Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Кристофер, П. Мардешич, Проблема монодромии и инфинитезимальная проблема фокуса, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 1, 27–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2980>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:08:02

УДК 517.9

Проблема монодромии и инфинитезимальная проблема фокуса*

© 2010. К. КРИСТОФЕР, П. МАРДЕШИЧ

Мы рассматриваем семейства абелевых интегралов, возникающие при возмущениях гамильтоновых систем на плоскости. *Инфинитезимальная проблема центра–фокуса* состоит в том, чтобы выяснить условия, при которых эти интегралы тождественно равны нулю. Эта проблема тесно связана с *проблемой монодромии*, в которой спрашивается, когда монодромия исчезающего цикла порождает все гомологии линий уровня гамильтониана. Мы решаем оба вопроса для случая, когда гамильтониан гиперэллиптический. В качестве бонуса получается решение соответствующих задач для нульмерных абелевых интегралов, введенных Гавриловым и Мовасати.

§1. Введение

Ослабленная шестнадцатая проблема Гильберта в формулировке Арнольда [1] выглядит следующим образом:

Проблема 1.1 (ослабленная шестнадцатая проблема Гильберта). Пусть $F \in \mathbb{C}[x, y]$ и $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, где $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$. Рассмотрим систему уравнений

$$dF + \varepsilon\omega = 0. \quad (1.1)$$

Найти оценку сверху для числа вещественных предельных циклов системы (1.1) при малых ε .

Эта задача приводит к необходимости изучать нули абелева интеграла

$$I(t) = \int_{\delta(t)} \omega, \quad (1.2)$$

где $\delta(t)$ — семейство циклов, лежащее в $F^{-1}(t)$. Если интеграл не равен нулю тождественно, то предельные циклы системы (1.1) соответствуют нулям функции $I(t)$ при значениях t общего положения.

Таким образом, в первом приближении нам нужно решить следующую более простую задачу.

Проблема 1.2 (инфинитезимальная шестнадцатая проблема Гильберта). Оценить сверху число нулей абелева интеграла (1.2) через степени многочленов F , P и Q .

Если абелев интеграл — тождественный нуль, то он не дает никакой информации о предельных циклах системы (1.1) и нужно использовать теорию возмущений высших порядков. Поэтому интересно понять, при каких условиях такое может случиться.

* Авторы благодарны университетам Бургундии и Плимута соответственно за гостеприимство, оказанное во время подготовки этой работы.

В классической проблеме центра–фокуса требуется охарактеризовать центры полиномиальных векторных полей на плоскости. Задача о том, когда абелев интеграл тождественно равен нулю вдоль исчезающего цикла, может рассматриваться как инфинитезимальная версия этой проблемы.

Проблема 1.3 (инфинитезимальная проблема центра–фокуса). Охарактеризовать условия, при которых абелев интеграл $I(t)$ из (1.2) тождественно равен нулю вдоль исчезающего цикла $\delta(t)$, соответствующего морсовской особой точке p функции F .

Если такой цикл $\delta(t)$ существует, то будем говорить, что система (1.1) имеет *инфинитезимальный центр* в точке p .

Проблему 1.3 для функций F общего положения решил Ильяшенко, который доказал, что для таких функций F монодромия действует транзитивно на первой группе гомологий слоя общего положения. Таким образом, из обращения интеграла $I(t)$ в нуль вытекает обращение в нуль аналогичного интеграла вдоль всех циклов в $H_1(F^{-1}(t))$. В свою очередь, отсюда следует, что форма ω относительно точна.

Условие, что зануление некоторого абелева интеграла (1.2) вдоль семейства циклов $\delta(t)$ влечет за собой относительную точность формы ω , Франсуаз назвал условием (*). При этом условии в работе [9] (см. также [17]) он дал алгоритм для вычисления членов более высокого порядка в функции смещения.

В силу результатов Бонне и Димки [2] (и, в более ограничительной ситуации, Гаврилова [10] и Ильяшенко [13]), если предположить, что наши абелевы интегралы обращаются в нуль на всех циклах, то форма $P(F)\omega$ должна быть относительно точна для некоторого многочлена P , нули которого соответствуют некоторым исключительным слоям. Итак, условие (*) выполняется автоматически (возможно, после умножения формы ω на множитель $P(F)$), если мы сможем показать, что под действием монодромии цикл $\delta(t)$ порождает все гомологии слоя общего положения отображения F над $\mathbb{Q}$.

Отсюда приходим к следующей естественной задаче:

Проблема 1.4 (задача монодромии). При каких условиях на F $\mathbb{Q}$ -подпространство в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Q})$, порожденное образами исчезающего цикла морсовской точки под действием монодромии, совпадает со всей группой $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Q})$?

Основной мотивировкой для написания этой работы послужило желание решить последние две задачи для случая $F(x, y) = y^2 + f(x)$ (*гиперэллиптический случай*). Более подробно, мы доказываем следующие две теоремы.

Теорема 1.5. Система (1.1) с функцией $F = y^2 + f(x)$ имеет инфинитезимальный центр с исчезающим циклом $\delta(t)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

- (i) форма ω относительно точна, т.е. $\omega = A dF + dB$, где $A, B \in \mathbb{C}[x, y]$;
- (ii) функция f разложима, т.е. $f = g \circ h$, и $\omega = \tilde{\omega} + \pi^* \eta$, где форма $\tilde{\omega}$ относительно точна, а цикл $\pi_* \delta(t)$ гомотопен нулю в множестве, заданном уравнением $y^2 + g(z) = t$, где $\pi(x, y) = (h(x), y) = (z, y)$.

Теорема 1.6. Пусть F имеет вид $y^2 + f(x)$, и пусть $\delta(t)$ — исчезающий цикл, соответствующий морсовской точке функции F . Тогда выполнено одно из следующих условий:

- (i) монодромия цикла $\delta(t)$ порождает группу гомологий $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Q})$;
- (ii) функция f разложима, т.е. $f = g \circ h$, и цикл $\pi_* \delta(t)$ гомотопен нулю в множестве, заданном уравнением $y^2 + g(z) = t$, где $\pi(x, y) = (h(x), y) = (z, y)$.

Для доказательства этих теорем мы прежде всего сведем их к аналогичным нульмерным задачам, которые затем и рассмотрим.

Определим нульмерный абелев интеграл, следуя Гаврилову и Мовасати [11].

Пусть $f \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен, а $\delta(t) \in H_0(f^{-1}(t))$ — 0-цикл, т.е. $\delta(t) = \sum n_i x_i(t) \in f^{-1}(t)$, $n_i \in \mathbb{C}$, причем $\sum n_i = 0$. Далее, пусть $\omega \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен (0-форма). Нульмерный абелев интеграл задается функцией

$$I_0(t) = \int_{\delta(t)} \omega := \sum n_i \omega(x_i(t)). \quad (1.3)$$

Цикл вида $\delta(t) = x_i(t) - x_j(t)$, где $f(x_i(t)) = f(x_j(t)) = t$, называется *простым циклом*.

Мы охарактеризуем обращение в нуль нульмерных абелевых интегралов вдоль простых циклов (*нульмерная инфинитезимальная проблема центра и фокуса*) и условия, при которых простой цикл порождает всю приведенную группу гомологий $H_0(f^{-1}(t))$ слоя общего положения (*нульмерная проблема монодромии*).

Теорема 1.7. Пусть $f, \omega \in \mathbb{C}[x]$, и пусть $\delta(t) = x_i(t) - x_j(t)$ — простой цикл в слое общего положения отображения f . Абелев интеграл $I(t) = \int_{\delta(t)} \omega$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда существует такой многочлен h степени $\deg(h) > 1$, что $f = g \circ h$ и $\omega = \eta \circ h$ для некоторых многочленов g и η и при этом $h_*\delta(t) = \tilde{\delta}(t)$ — тривиальный цикл для g (т.е. $h(x_i) = h(x_j)$).

Теорема 1.8. Пусть $\delta(t) = x_i(t) - x_j(t)$ — простой цикл в слое общего положения отображения f . Тогда либо

(i) цикл $\delta(t)$ порождает приведенную группу гомологий $H_0(f^{-1}(t))$, либо

(ii) многочлен f разлагается в композицию $f = g \circ h$ ($\deg(h) > 1$) и $h_*\delta(t) = \tilde{\delta}(t)$ — тривиальный цикл для g .

Основными инструментами в доказательстве этих теорем являются теорема Люрота о расширениях полей и теорема Бернсайда–Шура о действиях групп с регулярной циклической подгруппой. Мы напомним обе теоремы ниже в §2.

Замечание 1.9. Если цикл $\delta(t)$ не простой, то сформулированные выше теоремы неверны. Контрпример получается, если взять в качестве $f(x)$ многочлен Чебышева $T_p(x)$ простой степени. Этот случай подробно исследуется в заключительном параграфе.

Аналогично, многочлен $F(x, y) = y^2 + T_p(x)$ дает контрпример к обобщениям теорем 1.5 и 1.6.

Представленные здесь идеи близки по духу к начатому Брискиным, Франсуазом и Йомдиным исследованию *композиционной гипотезы*, в которой причиной существования инфинитезимального центра для уравнения Абеля является имеющаяся в уравнении симметрия ([3]–[5], [14]–[16])¹. Это наводит на мысль, что указанный принцип может оказаться хорошим и в других контекстах.

¹ Авторы благодарны рецензенту, указавшему на пропущенные ими ссылки на близкие работы о моментах уравнения Абеля.

§2. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения из теории групп.

Определение 2.1. 1. Пусть группа G действует на конечном множестве S . Говорят, что это действие *импримитивно*, если существует такое нетривиальное разложение $S = \bigcup S_i$ множества S , что для любого $g \in G$ и любого номера i элемент g переводит S_i в S_j для некоторого j . Действие называется *примитивным*, если оно не является импримитивным.

2. Действие *транзитивно*, если для любых двух элементов $s_1, s_2 \in S$ некоторый элемент $g \in G$ переводит s_1 в s_2 .

3. Действие *2-транзитивно*, если для любых двух пар (s_1, s_2) и (s_3, s_4) элементов из S некоторый элемент $g \in G$ переводит s_1 в s_3 , а s_2 в s_4 .

4. Действие *регулярно*, если для любых двух элементов $s_1, s_2 \in S$ существует единственный элемент $g \in G$, переводящий s_1 в s_2 .

5. Для заданного $s \in S$ через G_s обозначается подгруппа всех элементов из G , оставляющих s неподвижным (*стабилизатор точки s*).

Следующая теорема является классической, но для удобства мы все же формулируем ее здесь.

Теорема 2.2 (Люрот). Пусть $k(t)$ — трансцендентное расширение поля k . Тогда любое подполе $K \subset k(t)$, такое, что $k \subsetneq K$, имеет вид $K = k(r)$ для некоторого $r \in k(t)$.

Предложение 2.3. Пусть группа G транзитивно действует на конечном множестве S . Это действие импримитивно тогда и только тогда, когда для некоторого элемента $s \in S$ существует такая подгруппа $H \subset G$, что

$$G_s \subsetneq H \subsetneq G, \quad (2.1)$$

где G_s — стабилизатор элемента s в G .

Доказательство. Пусть действие группы G на S импримитивно, и пусть S_0 — подмножество в разложении множества S , содержащее точку s . Определим H как подгруппу в G , состоящую из всех элементов, относительно которых S_0 неподвижно. Поскольку S_0 нетривиально, оно должно содержать более одного элемента и строго содержаться в S . Так как G действует транзитивно, то H должно поэтому быть строго больше, чем G_s , но меньше, чем G .

Обратно, если выполнено (2.1), то можно рассмотреть орбиту элемента s под действием подгруппы H ; обозначим ее через S_1 . Она не может совпадать со всем S , так как иначе H совпадала бы с G (ибо H уже содержит G_s). Однако она должна содержать еще какие-то элементы помимо s . Рассмотрим теперь действие группы G на S_1 . Если $s' \in g_1(S_1) \cap g_2(S_1)$, то существуют такие $h_1, h_2 \in H$, что $g_1 h_1(s) = s' = g_2 h_2(s)$. Таким образом, $h_2^{-1} g_2^{-1} g_1 h_1 \in G_s$, и потому $g_2^{-1} g_1 \in H$ и $g_1(S_1) = g_2(S_1)$. Итак, образы множества S_1 под действием группы G дают разбиение множества S , на котором группа G действует импримитивно.

Напомним, что аффинная группа $\text{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ — это группа всех аффинных преобразований группы $\mathbb{Z}_p$. То есть это группа всех отображений множества $\mathbb{Z}_p$ в себя, имеющих вид $x \mapsto ax + b$ для $a, b \in \mathbb{Z}_p$, где умножение — это композиция. Заметим, что каждый элемент из $\text{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ оставляет на месте не более чем один элемент из $\mathbb{Z}_p$. Этот факт будет использован в доказательстве теоремы 3.8.

Теорема 2.4 (Бернсайд–Шур). *Каждая примитивная конечная группа перестановок, содержащая регулярную циклическую подгруппу, либо 2-транзитивна, либо перестановочно изоморфна подгруппе аффинной группы $\text{Aff}(\mathbb{Z}_p)$, где число p простое.*

Доказательство. См. [6] или [7].

§3. Группы монодромии многочленов

Пусть $f(x)$ — многочлен степени $n > 0$. Рассмотрим решения $x_i(t)$ уравнения $f(x) = t$. Пусть Σ — множество критических значений $t \in \mathbb{C}$, т.е. таких значений $f(x) = t$, что x — решение уравнения $f'(x) = 0$. Очевидно, что таких значений не более $n - 1$. Функции $x_i(t)$ корректно определены для $t \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Группа $G = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma)$ действует на функциях $x_i(t)$. Это действие всегда транзитивно (предложение 3.2).

Определение 3.1. Указанная группа G вместе с ее действием на множестве функций x_i называется *группой монодромии* многочлена f и обозначается через $\text{Mon}(f)$.

Предложение 3.2. Пусть f — многочлен степени n над $\mathbb{C}$. Тогда группа монодромии $\text{Mon}(f)$ транзитивна и содержит циклическую подгруппу порядка n , регулярно действующую на множестве корней многочлена f .

Доказательство. Первое утверждение следует из второго. При больших t корни x_i допускают разложение

$$x_i = \omega^r t^{1/n} + O(t^{1/n-1}),$$

где ω — корень n -й степени из единицы. Поэтому, взяв достаточно большую петлю в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, получаем элемент группы G , являющийся n -циклом. Этот элемент порождает циклическую подгруппу в G , регулярно действующую на корнях уравнения $f(x) = t$.

Элементы группы монодромии, очевидно, лежат в группе Галуа уравнения $f(x) - t = 0$ над $\mathbb{C}(t)$. Следующая фундаментальная теорема [8] утверждает, что таким образом можно получить все элемент группы Галуа.

Теорема 3.3. Группа монодромии $\text{Mon}(f)$ многочлена f изоморфна группе Галуа уравнения $f(x) - t = 0$, где $f(x) - t$ рассматривается как многочлен над $\mathbb{C}(t)$.

Определение 3.4. Будем говорить, что многочлен $f(x)$ *разложим*, если существуют два многочлена g и h , степень каждого из которых больше единицы, таких, что $f(x) = g(h(x))$.

Лемма 3.5. Пусть $f(x)$ — многочлен над $\mathbb{C}$, представимый в виде $g(h(x))$, где g и h — рациональные функции степени больше единицы над $\mathbb{C}$. Тогда существует разложение $f(x) = \tilde{g}(\tilde{h}(x))$, где $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$ — многочлены над $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $h(x) = r(x)/s(x)$, где r и s — многочлены над $\mathbb{C}$. Если m — преобразование Мёбиуса, то без ограничения общности разложение многочлена f можно переписать в виде $f = \tilde{g} \circ \tilde{h}$, где $\tilde{g} = g \circ m^{-1}$ и $\tilde{h} = m \circ h$. Таким образом, можно считать, что $\tilde{h} = \tilde{r}/\tilde{s}$, где $\deg(\tilde{s}) < \deg(\tilde{r})$ и как $\tilde{r}$, так и $\tilde{s}$ — приведенные многочлены. Теперь

$$\tilde{g}(\tilde{h}(x)) = \frac{\prod_{i=1}^q \alpha_i \tilde{r}(x) + \beta_i \tilde{s}(x)}{\prod_{i=1}^q \gamma_i \tilde{r}(x) + \delta_i \tilde{s}(x)}$$

с некоторыми постоянными $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{C}$. Если у $\alpha_i \tilde{r} + \beta_i \tilde{s}$ есть общий множитель с $\gamma_j \tilde{r} + \delta_j \tilde{s}$, то эти два многочлена обязаны совпадать с точностью до постоянного множителя, так что можно считать, что выписанная выше дробь не допускает дальнейших сокращений. Поскольку $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ — многочлен, выражение $\prod \gamma_i \tilde{r} + \delta_i \tilde{s}$ должно быть постоянной, так что знаменатель не зависит от $\tilde{r}$, а $\tilde{s}$ должно быть константой (и поэтому $\tilde{s} = 1$). Отсюда непосредственно следует нужный результат.

Предложение 3.6. Пусть f , как и выше, — многочлен, и пусть $G = \text{Mon}(f)$ — его группа монодромии. Тогда

(i) действие группы G импримитивно в том и только в том случае, когда многочлен f неразложим;

(ii) действие 2-транзитивно в том и только в том случае, когда разделенная разность

$$\Delta(x, y) = (f(x) - f(y))/(x - y)$$

является неприводимым многочленом.

Доказательство. (i) Пусть $t \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, и пусть s — корень многочлена $f(x) - t$, а G_s — стабилизатор точки s . Согласно предложению 2.3,

$$G_s \subsetneq H \subsetneq G. \quad (3.1)$$

Поле расщепления многочлена $f(x) - t$ над $\mathbb{C}(t)$ есть в точности $\mathbb{C}(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Применяя соответствие Галуа, получаем

$$\mathbb{C}(x_k(t)) \supsetneq K \supsetneq \mathbb{C}(t), \quad (3.2)$$

где K — неподвижное поле подгруппы H , а $x_k(t)$ — корень уравнения $f(x) = t$, соответствующий точке s . По теореме Люрота получаем $K = \mathbb{C}(r(x_k))$ для некоторой рациональной функции r над $\mathbb{C}$. Тогда из (3.2) следует, что $t = v(r(x_k))$ для некоторой рациональной функции v . Итак, $f(x) = v(r(x))$, и лемма 3.5 показывает, что v и r можно в действительности выбрать многочленами. Обратно, если дано разложение $f(x) = v(r(x))$, то мы возьмем $K = \mathbb{C}(r(x))$ и получим (3.1) из (3.2) с помощью соответствия Галуа.

(ii) Пусть $y = x_1$ — корень уравнения $f(x) - t = 0$. Тогда для любого другого корня z того же уравнения справедливо соотношение

$$f(z) - f(y) = 0 = (z - y)R(z, y),$$

где $R(x, y)$ — некоторый многочлен, который поэтому должен содержать минимальный многочлен для z над $\mathbb{C}(y, t) = \mathbb{C}(y)$. Ясно, что G 2-транзитивна в том и только в том случае, если существует автоморфизм поля $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, оставляющий элемент y на месте и переводящий z в любой из корней от x_2 до x_n . В свою очередь, так может быть, если и только если многочлен R неприводим.

Определение 3.7. Единственный многочлен $T_n(x)$, удовлетворяющий соотношению $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, называется *многочленом Чебышева степени n* . Эквивалентным образом, можно потребовать, чтобы $T_n((z + z^{-1})/2) = (z^n + z^{-n})/2$.

Из определения следует, что многочлен Чебышева T_n имеет $n - 1$ попарно различных критических точек, в которых $T_n = \pm 1$. Обратно, можно показать, что любой многочлен $T(x)$, у которого ровно два критических значения и все критические точки различны, переводится в $T_n(x)$ для некоторого n композицией справа и слева с подходящими линейными функциями.

Мы благодарны Петеру Мюллеру, обратившему наше внимание на следующий результат. Для полноты мы приводим и доказательство.

Теорема 3.8. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n , а $G = \text{Mon}(f)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:

- (i) действие группы G на x_i 2-транзитивно;
- (ii) действие группы G на x_i импримитивно;
- (iii) многочлен f эквивалентен многочлену Чебышева T_p , где число p простое;
- (iv) многочлен f эквивалентен x^p , где число p простое.

Замечание 3.9. В частности, вопрос о том, является ли f композицией многочленов, решается очень просто: достаточно выяснить, факторизуется ли многочлен, являющийся разделенной разностью, отбросив указанные выше два исключительных случая. Под «эквивалентностью» понимается композиция справа и слева с линейными функциями.

Доказательство теоремы 3.8. Используя предложение 3.2, мы можем применить теорему Бернсайда–Шура и показать, что группа G должна быть либо 2-транзитивной, либо импримитивной, либо подгруппой группы $\text{Aff}(\mathbb{Z}_p)$. Заметим, что в последнем случае $n = p$ и каждый элемент из $\text{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ оставляет неподвижным, самое большее, один элемент из $\mathbb{Z}_p$. Это значит, что для каждого критического значения многочлена f существует не более одного корня x_i , который остается неподвижным при обходе вокруг этого значения.

Теперь предположим, что многочлен f имеет r различных критических значений $t_1, \dots, t_r$ и что f имеет r_i различных критических точек, отвечающих критическому значению t_i . Обозначим кратности корней производной f' в этих критических точках через $m_{i,1}, \dots, m_{i,r_i}$. Так как корень кратности $m_{i,j}$ дает цикл порядка $m_{i,j} + 1$, то для всех i должно быть

$$n - 1 \leq \sum_{j=1}^{r_i} (m_{i,j} + 1) \leq n, \quad (3.3)$$

ибо, самое большее, один из корней x_i остается неподвижным при обходе вокруг каждого критического значения. Суммируя по i эти соотношения, получаем

$$r(n - 1) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_i} (m_{i,j} + 1) \leq rn. \quad (3.4)$$

Но число корней производной f' с учетом кратности есть в точности сумма чисел $m_{i,j}$, и поэтому

$$r(n - 1) \leq (n - 1) + \sum_{i=1}^r r_i \leq rn. \quad (3.5)$$

Поскольку сумма чисел r_i не превосходит $n - 1$, мы получаем $r \leq 2$.

Если $r = 1$, то формула (3.5) показывает, что $r_1 = 1$, и поэтому многочлен $f(x)$ должен иметь корень кратности n . Это в точности случай (iv) (заметим, что n простое).

Если $r = 2$, то нужно, чтобы $n - 1 \leq r_1 + r_2 \leq n + 1$. Но так как r_i не превосходит $n/2$, то это означает, что оба числа r_i лежат в интервале от $(n - 1)/2$ до $n/2$. Отсюда следует, что каждый корень производной f' должен быть простым, а

значит, многочлен f получается линейным преобразованием из некоторого многочлена Чебышева T_n с простым n .

§4. Доказательство нульмерных теорем

После освоения предварительной информации нульмерные теоремы доказываются непосредственно.

4.1. Доказательство теоремы 1.7. Пусть $\delta(t) = x_i(t) - x_j(t)$ — простой цикл, и пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}(x)$ — поле всех рациональных функций $R \in \mathbb{C}(x)$, таких, что $R(x_i(t)) = R(x_j(t))$. Очевидно, что $\mathbb{C} \subset \mathcal{F}$, а по условиям теоремы и f , и ω оба лежат в $\mathcal{F}$, так что это множество содержит хотя бы один нетривиальный элемент. Однако x не лежит в $\mathcal{F}$, так что

$$\mathbb{C} \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathbb{C}(x).$$

По теореме Люрота существует нетривиальная рациональная функция $h(x)$, обязательно имеющая степень больше единицы, такая, что поле $\mathcal{F}$ ею порождается. В частности, f и ω — рациональные функции от $h(x)$. По лемме 3.5 отсюда следует, что после преобразования Мёбиуса образующая $h(x)$ может быть выбрана в виде многочлена, а f и ω — многочлены от $h(x)$. Так как $h(x) \in \mathcal{F}$, то $h(x_i) = h(x_j)$, и доказательство закончено.

4.2. Доказательство теоремы 1.8. Пусть $\delta(t) = x_i(t) - x_j(t)$ — простой цикл, и пусть $G = \text{Mon}(f)$ — группа монодромии многочлена f . Рассмотрим граф с вершинами $x_1, \dots, x_n$, ребра которого суть все пары $\{x_r, x_s\}$, для которых существует такой элемент $\sigma \in G$, что $\{\sigma(x_i), \sigma(x_j)\} = \{x_r, x_s\}$. Каждая вершина лежит по крайней мере на одном ребре, поскольку G транзитивна.

Если два корня x_r и x_s лежат в одной связной компоненте графа, то мы, очевидно, можем получить $x_r - x_s$ как сумму членов вида $\pm(\sigma_k(x_i) - \sigma_k(x_j))$. Итак, если монодромия цикла $\delta(t)$ не порождает всю группу $H_0(f^{-1}, \mathbb{Z})$, то граф должен иметь более одной связной компоненты. Пусть S — связная компонента графа, содержащая x_i и x_j .

Каждый элемент группы G естественным образом определяет автоморфизм графа. Пусть $H \subset G$ — подгруппа, состоящая из элементов, переводящих S в себя. Очевидно, что H содержит G_{x_i} а также некоторый элемент σ_{ij} , переводящий x_i в x_j . Однако если граф не связан, то H строго меньше, чем G . Итак, согласно доказательству предложения 3.6, многочлен $f(x)$ разложим, причем $f(x) = g(h(x))$, где $h(x)$ порождает неподвижное поле подгруппы H . Наконец, $h(x_j) = \sigma_{ij}(h(x_i)) = h(x_i)$, поскольку σ_{ij} лежит в H .

§5. Инфинитезимальная проблема центра–фокуса в гиперэллиптическом случае

Предложение 5.1. Пусть ω — полиномиальная 1-форма, а $F(x, y) = y^2 + f(x)$ — многочлен. Тогда существуют такие многочлены $A, B \in \mathbb{C}[x, y]$ и $g \in \mathbb{C}[x]$, что

$$\omega = A dF + dB + yg dx.$$

Доказательство. Прежде всего, ясно, что $\omega = dB'(x, y) + A'(x, y) dx$ для подходящим образом подобранных многочленов $A', B' \in \mathbb{C}[x, y]$. Тогда по индукции, используя тождество

$$a(x)y^{n+2} dx = \frac{n+2}{2}A(x)f'(x)y^n dx + d(A(x)y^{n+2}) - \frac{n+2}{2}A(x)y^n dF,$$

где $A(x)$ — первообразная функции $a(x)$, получаем доказываемый результат.

Теперь мы докажем теорему 1.5; в силу предложения 5.1 достаточно рассмотреть случай, когда $\omega = yk(x) dx$.

Без ограничения общности можно считать, что инфинитезимальный центр находится в начале координат и что переменная x отмасштабирована таким образом, что $f(x) = x^2 + O(x^3)$. Определим аналитическую функцию X как единственное решение уравнения

$$X^2 = f(x), \quad X = x + O(x^2).$$

В координатах (X, y) исчезающие циклы можно перепараметризовать так, чтобы они стали окружностями $X^2 + y^2 = t$. Кроме того, наш абелев интеграл (1.2) принимает вид

$$\int_{\delta(t)} yk(x) dx = \int_{X^2+y^2=t} ym(X)X dX,$$

где

$$m(X(x)) = \frac{2k(x)}{f'(x)}.$$

Очевидно, что этот интеграл обращается в нуль при малых X тогда и только тогда, когда $k(0) = 0$, а функция $m(X)$ четна относительно X . Иными словами,

$$m(X(x)) = \phi(X(x)^2) = \phi(f(x))$$

для некоторой аналитической функции ϕ . Итак,

$$2k(x) = f'(x)\phi(f(x)).$$

Выбирая в качестве Φ первообразную функции ϕ , удовлетворяющую условию $\Phi(0) = 0$, а в качестве K — первообразную функции $2k$ с условием $K(0) = 0$, получаем

$$K(x) = \Phi(f(x)).$$

Это значит, что абелев интеграл от $K(x)$ вдоль цикла, определенного функцией $f(x) = X^2$, равен нулю, и в силу доказательства теоремы 1.7 в предыдущем параграфе и K , и f должны быть сложными функциями, получаемыми композицией с одним и тем же многочленом $h(x)$, $K = r \circ h$ и $f = g \circ h$.

Окончательно, полагая $\pi(x, y) = (h(x), y) = (z, y)$, находим, что

$$\omega = yk(x) dx = \frac{yr'(h(x))h'(x) dx}{2} = \pi^* \left(\frac{yr'(z) dz}{2} \right).$$

Этим завершается доказательство теоремы; нужно лишь заметить, что прямой образ исчезающего цикла есть цикл, гомотопный нулю в координатах (z, y) . Это так, поскольку исчезающий цикл лежит на семействе парабол $X + y^2 = t$.

§6. Проблема монодромии в гиперэллиптическом случае

Будем рассматривать линии уровня $\{H = t\}$ гамильтониана $H = y^2 - f(x)$ как двулистное накрытие комплексной плоскости $\mathbb{C}$, задаваемое проекцией на ось x . Листы накрытия разветвляются в корнях уравнения $f(x) = t$. Выбирая, как и выше, Σ в качестве множества критических значений, позволим переменной t пробегать множество $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и выясним, как при этом ведет себя группа гомологий $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Z})$. Мы хотим связать эту группу с группой монодромии многочлена $f(x)$. Если x стремится к бесконечности вдоль положительной

части вещественной оси, то один из двух листов можно считать «нижним», а другой — «верхним» в соответствии со знаком в формуле $y = \pm x^{n/2}$. Через τ обозначим преобразование накрытия, переводящее y в $-y$ и не меняющее x .

Рис. 1. Петли L_i

Через $H_1^c(F^{-1}(t), \mathbb{Z})$ обозначим группу гомологий с замкнутыми носителями слоя $F^{-1}(t)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Это позволяет рассматривать неограниченные замкнутые кривые. Пусть $x_i(t)$ — корни уравнения $f(x) = t$. В общем положении у них различные мнимые части, и поэтому любой замкнутый путь в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ можно деформировать таким образом, что только два из корней x_i могут иметь одну и ту же мнимую часть в одно и то же время. Иными словами, любой элемент из $\text{Mon}(f)$ можно разложить в некоторое число перемен местами корней x_i с соседними мнимыми частями.

Пусть вначале корни x_i перенумерованы в порядке убывания их мнимых частей для некоторого значения t , близкого к нулю. Через L_i обозначим путь, приходящий из бесконечности (с положительного направления вещественной оси) на верхнем листе, обходящий вокруг x_i в положительном направлении и возвращающийся на бесконечность по нижнему листу. Очевидно, что контур $\tau(L_i) + L_i$ гомотопен нулю, так что элементы L_i порождают группу $H_1^c(F^{-1}(t), \mathbb{Z})$. Кроме того, элементы $L_i - L_{i+1}$ порождают группу $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Z})$.

В результате перемены местами x_i и x_{i+1} элемент L_{i+1} переходит в L_i , а элемент L_i — в $2L_i - L_{i+1}$. Это слишком сложно для изучения в общем случае, за исключением очень специальных систем. Вместо этого мы временно будем работать с группой коэффициентов $\mathbb{Z}_2$. Иными словами, рассмотрим образы элементов L_i в $H_1^c(F^{-1}(t), \mathbb{Z}_2)$ и $L_i - L_{i+1}$ в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Z}_2)$.

По модулю 2 переменна местами x_i и x_{i+1} переводит L_{i+1} в L_i , а L_i — в L_{i+1} . Иными словами, действие $\text{Mon}(f)$ на $L_i \pmod{2}$ в точности такое же, как и на x_i .

Теперь мы применим результаты теоремы 3.8, чтобы доказать теорему 1.6. В силу теоремы 3.8 достаточно рассмотреть четыре случая.

Ниже будет показано, что случаи (i) и (ii) теоремы 3.8 соответствуют случаям (i) и (ii) теоремы 1.6. Случай (iii) можно рассмотреть, видоизменяя соответствующим образом доказательство, использованное в случае (i), а в случае (iv) гамильтониан не имеет морсовских точек, а значит, и инфинитезимальных центров.

Случаи (i) и (iii). Если группа монодромии многочлена f 2-транзитивна, то можно найти преобразование, которое переводит два произвольно выбранных корня x_i в любые другие два. Поскольку по модулю 2 действие на петлях L_i такое же, как и на x_i , можно найти элемент группы монодромии, переводящий $L_i - L_{i+1}$ в $L_j - L_{j+1}$ по модулю 2 для всех i и j .

Далее, исчезающий цикл $\delta(t)$ образуется при слиянии двух из этих x_i и, следовательно, должен соответствовать одному из $L_k - L_{k+1}$ для некоторого k . Таким образом, существуют такие пути ℓ_i в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, что

$$\sigma(\ell_i)\delta(t) = L_i - L_{i+1} \pmod{2}$$

для всех i .

Пусть теперь $N = 2\lfloor(n-1)/2\rfloor$. Тогда элементы $L_i - L_{i+1}$ образуют базис в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Z})$. Из приведенного выше обсуждения получаем, что

$$\begin{pmatrix} \sigma(\ell_1)\delta(t) \\ \sigma(\ell_2)\delta(t) \\ \vdots \\ \sigma(\ell_N)\delta(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} L_1 - L_2 \\ L_2 - L_3 \\ \vdots \\ L_N - L_{N+1} \end{pmatrix},$$

где матрица A сводится к единичной при приведении по модулю 2. В частности, A обратима, так как ее определитель не равен нулю mod 2, и в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Z})$ можно выбрать базис из сумм элементов $\sigma(\ell_i)\delta(t)$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Иными словами, $\delta(t)$ порождает $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{Q})$. Это дает нам случай (i) теоремы 1.6.

Заметим, что в случае (iii) группа монодромии не 2-транзитивна. Тем не менее все же возможно представить каждый элемент $L_i - L_j$ над $\mathbb{Z}_2$ как сумму элементов $\sigma(\ell_k)\delta(t)$. Это непосредственно следует из того, как действует группа $\mathbb{Z}_p$, согласно предложению 3.2, на корни и, значит, на L_i над $\mathbb{Z}_2$. Затем доказательство продолжается, как и выше.

Случай (ii). В этом случае можно предположить, что группа $\text{Mon}(f)$ импримитивна (но не 2-транзитивна) на корнях уравнения $f(x) = t$. По теореме 1.8 функция $f(x)$ разлагается в композицию $f(x) = g(h(x))$, где $h(x_i) = h(x_j)$. Это приводит к случаю (ii) теоремы 1.6, как только мы заметим, что прямой образ исчезающего цикла для значений t , близких к бифуркационному, гомотопен нулю посредством h .

Этим завершается доказательство теоремы 1.6.

§7. Обобщенная монодромия, инфинитезимальные проблемы и многочлены Чебышева

В этом последнем параграфе нам хотелось бы изучить возможность обобщения инфинитезимальной проблемы центра-фокуса или проблемы монодромии на случай цикла $\delta(t)$, лежащего в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$. Мы покажем, что многочлены

Чебышева в этом случае дают контрпримеры как к теореме 1.5, так и к теореме 1.6. Иными словами, в чебышевском случае в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$ имеются нетривиальные подпространства, инвариантные относительно монодромии, и можно выбрать цикл $\delta(t)$ в таком подпространстве и 1-форму ω таким образом, чтобы ни ω не была относительно точной, ни $f(x)$ не был разложимым.

Мы выдвигаем следующую гипотезу в духе теоремы 1.6.

Гипотеза 7.1. Если в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$ есть нетривиальное подпространство, инвариантное относительно монодромии, то либо многочлен f имеет разложение $f = g \circ h$, либо он эквивалентен или многочлену x^p , или многочлену Чебышева T_p для некоторого простого p .

Для полноты было бы также интересно узнать, по аналогии с теоремами 1.5 и 1.6, должны ли произвольные циклы $\delta(t)$, лежащие в инвариантном подпространстве в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$, и произвольная 1-форма ω , для которой $\int_{\delta(t)} \omega \equiv 0$, также пропускаться через h при наличии разложения. Здесь эти вопросы не рассматриваются.

В нульмерном случае гипотеза 7.1 в действительности является теоремой. Согласно предложению 3.6 и теореме 3.8, если монодромия не импримитивна (так что многочлен f разложим), то либо f эквивалентен x^p или $T_p(x)$ для некоторого простого p , либо группа монодромии 2-транзитивна. В последнем случае классический результат [12, с. 306, теорема 16.6.15] состоит в том, что представление 2-транзитивной группы перестановками над $\mathbb{C}$ разлагается в два неприводимых подпредставления. Одно из них тривиальное, а другое реализуется в пространстве $\{\sum k_i x_i \mid k_i \in \mathbb{C}, \sum k_i = 0\}$, которое в точности совпадает с нашим пространством $H_0(f^{-1}(t), \mathbb{C})$.

Теорема 7.2. Пусть $f(x) = T_p(x)$ — многочлен Чебышева для некоторого простого $p > 2$, и пусть $F = y^2 + f(x)$.

(i) Пространство $H_0(f^{-1}(t), \mathbb{C})$ расщепляется в сумму $(p-1)/2$ инвариантных подпространств $W_{e^{2\pi ki/p}}$, $k = 1, \dots, (p-1)/2$. Кроме того, если $\delta(t) \in W_{e^{2\pi ki/p}}$, $k = 2, \dots, (p-1)/2$, то существует 0-форма ω , такая, что $\int_{\delta(t)} \omega \equiv 0$, но ω неразложима.

(ii) Пространство $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$ расщепляется в сумму $(p-1)/2$ инвариантных подпространств $V_{e^{2\pi ki/p}}$, $k = 1, \dots, (p-1)/2$. Далее, если $\delta(t) \in V_{e^{2\pi ki/p}}$, $k = 2, \dots, (p-1)/2$, то существует 1-форма ω , такая, что $\int_{\delta(t)} \omega \equiv 0$, но ω не является относительно точной.

Замечание 7.3. Достаточно было бы рассмотреть группы гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Q}(w)$ для некоторого корня из единицы w степени p .

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 7.2. Всюду предполагается, что n нечетно.

Напомним, что $T_n(x)$ определяется формулой

$$T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad \text{где } x = \cos \theta. \quad (7.1)$$

Очевидно, что T_n имеет степень n , так что $T_p(x)$ неразложим при простых p .

Мы докажем теорему, рассматривая обратный образ в координатах θ . Обозначим через $\tilde{F}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ функцию

$$\tilde{F}(\theta, y) = y^2 + \cos(n\theta),$$

и пусть $X_{\tilde{F}}$ — гамильтоново векторное поле, ассоциированное с $\tilde{F}$. Векторное поле $X_{\tilde{F}}$ имеет бесконечно много особых точек $p_\ell = (\ell\pi/n, 0)$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Эти точки

— седла $s_{2k} = (2k\pi/n, 0)$ для четных $\ell = 2k$ и центры $c_{2k+1} = (\pi/n + 2k\pi/n, 0)$ для нечетных $\ell = 2k + 1$.

Для $t \in (-1, 1)$ пусть $\tilde{C}_{2k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, — цикл, один раз обходящий вокруг центра c_{2k+1} в положительном направлении. Все циклы $\tilde{C}_{2k+1}$ исчезают при $t = -1$. Аналогично, пусть $\tilde{S}_{2k}$ — комплексный цикл, исчезающий в седле s_{2k} при $t = 1$. Ориентация выбирается из условия

$$(\tilde{C}_{2i-1}, \tilde{S}_{2i}) = (\tilde{S}_{2i}, \tilde{C}_{2i+1}) = 1.$$

Обозначим через $\tilde{P}_\ell$ цикл $\tilde{S}_\ell$ для четного ℓ или $\tilde{C}_\ell$ для нечетного ℓ . Комплексный слой $\tilde{F}^{-1}(t)$ может быть представлен как двулистная риманова поверхность $y = \sqrt{t - \cos(n\theta)}$ со счетным числом разрезов. Группа гомологий слоя $H_1(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{Z})$ при $t \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ есть свободная абелева группа на множестве циклов $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{C_i, S_i\}$.

Поток градиента функции $\tilde{F}$ позволяет определить слоение с компактным носителем на $\mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{F}^{-1}(-1) \cup \tilde{F}^{-1}(1))$. Иными словами, для любого $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ и любого компактного множества K из $\tilde{F}^{-1}(t_0)$ существует окрестность U точки $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ и вложение $\Phi: U \times K \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{-1, 1\}$, такие, что $\Phi(t_0, p) = p$ и $F \circ \Phi(t, p) = t$ для любого $t \in U$. Тривиализующее отображение Φ корректно определено с точностью до послышной изотопии, тождественной на K .

Существование слоения с компактным носителем позволяет определить действие монодромии на $H_1(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{Z})$. Действительно, по формуле Пикара–Лефшеца получаем

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1(\tilde{C}_{2i+1}) &= \tilde{C}_{2i+1} + \tilde{S}_{2i} - \tilde{S}_{2i+2}, & \tilde{M}_1(\tilde{S}_{2i}) &= \tilde{S}_{2i}, \\ \tilde{M}_{-1}(\tilde{C}_{2i+1}) &= \tilde{C}_{2i+1}, & \tilde{M}_{-1}(\tilde{S}_{2i}) &= \tilde{S}_{2i} + \tilde{C}_{2i-1} - \tilde{C}_{2i+1}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Рассмотрим отображение $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и положим $\Pi = \cos \times \text{Id}$; тогда

$$\begin{array}{ccc} (\theta, y) \in \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Pi} & (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \times \mathbb{C} \\ & \searrow \tilde{F} & \swarrow F \\ & \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} & \end{array}$$

Пусть

$$P_\ell = \Pi_*(\tilde{P}_\ell), \quad S_{2\ell} = \Pi_*(\tilde{S}_{2\ell}), \quad C_{2\ell+1} = \Pi_*(\tilde{C}_{2\ell+1}).$$

Отображение $\cos: \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ является накрытием со структурной группой $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = D_\infty$, порожденной двумя преобразованиями второго порядка $a(\theta) = -\theta$ и $b(\theta) = 2\pi - \theta$. Композиция $b \circ a$ есть сдвиг $\theta \mapsto 2\pi + \theta$, который мы обозначим через T . Возьмем a и T в качестве образующих группы D_∞ с соотношением $Ta = aT^{-1}$.

Отображение $\Pi: (\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}) \times \mathbb{C}$ является накрытием с той же структурной группой $G = D_\infty$, порождаемой двумя преобразованиями $a \times \text{id}$ и $T \times \text{id}$.

Действие группы $G = D_\infty$ на циклах $\tilde{P}_\ell$ (т.е. $\tilde{C}_{2k+1}$ или $\tilde{S}_{2k}$) задается формулой

$$T \times \text{id}(\tilde{P}_\ell) = \tilde{P}_{\ell+2n}, \quad a \times \text{id}(\tilde{P}_\ell) = -\tilde{P}_{-\ell},$$

Пусть $H_1^c(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$ — группа гомологий с замкнутыми носителями слоя $\tilde{F}^{-1}(t)$ с комплексными коэффициентами. Ее элементы имеют вид $C = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} z_\ell \tilde{P}_\ell$.

Определим действие структурной группы G на $H_1^c(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$, полагая

$$g(C) = g\left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} z_\ell P_\ell\right) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} z_\ell g(P_\ell).$$

Пусть $H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$ — подпространство в $H_1^c(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$, состоящее из G -инвариантных элементов группы $H_1(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$. Операторы монодромии $\tilde{M}_\sigma$, $\sigma = \pm 1$, естественным образом продолжаются на $H_1(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$.

Пространство $H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$ — это комплексное векторное пространство, порожденное элементами $\sum_{g \in G} g(P_\ell)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, и продолженная монодромия $\tilde{M}_\sigma$ его сохраняет.

Пусть $\Pi^*: H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C}) \rightarrow H_1^c(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$ — обратный образ при отображении Π ; тогда Π^* дает изоморфизм группы $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$ на $H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$ с обратным отображением $\Pi' = (\Pi^*)|_{H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})}^{-1}$, действующим из $H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$ в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$.

Пусть M_σ и $\tilde{M}_\sigma$, $\sigma = \pm 1$, — монодромии, соответствующие обходам вокруг $\sigma = \pm 1$, как определено в (7.3). Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\Pi'} & H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C}) \\ \tilde{M}_\sigma \downarrow & & M_\sigma \downarrow \\ H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\Pi'} & H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C}) \end{array} \quad (7.3)$$

Пусть w — корень n -й степени из единицы. Векторы $\sum w^\ell \tilde{S}_{2\ell}$ и $\sum w^\ell \tilde{C}_{2\ell+1}$, очевидно, инвариантны относительно сдвига T , но не относительно a . Выбирая

$$\begin{aligned} \tilde{S}_w &= (1+a) \sum w^\ell \tilde{S}_{2\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (w^\ell - w^{-\ell}) \tilde{S}_{2\ell}, \\ \tilde{C}_w &= (1+a) \sum w^\ell \tilde{C}_{2\ell+1} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (w^\ell - w^{-\ell-1}) \tilde{C}_{2\ell+1}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

получаем элементы группы $H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$.

Пусть $S_w, C_w \in H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$ — представители образов элементов $\tilde{S}_w$ и $\tilde{C}_w$ при отображении Π' . Иными словами,

$$S_w = \Pi' \tilde{S}_w = \sum_{\ell=0}^{n-1} (w^\ell - w^{-\ell}) S_{2\ell}, \quad C_w = \Pi' \tilde{C}_w = \sum_{\ell=0}^{n-1} (w^\ell - w^{-\ell-1}) C_{2\ell+1}. \quad (7.5)$$

Непосредственной подстановкой из (7.2) можно подсчитать вариацию $\widetilde{\text{Var}}_{t_0}$, $t_0 = \pm 1$, на $H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$ вокруг $t_0 = \pm 1$. В силу (7.3) эти вычисления переносятся в $H_1(F^{-1}, \mathbb{C})$ с помощью операции прямого образа под действием Π' , и

мы получаем

$$\begin{array}{ll} \widetilde{\text{Var}}_1(\tilde{C}_w) = (1 + w^{-1})\tilde{S}_w, & \text{Var}_1(C_w) = (1 + w^{-1})S_w, \\ \widetilde{\text{Var}}_1(\tilde{S}_w) = 0, & \text{Var}_1(S_w) = 0, \\ \widetilde{\text{Var}}_{-1}(\tilde{C}_w) = 0, & \text{Var}_{-1}(C_w) = 0, \\ \widetilde{\text{Var}}_{-1}(\tilde{S}_w) = (-1 + w)\tilde{C}_w & \text{Var}_{-1}(S_w) = (-1 + w)C_w. \end{array} \quad \xrightarrow{\Pi'}$$

Положим $V_w = \text{Span}(\tilde{C}_w, \tilde{S}_w) \subset H_1^G(\tilde{F}^{-1}(t), \mathbb{C})$ и $V_w = \Pi' V_w \subset H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$. Пространства $V_w \subset H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$ инвариантны относительно действия группы монодромии $\mathcal{M}$ на слое, задаваемом F . Кроме того, для нечетного n имеем

$$H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C}) = \bigoplus_{w^n=1, \text{Im}(w)>0} V_w.$$

Предложение 7.4. Пусть $\delta = S_w$ или $\delta = C_w$ — семейство циклов в $H_1(F^{-1}(t), \mathbb{C})$, задаваемых формулой (7.5), для $w = e^{2k\pi i/n}$, $k = 2, \dots, (n-1)/2$, и пусть $\omega = y dx$. Тогда

$$\int_{\delta} \omega \equiv 0,$$

но форма ω не является относительно точной.

Доказательство. Пусть $w = \xi^k$, $k = 2, \dots, (p-1)/2$, где $\xi = e^{2i\pi/n}$.

Рассмотрим сначала случай $\delta = S_w$. Пусть $I = \int_{\tilde{S}_0} y \cos \theta d\theta$. Вычислим $I_{2\ell} = \int_{\Pi_*(\tilde{S}_{2\ell})} y dx = - \int_{\tilde{S}_{2\ell}} y \sin \theta d\theta$. Сделаем замену координат $\theta \mapsto \theta + 2\ell\pi/n$. Тогда получим

$$I_{2\ell} = - \cos \frac{2\ell\pi}{n} \int_{\tilde{S}_0} y \sin \theta d\theta - \sin \frac{2\ell\pi}{n} \int_{\tilde{S}_0} \cos \theta d\theta.$$

Первый интеграл равен нулю, так что

$$I_{2\ell} = - \sin \frac{2\ell\pi}{n} I = - \frac{\xi^\ell - \xi^{-\ell}}{2i} I. \quad (7.6)$$

Это дает

$$\begin{aligned} \int_{S_w} y dx &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (w^\ell - w^{-\ell}) I_{2\ell} = -I \sum_{\ell=0}^{n-1} (\xi^{k\ell} - \xi^{-k\ell}) \frac{\xi^\ell - \xi^{-\ell}}{2i} \\ &= -\frac{I}{2i} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\xi^{(k+1)\ell} - \xi^{(k-1)\ell} - \xi^{(-k+1)\ell} + \xi^{-(k+1)\ell}) = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Последнее равенство выполнено, так как каждая из четырех возникающих сумм равна нулю. Теперь рассмотрим случай $\delta = C_w$. Обозначим через $T_{-\pi/n}(\tilde{C}_1)$ сдвиг цикла $\tilde{C}_1$ на $-\pi/n$, что дает цикл с центром в начале координат. Пусть $J = \int_{T_{-\pi/n}(\tilde{C}_1)} y \cos \theta d\theta$. Вычислим $J_{2\ell+1} = \int_{\Pi_*(\tilde{C}_{2\ell+1})} y dx = - \int_{\tilde{C}_{2\ell+1}} y \sin \theta d\theta$.

Сделаем замену координат $\theta \mapsto \theta + \frac{(2\ell+1)\pi}{n}$. Это дает

$$\begin{aligned} J_{2\ell+1} &= -\cos \frac{(2\ell+1)\pi}{n} \int_{T_{-\pi/n}(\tilde{C}_1)} y \sin \theta d\theta - \sin \frac{(2\ell+1)\pi}{n} \int_{T_{-\pi/n}(\tilde{C}_1)} y \cos \theta d\theta \\ &= -\sin \frac{(2\ell+1)\pi}{n} J. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J_{2\ell+1} = -\sin \frac{(2\ell+1)\pi}{n} J = -\frac{\xi^{\ell+1/2} - \xi^{\ell-1/2}}{2i} J, \quad (7.8)$$

$$\int_{C_w} y dx = \sum_{\ell=0}^{n-1} (w^\ell - w^{-\ell-1}) J_{2\ell+1} = -\frac{J}{2i} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\xi^{k\ell} - \xi^{-k\ell-k}) (\xi^{\ell+1/2} - \xi^{\ell-1/2}) = 0 \quad (7.9)$$

аналогично (7.7).

Заметим, что форма $\omega = y dx$ очевидным образом не относительно точна, так как, скажем, $\int_{C_1} y dx \neq 0$ есть ненулевая площадь, ограниченная контуром C_1 . $\square$

Итак, завершено доказательство части (ii) теоремы 7.2. Докажем теперь утверждение части (i).

Пусть

$$\theta_0^\pm = \pm \frac{\arccos t}{n}, \quad \theta_\ell^\pm = \theta_0^\pm + \frac{2\pi\ell}{n}, \quad x_\ell^\pm = \cos(\theta_\ell^\pm).$$

Заметим, что

$$x_\ell^\pm = \cos\left(\theta_0^\pm + \frac{2\pi\ell}{n}\right) = \cos \theta_0^\pm \cos \frac{2\pi\ell}{n} - \sin \theta_0^\pm \sin \frac{2\pi\ell}{n}.$$

Поэтому

$$x_\ell^+ - x_\ell^- = -2 \sin \theta_0^+ \sin \frac{2\pi\ell}{n} = i \sin \theta_0^+ (\xi^\ell - \xi^{-\ell}). \quad (7.10)$$

Пусть $\delta_{2\ell}(c) = x_\ell^+(c) - x_\ell^-(c)$, $\ell = 0, \dots, n-1$, — семейства простых циклов многочлена Чебышева T_n , и пусть

$$\delta_w(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (w^\ell - w^{\ell-1}) \delta_{2\ell} \in H_0(f^{-1}(t), \mathbb{C}),$$

где $w = e^{2k\pi i/n}$, $k = 1, \dots, (n-1)/2$. Взяв в качестве W_w подпространство в $H_0(f^{-1}(t), \mathbb{C})$, натянутое на δ_w , видим, что W_w инвариантно относительно монодромии и

$$H_0(f^{-1}(t), \mathbb{C}) = \bigoplus_{w^n=1, \operatorname{Im}(w)>0} W_w.$$

Предложение 7.5. Нульмерный абелев интеграл $I = \int_\delta \omega$ тождественно равен нулю для цикла $\delta = \delta_w$, где $w = e^{2k\pi i/n}$, $k = 2, \dots, (n-1)/2$ и $\omega(x) = x$, но 0-форма ω неразложима.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, а в действительности и проще. Простые циклы $\delta_{2\ell}$, входящие в опре-

деление цикла δ , соответствуют точкам ветвления, которые обходит цикл $S_{2\ell}$.
Имеем

$$\int_{\delta} \omega = \sum_{\ell=0}^{n-1} (w^{\ell} - w^{-\ell})(x_{\ell}^{+} - x_{\ell}^{-}) = i \sin \theta_0^{+} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\xi^{k\ell} - \xi^{-k\ell})(\xi^{\ell} - \xi^{-\ell}) = 0.$$

С другой стороны, $\int_{\delta_{\ell}} \omega = x_{\ell}^{+} - x_{\ell}^{-} = \frac{2 \arccos t}{n} \neq 0$, так что ω не относительно точна. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. I. Arnold, *Arnold's problems*, Translated and revised edition of the 2000 Russian original (В. И. Арнольд, Задачи Арнольда, ФАЗИС, М., 2000). With a preface by V. Philippov, A. Yakivchik and M. Peters, Springer-Verlag, Berlin; PHASIS, Moscow, 2004.
- [2] P. Bonnet, A. Dimca, *Relative differential forms and complex polynomials*, Bull. Sci. Math., **124**:7 (2000), 557–571.
- [3] M. Briskin, J.-P. Francoise, Y. Yomdin, *Generalized moments, center-focus conditions, and compositions of polynomials*, in: Operator theory, system theory and related topics (Beer-Sheva/Rehovot, 1997), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 123, Birkhäuser, Basel, 2001, 161–185.
- [4] M. Briskin, Y. Yomdin, *Tangential version of Hilbert 16th problem for the Abel equation*, Mosc. Math. J., **5**:1 (2005), 23–53.
- [5] C. Christopher, *Abel equations: composition conjectures and the model problem*, Bull. London Math. Soc., **32**:3 (2000), 332–338.
- [6] J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation Groups*, Graduate Texts in Math., vol. 163, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [7] S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *A new look at the Burnside–Schur theorem*, Bull. London Math. Soc., **37**:4 (2005), 535–546.
- [8] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980.
- [9] J.-P. Francoise, *The successive derivatives of the period function of a plane vector field*, J. Differential Equations, **146**:2 (1998), 320–335.
- [10] L. Gavrilov, *Petrov modules and zeros of Abelian integrals*, Bull. Sci. Math., **122**:8 (1998), 571–584.
- [11] L. Gavrilov, H. Movasati, *The infinitesimal 16th Hilbert problem in dimension zero*, Bull. Sci. Math., **131**:3 (2007), 242–257; <http://arxiv.org/abs/math.CA/0507061>.
- [12] М. Холл, *Теория групп*, Мир, М., 1962.
- [13] Ю. С. Ильяшенко, *Возникновение предельных циклов при возмущении уравнения $dw/dz = -R_z/R_w$, где $R(z, w)$ — многочлен*, Матем. сб., **78**:3 (1969), 360–373.
- [14] M. Muzychuk, F. Pakovich, *Solution of the polynomial moment problem*, Proc. London Math. Soc., **99**:3 (2009), 633–657; <http://arxiv.org/abs/0710.4085v1>.
- [15] F. Pakovich, *A counterexample to the “composition conjecture”*, Proc. Amer. Math. Soc., **130**:12 (2002), 3747–3749.
- [16] F. Pakovich, *On polynomials orthogonal to all powers of a Chebyshev polynomial on a segment*, Israel J. Math., **142** (2004), 273–283.
- [17] S. Yakovenko, *A geometric proof of the Bautin theorem. Concerning the Hilbert 16th problem*, in: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 203–219.

School of Mathematics and Statistics, University of Plymouth

e-mail: C.Christopher@plymouth.ac.uk

Institut de Mathématiques de Bourgogne,

Unité mixte de recherche 5584 du C.N.R.S., Université de Bourgogne

e-mail: Pavao.Mardesic@u-bourgogne.fr

Поступило в редакцию

8 октября 2008 г.