Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Дюваль, В. Ю. Овсиенко, Лоренцевы мировые линии и производная Шварца, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 69–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:08:06

ТЕОРЕМА. Пусть туннельный цикл Γ единствен с точностью до гомотопии. Пусть, кроме того, на торах $\Lambda^\pm$ выполнены условия квантования. Тогда оператор $-h^2\Delta$ на M имеет два собственных числа $\lambda^\pm = E + O(h^2)$, причем расстояние между ними имеет вид

$$\lambda^+ - \lambda^- = \frac{h}{\pi} e^{-\rho/h} (\kappa(\eta_0) + O(h)).$$

Собственные функции $\varphi^\pm$, отвечающие этим собственным числам, имеют вид $\varphi^\pm = (K_{\Lambda^+}^{a^+}(1) \pm K_{\Lambda^-}^{a^-}(1)) + O(h)$, где K — канонический оператор Маслова, а $a^\pm$ — проекции на $\Lambda^\pm$ стоксовых точек, отвечающих одному и тому же туннельному циклу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сепаратрисы градиентно-гамильтонова поля ξ играют ту же роль в туннельных эффектах, что и антистоксовы канонические пути в одномерном случае [4]; отметим, что сепаратрисы векторного поля $i\xi$ (также градиентно-гамильтонова) аналогичны линиям Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Изд-во Удмуртского гос. унив., 1995.
2. Колокольцов В. Н. Изв. АН СССР, сер. матем., **46**, № 5, 994–1010 (1982).
3. Бабенко И. К., Нехорошев Н. Н. Матем. заметки, **58**, № 2, 643–652 (1995).
4. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, М., 1983.
5. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. Наука, М., 1976.
6. Косыгин Д. В., Минасов А. А., Синай Я. Г. УМН, **48**, вып. 4, 3–130 (1993).

Институт проблем механики РАН
Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
24 июня 1998 г.

УДК 514.7

Лоренцевы мировые линии и производная Шварца

© 2000. К. Дюваль, В. Ю. Овсиенко

Цель настоящей заметки — установить связь между классической производной Шварца и геометрией лоренцевых поверхностей постоянной кривизны.

1. Отправной точкой для нас послужил следующий факт (установленный совместно с Л. Гийо). Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$, на плоскости с лоренцевой метрикой $g = dx dy$. Если $f'(x) > 0$, то ее лоренцева кривизна, имеющая вид $\rho(x) = f''(x)(f'(x))^{-3/2}$, обладает следующим замечательным свойством:

$$\sqrt{f'(x)} \rho'(x) = S(f)(x), \quad (1)$$

где

$$S(f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 \quad (2)$$

обозначает производную Шварца функции f . (Хорошо известно, что производная Шварца определяет квадратичный дифференциал, и мы будем использовать обозначение $S(f)$ для $S(f)(x)dx^2$.)

2. Представляется естественным попытаться описать все лоренцевы метрики, обладающие этим свойством. Рассмотрим диффеоморфизм $f: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$, сохраняющий ориентацию; его график является «временеподобной» кривой на торе $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, снабженном метрикой $g = g(x, y) dx dy$, где $g(x, y)$ — положительная функция. Обозначим через t лоренцев натуральный параметр (также называемый собственным временем).

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы выполнялось равенство*

$$d\rho dt = S(f), \quad (3)$$

где f — произвольный диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}P^1$, сохраняющий ориентацию, необходимо и достаточно, чтобы метрика g имела вид

$$g = \frac{dx dy}{(axy + bx + cy + d)^2}, \quad (4)$$

где a, b, c, d — произвольные действительные числа.

Заметим, что уравнение (3) — не зависящая от координат форма равенства (1).

Метрика (4) неособа на подмножестве $\Sigma \subset \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, являющемся дополнением к графику дробно-линейного преобразования $y = -(bx + d)/(ax + c)$, связанного с множеством особых точек этой метрики. Очевидно, что Σ имеет топологию цилиндра $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$.

3. Скалярная кривизна метрики (4) постоянна: $R = 8(ad - bc)$. Хорошо известно (см. [9, 6]), что любая лоренцева метрика g постоянной кривизны локально приводится к следующему виду:

$$g = dx dy, \quad \text{если } R = 0, \quad (5)$$

$$g = \frac{8}{R} \frac{dx dy}{(x - y)^2}, \quad \text{если } R \neq 0. \quad (6)$$

В случае метрики (4) такое приведение глобально и может быть получено действием группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$.

4. Доказательство теоремы. Напомним, что кривизна кривой на (псевдо)римановой поверхности (Σ, g) определяется формулой $\rho = \omega(v, a)g(v, v)^{-3/2}$, где v обозначает вектор скорости, $a = \nabla_v v$ — ускорения (ω — форма площади, соответствующая метрике g , ∇ — связность Леви-Чивиты). Для временеподобной кривой $\tau \mapsto (x(\tau), y(\tau))$ на $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ мы получаем, что кривизна ρ как функция параметра τ равна

$$\rho = \frac{x'y'' - x''y'}{g^{1/2}(x'y')^{3/2}} - \frac{x'\partial_x g - y'\partial_y g}{g^{3/2}(x'y')^{1/2}}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \sqrt{g(v, v)} \varrho' = & -\frac{x'''}{x'} + \frac{3}{2} \left(\frac{x''}{x'} \right)^2 + \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 \\ & - x'^2 \left[\frac{\partial_x^2 g}{g} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_x g}{g} \right)^2 \right] + y'^2 \left[\frac{\partial_y^2 g}{g} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_y g}{g} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В правой части выражения (7) мы узнаем разность $S(y)(\tau) - S(x)(\tau)$ двух производных Шварца.

Покажем, что оставшиеся члены одновременно обращаются в нуль, если и только если метрика задана формулой (4). Действительно, предположим, что $g(x, y) = \partial_x \varphi(x, y) = \partial_y \tilde{\varphi}(x, y)$, причем $S(\varphi)(x) = S(\tilde{\varphi})(y) = 0$; тогда, очевидно, $\varphi(x, y) = (\alpha(y)x + \beta(y))/(\gamma(y)x + \delta(y))$ и $\tilde{\varphi}(x, y) = (\tilde{\alpha}(x)y + \tilde{\beta}(x))/(\tilde{\gamma}(x)y + \tilde{\delta}(x))$, причем выполняется условие унимодулярности: $\alpha\delta - \beta\gamma = \tilde{\alpha}\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1$. Поскольку $\partial_x \varphi(x, y) = 1/(\gamma(y)x + \delta(y))^2 = \partial_y \tilde{\varphi}(x, y) = 1/(\tilde{\gamma}(x)y + \tilde{\delta}(x))^2$, функции $\gamma, \delta, \tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}$ оказываются аффинными, что немедленно влечет за собой (4).

Теперь, подставляя $y = f(x)$, $\tau = x$ и используя определение натурального параметра: $g(v, v) = f'(x)(dx/dt)^2 = 1$, мы легко получаем формулу (3) из (7). $\square$

5. Интересно отметить, что данный подход приводит к определению «относительной» производной Шварца двух преобразований пространства $\mathbb{R}P^1$ (см. [4]).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\tau \mapsto (x(\tau), y(\tau))$ — кривая в $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, удовлетворяющая условиям теоремы. Уравнение (3) приобретает следующий вид:

$$d\varrho dt = S(x, y), \quad (8)$$

где $S(x, y)$ — относительная производная Шварца переменных x и y .

6. Напомним, что в классической теории Лиувилля римановых поверхностей постоянной кривизны производная Шварца естественно появляется в формуле преобразования кэлеровой метрики под действием конформных отображений (см. например [1, с. 118]).

Аналогичный факт справедлив в случае (вещественных) лоренцевых поверхностей: производная Шварца (2) конформного диффеоморфизма $f \in \text{Conf}(\Sigma, g) \cong \text{Diff}(\mathbb{R}P^1)$ метрики (6) играет роль препятствия к тому, чтобы диффеоморфизм f являлся изометрией (см. [5]). Конформные классы метрик (5) и (6) рассматривались в [2], где было показано, что эти классы симплектоморфны орбитам коприсоединенного представления группы Вирасоро. В этих работах производная Шварца появляется как 1-коцикл на группе $\text{Conf}(\Sigma, g)$ и определяет поведение метрики около конформной границы.

Заметим, что результаты настоящей заметки не имеют непосредственного отношения к цитированным выше.

7. Недавно Е. Гис доказал, что для любого диффеоморфизма $f: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$, производная Шварца $S(f)$ обращается в нуль по крайней мере в четырех геометрически различных точках [3] (см. также [7, 8]). Эта теорема была предложена Гисом как аналог классической теоремы о четырех вершинах: кривизна произвольной замкнутой плоской кривой имеет по крайней мере четыре геометрически различные критические точки. Таким образом, мы показали, что

теорема Гиса в действительности является теоремой о четырех вершинах для временноподобных замкнутых кривых на $\Sigma \subset \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ с лоренцевой метрикой постоянной кривизны (4).

Мы благодарны Л. Гийо за неоценимую помощь на начальной стадии работы, а также С. Лаззарини за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Наука, 1979.
2. Duval C., Guieu L. J. Geom. Phys., **33**, 103–127 (2000).
3. Ghys E. Cercles osculateurs et géométrie lorentzienne. Colloquium talk, Journée inaugurale du CMI, Marseille (February 1995).
4. Hubbard J. In: Riemann surfaces and related topics. Proc. of the Stony Brook Conference 1978 (I. Kra and B. Maskit, eds.). Ann. of Math. Stud., **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 257–275.
5. Kostant B., Sternberg S. In: Quantum theories and geometry (M. Cahen and M. Flato, eds.). Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, pp. 113–125.
6. Kulkarni R. Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **401**, 117–130 (1985).
7. Ovsienko V. Yu., Tabachnikov S. Selecta Math. (N.S.), **2**, No. 2, 297–307 (1996).
8. Tabachnikov S. In: Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 180 (34), 1997, pp. 229–239.
9. Wolf J. A. Spaces of constant curvature. McGraw-Hill, New York, 1967.

Université de la Méditerranée and CPT-CNRS
e-mail: duval@cpt.univ-mrs.fr
CNRS, Centre de Physique Théorique
e-mail: ovsienko@cpt.univ-mrs.fr

Поступило в редакцию
1 сентября 1998 г.

УДК 512.552.8+512.6

Однопараметрические оснащенные частично упорядоченные множества и их представления

© 2000. А. В. ЗАБАРИЛЛО, А. Г. ЗАВАДСКИЙ

Хорошо известно, что представления частично упорядоченных множеств были введены в начале 70-х годов Л. А. Назаровой и А. В. Ройтером [1] в связи с изучением представлений конечномерных алгебр [2]. Особенность матричных задач, соответствующих представлениям частично упорядоченных множеств, состоит в том, что в категории, определяющей такую задачу (и называемой вектроидом¹), все объекты и их кольца эндоморфизмов одномерны над заданным полем (см. [3]).

В настоящей работе эта классическая ситуация получает развитие в направлении рассмотрения таких матричных задач над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, которые соответствуют вектроидам не только с одномерными, но и с двумерными объектами, причем кольцо эндоморфизмов любого двумерного объекта предполагается изоморфным полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. В этом случае вектроид задается частично упорядоченным множеством с некоторой простой дополнительной структурой, которое мы называем оснащенный. Цель работы — дать полную классификацию представлений однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств.

¹Вектроид — это спектроид [3], вложенный в категорию векторных пространств.