Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Костенко, М. М. Маламуд, Об одномерном операторе Шрёдингера с δ -взаимодействиями, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 2, 87–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2982>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:42:52

Springer-Verlag, Berlin, 2003, 161–182. [11] A. M. Vershik, S. V. Kerov, Зап. научн. сем. ПОМИ, **344** (2007), 5–36. [12] A. V. Zelevinsky, *Representations of Finite Classical Groups. A Hopf algebra approach*, Lecture Notes in Math., vol. 869, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: eugene@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
11 декабря 2009 г.

УДК 517.984

Об одномерном операторе Шрёдингера с δ -взаимодействиями*

© 2010. А. С. КОСТЕНКО, М. М. МАЛАМУД

1. Введение. Пусть $\mathcal{J} = [0, b)$, $0 < b \leq +\infty$, $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{J}$ — строго возрастающая последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. Пусть также $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ — вещественная последовательность.

В $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{J})$ с дифференциальным выражением

$$\ell_{X,\alpha} := -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta(x - x_n) \quad (1)$$

связывают симметрический дифференциальный оператор (см. [1])

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{X,\alpha}^0 &:= -\frac{d^2}{dx^2}, & D(\mathbf{H}_{X,\alpha}^0) &= \{f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathcal{J} \setminus X) : f'(0) = 0, \\ & & f(x_n+) &= f(x_n-), f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Его замыкание, обозначаемое через $\mathbf{H}_{X,\alpha}$, интерпретируют как *гамильтониан δ -взаимодействий интенсивности α_n в центрах x_n* .

Спектральные свойства оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ хорошо изучены в случае, когда $d_* := \inf_{n \in \mathbb{N}} d_n > 0$ (здесь $d_n := x_n - x_{n-1}$ и $x_0 := 0$). Так, в этом случае оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ *всегда* самосопряжен [6]. Его полуограниченность снизу эквивалентна полуограниченности снизу последовательности $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ (см. [3]). Для дискретности спектра необходимо, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$.

Случай $d_* = 0$ *принципиально отличается* от случая $d_* > 0$. Так, в [4] показано, что в этом случае индексы дефекта $n_+(\mathbf{H}_{X,\alpha})$ и $n_-(\mathbf{H}_{X,\alpha})$ оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ равны и не превосходят единицы, и установлена альтернатива Вейля. В частности, из этого следует, что если $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = 1$, то спектры самосопряженных расширений оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ дискретны. Шубин Крист и Штольдц [17] показали, что $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = 1$, если $\mathcal{J} = \mathbb{R}_+$, $d_n = 1/n$ и $\alpha_n = -2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Основная цель заметки — спектральный анализ гамильтониана $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в случае, когда $d_* = 0$. Мы исследуем оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в рамках теории расширений

*Исследование первого автора было поддержано ESI Junior Research Fellowship Programme (Австрия) и IRCSET Post-Doctoral Fellowship Program (Ирландия).

симметрических операторов, применяя аппарат граничных троек и соответствующих им функций Вейля (см. [7], [5]). В случае, когда $d_* > 0$, эту технику впервые применил Кочубей [12]. Следует отметить, что при этом подходе основная трудность — построение адекватной граничной тройки.

В настоящей заметке мы приводим такую конструкцию в случае, когда $d_* = 0$, и показываем, что свойства самосопряженности, полуограниченности снизу и дискретности спектра оператора $H_{X,\alpha}$ эквивалентны соответствующим свойствам якобиевой матрицы $B_{X,\alpha}$ вида (6) (см. ниже). Это позволило получить условия самосопряженности, полуограниченности снизу и дискретности спектра оператора $H_{X,\alpha}$. Эти условия существенно зависят от X , а не только от α , и оказались отличными от таковых в случае, когда $d_* > 0$. В последующей нашей работе мы используем обнаруженную связь в обратном направлении. А именно, при помощи теории квадратичных форм мы получаем новую информацию о спектральных свойствах как *полуограниченных* гамильтонианов $H_{X,\alpha}$, так и связанных с ними матриц $B_{X,\alpha}$ вида (6).

Отметим, что в работах Савчука и Шкаликова (см. [16]) предложен другой подход к исследованию операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями $q \in W_{2,\text{loc}}^{-1}(\mathcal{S})$.

Подробное изложение результатов работы содержится в [10].

2. Граничная тройка. В дальнейшем, не нарушая общности, мы считаем, что $d^* := \sup_{n \in \mathbb{N}} d_n < \infty$. Рассмотрим оператор

$$H_{\min} := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad D(H_{\min}) = W_0^{2,2}(\mathcal{S} \setminus X). \quad (3)$$

Оператор $H_{\min}$ симметрический, $n_{\pm}(H_{\min}) = \infty$ и $H_{\min}^*$ задается тем же выражением $-d^2/dx^2$ на области $D(H_{\min}^*) = W^{2,2}(\mathcal{S} \setminus X)$. Ясно, что $H_{\min} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$, где $H_n := -d^2/dx^2$, $D(H_n) = W_0^{2,2}[x_{n-1}, x_n]$. Определим отображения $\Gamma_0^{(n)}, \Gamma_1^{(n)}: D(H_n^*) = W^{2,2}[x_{n-1}, x_n] \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулами

$$\Gamma_0^{(n)} f := \begin{pmatrix} d_n^{1/2} f(x_{n-1}+) \\ -d_n^{1/2} f(x_n-) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1^{(n)} f := \begin{pmatrix} \frac{f'(x_{n-1}+)}{d_n^{1/2}} + \frac{f(x_{n-1}+) - f(x_n-)}{d_n^{3/2}} \\ \frac{f'(x_n-)}{d_n^{1/2}} + \frac{f(x_{n-1}+) - f(x_n-)}{d_n^{3/2}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Совокупность $\Pi_n = \{\mathbb{C}^2, \Gamma_0^{(n)}, \Gamma_1^{(n)}\}$ будет граничной тройкой для оператора H_n^* в смысле [7]. Более того, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\Gamma_j := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_j^{(n)}$, $j \in \{0, 1\}$, и $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$. Тогда совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\} =: \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n$ является граничной тройкой для оператора $H_{\min}^*$, т. е. отображение $\Gamma := \text{col}(\Gamma_0, \Gamma_1): D(H_{\min}^*) = W^{2,2}(\mathcal{S} \setminus X) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно и для всех $f, g \in D(H_{\min}^*)$ справедлива формула Грина

$$(H_{\min}^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, H_{\min}^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}. \quad (5)$$

Если $d_* > 0$, то граничная тройка $\tilde{\Pi}$ для $H_{\min}^*$ строится проще. А именно (см. [12]), $\tilde{\Pi} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Pi}_n = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$, где $\tilde{\Pi}_n = \{\mathbb{C}^2, \tilde{\Gamma}_0^{(n)}, \tilde{\Gamma}_1^{(n)}\}$, $\tilde{\Gamma}_0^{(n)} f = \text{col}(f(x_{n-1}+), -f(x_n-))$, $\tilde{\Gamma}_1^{(n)} f = \text{col}(f'(x_{n-1}+), f'(x_n-))$, $\tilde{\Gamma}_j := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Gamma}_j^{(n)}$, $j \in \{0, 1\}$. Однако эта тройка не является граничной для $H_{\min}^*$, если $d_* = 0$.

А именно, $D(\tilde{\Gamma}_j) \subsetneq D(H_{\min}^*)$, $j \in \{0, 1\}$, и отображение $\tilde{\Gamma} = \text{col}(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1)$ не сюръективно.

Недавно в [13] было показано, что для последовательности симметрических операторов $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с $n_+(S_n) = n_-(S_n)$ найдется последовательность граничных троек Π_n для S_n^* , такая, что $\Pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n$ образует граничную тройку для оператора $S^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n^*$. Более того, $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ может быть получена путем специальной регуляризации произвольной последовательности $\{\tilde{\Pi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ граничных троек для S_n^* . Развивая построения из [13, §5], мы предлагаем общую процедуру регуляризации граничных троек $\tilde{\Pi}_n$, существенно использующую функции Вейля $\tilde{M}_n(\cdot)$, соответствующие тройкам $\tilde{\Pi}_n$, $n \in \mathbb{N}$. В рассматриваемом случае эта конструкция ведет к теореме 1.

3. Связь с якобиевыми матрицами. Рассмотрим полубесконечную якобиеву матрицу

$$B_{X,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1^2}(\alpha_1 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}) & \frac{1}{r_1 r_2 d_2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{r_1 r_2 d_2} & \frac{1}{r_2^2}(\alpha_2 + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}) & \frac{1}{r_2 r_3 d_3} & \dots \\ 0 & \frac{1}{r_2 r_3 d_3} & \frac{1}{r_3^2}(\alpha_3 + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $r_n := \sqrt{d_n + d_{n+1}}$ и $d_n = x_n - x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. В пространстве $l^2(\mathbb{N})$ матрица $B_{X,\alpha}$ соответствует (см. подробности в [2]) минимальный симметрический оператор, также обозначаемый через $B_{X,\alpha}$.

Лемма 1. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для $H_{\min}^*$, построенная в теореме 1, и $\Theta_{X,\alpha}$ — следующее линейное отношение в $\mathcal{H}$:

$$\Theta_{X,\alpha} := \Gamma D(H_{X,\alpha}) := \{\{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} : f \in D(H_{X,\alpha})\}.$$

Тогда $\Theta_{X,\alpha} = \Theta^{\text{op}} \oplus \Theta^\infty$, где Θ^{op} и $\Theta^\infty = \{\{0, f\} : \{0, f\} \in \Theta_{X,\alpha}\}$ — операторная и неопределенная части отношения $\Theta_{X,\alpha}$. При этом Θ^{op} унитарно эквивалентна минимальному оператору $B_{X,\alpha}$.

Теорема 1, лемма 1 и результаты из [5] и [7] дают следующую связь между спектральными свойствами операторов $H_{X,\alpha}$ и $B_{X,\alpha}$.

Теорема 2. Пусть $\sup_{n \in \mathbb{N}} d_n < \infty$. Тогда

- (i) справедливы равенства $n_\pm(H_{X,\alpha}) = n_\pm(B_{X,\alpha})$;
- (ii) оператор $H_{X,\alpha}$ полуограничен снизу (неотрицателен) в том и только том случае, когда полуограничен снизу (неотрицателен) $B_{X,\alpha}$;
- (iii) если $H_{X,\alpha} = H_{X,\alpha}^*$, то спектр $\sigma(H_{X,\alpha})$ дискретен в точности тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ и спектр $\sigma(B_{X,\alpha})$ дискретен;
- (iv) если $H_{X,\alpha} = H_{X,\alpha}^*$, то отрицательная часть спектра $\sigma(H_{X,\alpha})$ дискретна (конечна) в том и только том случае, когда отрицательная часть спектра $\sigma(B_{X,\alpha})$ дискретна (конечна). В частности, $\sigma_c(H_{X,\alpha}) \subseteq \mathbb{R}_+$ в том и только том случае, когда $\sigma_c(B_{X,\alpha}) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Замечание 1. В случае $d_* > 0$ аналог теоремы 2(i) содержится в [1, §III.2.1, теорема 2.1.5]. Однако якобиевы матрицы в [1] существенно отличаются от матриц $B_{X,\alpha}$ вида (6), и в случае $d_* = 0$ связь гамильтонианов $H_{X,\alpha}$ с якобиевыми матрицами оставалась невыясненной.

Другой способ установления связи между операторами $H_{X,\alpha}$ и $B_{X,\alpha}$ был нам указан рецензентом. А именно, отождествим функцию f из пространства

$\mathcal{L}$ финитных функций, линейных на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$, с последовательностью $y := \{y_k\}$, $y_k := f(x_k)$. Тогда $(H_{X,\alpha}f, f) = \sum (d_k^{-1}|y_k - y_{k-1}|^2 + \alpha_k|y_k|^2)$ и $(f, f) = \sum d_k(|y_{k-1}|^2 + |y_k|^2 + y_{k-1}y_k)/3$, что задает новое гильбертово пространство $\mathcal{H}'$ и форму $\mathcal{H}'$ в нем. Очевидно, что формула $(f, f)' = \sum d_k(|y_{k-1}|^2 + |y_k|^2) = \sum (d_k + d_{k+1})|y_k|^2$ задает эквивалентную норму в $\mathcal{H}'$. Таким образом, $U: f \rightarrow \tilde{y}$, где $\tilde{y}_k = y_k \sqrt{d_k + d_{k+1}}$, есть изометрия из $\mathcal{L}$ в $l_2(\mathbb{N})$ и $(H_{X,\alpha}f, f)_{L^2} = (B_{X,\alpha}\tilde{y}, \tilde{y})_{l_2}$. Этот подход позволяет доказать теорему 2(i).

Замечание 2. Отображение Γ^2 в [14, теорема 1] совпадает с $\tilde{\Gamma}_0 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Gamma}_0^{(n)}$. Следовательно, в случае $d_* = 0$ тройка, предложенная в [14], не является гра-ничной для $H_{\min}^*$, так как $D(\tilde{\Gamma}_0) \subsetneq D(H_{\min}^*)$. По этой причине ошибочна параметризация расширений оператора $H_{X,\alpha}$ и неверны выводы об их спектральных свойствах в [14], [15].

4. Самосопряженность. Из теоремы 2(i) и теоремы Карлемана [2, теорема VII.1.5], примененной к матрице $B_{X,\alpha}$, вытекает

Предложение 1. Если $\sum_{n \in \mathbb{N}} d_n^2 = \infty$, то оператор $H_{X,\alpha}$ самосопряжен для любой вещественной последовательности $\alpha = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Отметим, что аналогичное условие возникало у Р. С. Исмагилова для операторов с непрерывными потенциалами (см. [8, теорема 1]).

Предложение 1 является точным, а именно, справедливо

Предложение 2. Пусть $\sum_{n \in \mathbb{N}} d_n^2 < \infty$ и $d_{n-1}d_{n+1} \geq d_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{n+1} \left| \alpha_n + \frac{1}{d_n} + \frac{1}{d_{n+1}} \right| < \infty, \quad (7)$$

то оператор $H_{X,\alpha}$ является симметрическим и $n_{\pm}(H_{X,\alpha}) = 1$.

Предложение 2 подсказано результатом Шубин Крист и Штольца [17, с. 496], а доказательство основано на недавнем результате Костюченко и Мирзоева [11, теорема 1], усиливающим известную теорему Березанского [2, теорема VII.1.5].

В случае $\{d_n\} \in l_2$ вопрос о самосопряженности оператора $H_{X,\alpha}$ является достаточно тонким. Так, например, справедливо

Предложение 3. Пусть $\mathcal{J} = \mathbb{R}_+$ и $d_n = n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

- (i) $n_{\pm}(H_{X,\alpha}) = 0$, если $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|n^{-3} = \infty$;
- (ii) $n_{\pm}(H_{X,\alpha}) = 0$, если $\alpha_n \leq -2(2n+1) + O(n^{-1})$;
- (iii) $n_{\pm}(H_{X,\alpha}) = 0$, если $\alpha_n \geq -Cn^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $C \equiv \text{const} > 0$;
- (iv) $n_{\pm}(H_{X,\alpha}) = 1$, если $\alpha_n = -2n - 1 + O(n^{-\varepsilon})$ с некоторым $\varepsilon > 0$;
- (v) $n_{\pm}(H_{X,\alpha}) = 1$, если $\alpha_n = -A(2n+1) + O(n^{-1})$, $A \in (0, 2)$.

5. Полуограниченность снизу. Из теоремы 2(ii) и формулы (6) вытекает

Предложение 4. Оператор $H_{X,\alpha}$ полуограничен снизу, если

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n (d_{n-1} + d_n)^{-1} > -\infty. \quad (8)$$

Более сильное утверждение содержится в [3, теорема 3]. При $d_* > 0$ условие (8) эквивалентно условию $\inf_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n > -\infty$ и является необходимым. Из [3] также вытекает, что $H_{X,\alpha}$ не полуограничен снизу, если $d_n = n^{-1/2}$, $\alpha_n = -n^{-\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$, хотя $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

6. Дискретность спектра. Применяя условие Чихары для дискретности спектров матриц Якоби (см. [18]), получаем

Предложение 5. Пусть $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ и $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ таковы, что $H_{X,\alpha} = H_{X,\alpha}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n/d_{n+1} = 1$. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| d_n^{-1} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n d_n)^{-1} > -1/4, \quad (9)$$

то спектр оператора $H_{X,\alpha}$ дискретен.

Второе условие в (9) является точным (при некоторых ограничениях на d_n и α_n спектр матрицы $B_{X,\alpha}$ абсолютно непрерывен, если $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n d_n)^{-1} < -1/4$ [18, теорема 2.2]). Предложение 5 позволяет также строить непоуограниченные снизу операторы $H_{X,\alpha}$ с дискретным спектром (другой способ построения можно извлечь из [9, §2]). Покажем это на примере.

Пример. Пусть $d_n = n^{-1/2}$, $\alpha_n = -cn^{1/2}$, где $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{4\}$. Тогда $H_{X,\alpha}$ самосопряжен и непоуограничен. Спектр $\sigma(H_{X,\alpha})$ дискретен в точности тогда, когда $c > 4$. При $c \in (0, 4)$ спектр $\sigma(B_{X,\alpha})$ абсолютно непрерывен, $\sigma_{ac}(B_{X,\alpha}) = \mathbb{R}$ (см. [18]) и по теореме 2(iv) отрицательный спектр оператора $H_{X,\alpha}$ не дискретен.

Полагая $d_n = n^{-1/2}$, $\alpha_n = n^{-\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$, приходим к оператору $H_{X,\alpha}$, спектр которого дискретен в случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2005. [2] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965. [3] J. Brasche, J. Math. Phys., **26**:4 (1985), 621–626. [4] D. Buschmann, G. Stolz, J. Weidmann, J. Reine Angew. Math., **467** (1995), 169–186. [5] V. A. Derkach, M. M. Malamud, J. Funct. Anal., **95**:1 (1991), 1–95. [6] F. Gesztesy, W. Kirsch, J. Reine Angew. Math., **362** (1985), 27–50. [7] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для операторно-дифференциальных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984. [8] Р. С. Исмагилов, УМН, **18**:5 (1963), 161–166. [9] Р. С. Исмагилов, Матем. заметки, **37**:6 (1985), 869–879. [10] A. Kostenko, M. Malamud, J. Differential Equations (2010), в печати; <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.011>. [11] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, Функц. анализ и его прил., **35**:4 (2001), 32–37. [12] А. Н. Кочубей, Укр. матем. ж., **41**:10 (1989), 1391–1395. [13] М. М. Malamud, H. Neidhardt, *On the unitary equivalence of absolutely continuous parts of self-adjoint extensions*, <http://arxiv.org/abs/0907.0650v1>. [14] В. А. Михайлец, Докл. РАН, **335**:4 (1994), 421–423. [15] В. А. Михайлец, Функц. анализ и его прил., **28**:4 (1994), 85–87. [16] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, Труды ММО, **64** (2003), 159–219. [17] C. Shubin Christ, G. Stolz, J. Math. Anal. Appl., **184**:3 (1994), 491–516. [18] R. Szwarc, in: Intern. Series of Numerical Math., vol. 142, Birkhauser, Basel, 2003, 255–262.

School of Mathematical Sciences
Dublin Institute of Technology
e-mail: duzer80@gmail.com

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, Донецк
e-mail: mmm@telenet.dn.ua

Поступило в редакцию
8 июля 2009 г.