1, \\ p\sqrt{2p} e_p &\leftrightarrow \widehat{\phi}^+(p), & (-1)^{p+1} p\sqrt{2p} e_0 &\leftrightarrow \widehat{\phi}^-(p), \\ \omega_s u_s^+ &\leftrightarrow \chi^+(s), & \omega_{p-s} u_{p-s}^- &\leftrightarrow \chi^-(s), & s = 1, \dots, p-1, \\ p\sqrt{2p} f_p &\leftrightarrow \chi^+(p), & (-1)^{p+1} p\sqrt{2p} f_0 &\leftrightarrow \chi^-(p). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Это соответствие является изоморфизмом между $\mathcal{T}_q$ и центром квантовой группы $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ как коммутативными ассоциативными алгебрами.

При отождествлении (5.1) $\mathcal{T}_q$ совпадает с центром квантовой группы $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ как представление группы $SL(2, \mathbb{Z})$. В частности, соотношения $\mathcal{S}(\chi^\pm(s)) = \widehat{\phi}^\pm(s)$ для $s = 0, \dots, p$ в этом центре соответствуют соотношениям (4.9) в $\mathcal{T}_q$. Гауссов элемент v в обозначениях [6] записывается так:

$$v = \sum_{s=0}^p (-1)^{s+1} q^{-(s^2-1)/2} e_s + \sum_{s=1}^{p-1} (-1)^p q^{-(s^2-1)/2} \frac{q^s - q^{-s}}{\sqrt{2p}} \widehat{\varphi}(s), \quad (5.2)$$

где $\widehat{\varphi}(s) = \frac{p-s}{p} \widehat{\phi}^+(s) - \frac{s}{p} \widehat{\phi}^-(p-s)$ для $1 \leq s \leq p-1$ совпадает с ленточным элементом в $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$.

§6. Обсуждение результатов

Мы построили представление алгебры Гекке, определяющее [11] алгебру Верлинде логарифмической конформной $(1, p)$ -модели. Центр квантовой группы

$\overline{\mathcal{U}}_qsl(2)$ совпадает с симметризацией представления $\mathcal{Z}$, а $C = -(X + X^{-1})$ совпадает с элементом Казимира в $\overline{\mathcal{U}}_qsl(2)$. Возможно, все $\mathcal{Z}$ может быть реализовано как подалгебра в $\overline{\mathcal{U}}_qsl(2)$, при этом X будет реализован как умножение на элемент из $\overline{\mathcal{U}}_qsl(2)$.

Другая интересная задача, возникающая на этом пути — найти реализацию алгебры $\mathcal{H}$ на конформных блоках $(1, p)$ -моделей. Это может быть также полезно для конформных теорий поля с границей. Граничные состояния Ишибаши и Карди, возможно, отождествляются с операторами $C = -(X + X^{-1})$ и $H = -(Y + Y^{-1})$.

Благодарности. Мы благодарны Т. Сузуки, М. Касатани и Т. Кувабаре за многочисленные обсуждения, а также А. М. Семихатову за полезное обсуждение и советы по окончательному оформлению работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Gurarie, *Logarithmic operators in conformal field theory*, Nuclear Phys. B, **410**:3 (1993), 535–549; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9303160>.
- [2] A. M. Semikhatov, *Factorizable ribbon quantum groups in logarithmic conformal field theories*, <http://arxiv.org/abs/0705.4267>.
- [3] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *A rational logarithmic conformal field theory*, Phys. Lett. B, **386**:1–4 (1996), 131–137; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9606050>.
- [4] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Kazhdan–Lusztig correspondence for the representation category of the triplet W -algebra in logarithmic CFT*, <http://arxiv.org/abs/math/0512621>.
- [5] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Tensor structures arising from affine Lie algebras*, I, J. Amer. Math. Soc., **6**:4 (1993), 905–947; II, J. Amer. Math. Soc., **6**:4 (1993), 949–1011; III, J. Amer. Math. Soc., **7**:2 (1994), 335–381; IV, J. Amer. Math. Soc., **7**:2 (1994), 383–453.
- [6] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Modular group representations and fusion in logarithmic conformal field theories and in the quantum group center*, Comm. Math. Phys., **265**:1 (2006), 47–93; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0504093>.
- [7] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Indecomposable fusion products*, Nucl. Phys. B, **477**:1 (1996), 293–318; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9604026>.
- [8] J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Nonsemisimple fusion algebras and the Verlinde formula*, Comm. Math. Phys., **247**:3 (2004), 713–742; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0306274>.
- [9] M. Flohr, H. Knuth, *On Verlinde-like formulas in $c_{p,1}$ logarithmic conformal field theories*, <http://arxiv.org/abs/0705.0545>.
- [10] M. Flohr, *Bits and pieces in logarithmic conformal field theory*, Internat. J. Modern Phys. A, **18**:25 (2003), 4497–4592; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0111228>.
- [11] I. Cherednik, *Double Affine Hecke Algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [12] I. Cherednik, *Private communication*, Kyoto, 2004.

Московский физико-технический институт
e-mail: georg21a@yahoo.com
Физический Институт им. П. Н. Лебедева
e-mail: tipunin@gmail.com

Поступило в редакцию
24 апреля 2008 г.