Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Горин, Дизъюнктность представлений, возникающих в задаче гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 2, 14–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2983>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 05:57:10

Дизъюнктность представлений, возникающих в задаче гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе*

© 2010. В. Е. Горин

В работе доказывается попарная дизъюнктность представлений $T_{z,w}$ бесконечномерной унитарной группы. Эти представления являются естественным обобщением регулярного представления для случая «большой» группы $U(\infty)$. Они были впервые построены и изучены Г. И. Ольшанским и А. М. Бородиным. Дизъюнктность представлений может быть сведена к дизъюнктности некоторых вероятностных мер на пространстве путей в графе Гельфанда–Цетлина. Мы доказываем последнюю с применением вероятностных и комбинаторных методов.

Введение

Целью гармонического анализа на группе является изучение регулярного, а также других естественных представлений, связанных с этой группой. В настоящей работе мы изучаем бесконечномерную унитарную группу $U(\infty)$, которая является объединением классических групп $U(N)$, вложенных друг в друга естественным образом. Вследствие того, что $U(\infty)$ не является локально компактной группой, общепринятое определение регулярного представления для нее неприменимо. В первой из работ, посвященных этой тематике, [12], Пикрелл в схожей ситуации предложил конструкцию, которая позволяет обойти возникающую сложность. Эта работа послужила отправной точкой для статьи [11], в которой Ольшанский обобщил понятие регулярного представления на случай «большой» группы $U(\infty)$.

Пространством представлений, построенных Ольшанским, является индуктивный предел пространств $L_2(U(N))$. Для корректного определения подобного индуктивного предела необходимо выбрать некоторые вложения $L_2(U(N)) \hookrightarrow L_2(U(N+1))$. Оказывается, что такой выбор далеко не единствен. Различные варианты приводят к семейству представлений $T_{z,w}$, зависящих от двух комплексных параметров z, w . Представление $T_{z,w}$ не меняется при замене z или w на $\bar{z}$ или $\bar{w}$ соответственно. Структура этого представления существенным образом зависит от того, являются параметры целыми или нет. В настоящей работе мы концентрируемся на последнем случае.

В силу того, что все представления $T_{z,w}$ являются индуктивными пределами одной и той же последовательности пространств, возникает естественный вопрос, являются ли они на самом деле различными. Наша работа дает ответ на этот вопрос. Будет доказано, что представления $T_{z,w}$ дизъюнктны. Напомним,

*Во время написания работы автор получал поддержку Фонда поддержки математики им. Леонарда Эйлера, Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса» и РФФИ, грант 07-01-91209.

что два представления T и T' называются дизъюнктными, если они не имеют ненулевых изоморфных подпредставлений. В работе доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Предположим, что все параметры z, w, z', w' не являются целыми, $\{z, \bar{z}\} \neq \{z', \bar{z'}\}$, $\{w, \bar{w}\} \neq \{w', \bar{w'}\}$ (все пары неупорядоченные) и $\operatorname{Re}(z + w) > -1/2$. Тогда представления $T_{z,w}$ и $T_{z',w'}$ дизъюнктны.*

Разложениям представлений $T_{z,w}$ на неприводимые отвечают некоторые меры, которые мы называем спектральными. Вместо дизъюнктности представлений $T_{z,w}$ можно доказывать дизъюнктность соответствующих спектральных мер. Эти меры были полностью описаны Бородиным и Ольшанским в статье [2], для их корреляционных функций существуют явные формулы. Однако, насколько известно автору, не существует никакого явного метода для доказательства дизъюнктности мер на основании вида их корреляционных функций. Вследствие этого мы вынуждены использовать другой подход. Мы сводим дизъюнктность спектральных мер к дизъюнктности мер $\rho_{z,w}$ на пространстве путей в графе Гельфанда–Цетлина, и основным объектом нашего изучения являются именно эти меры $\rho_{z,w}$.

Дизъюнктность представлений и мер, связанных с «большими» группами, обсуждалась в большом количестве работ, и до настоящего времени многие проблемы, связанные с этой тематикой, остаются нерешенными.

Авторы статьи [5] изучали семейство T_z представлений бесконечной симметрической группы и получили результат, схожий с теоремой 1. Наши рассуждения используют некоторые идеи упомянутой работы, однако случай бесконечномерной унитарной группы оказался существенно более сложным и для решения задачи пришлось привлечь множество новых соображений.

Другой близкий сюжет рассматривался в работе [4], в которой Бородин и Ольшанский изучали так называемые s -меры Хуа–Пикрелла, определенные на пространстве бесконечных эрмитовых матриц, и, в частности, доказали их дизъюнктность.

В статье [9] Неретин обобщил исходную конструкцию Пикрелла, о которой мы говорили выше, на все десять классических серий римановых компактных симметрических пространств. Задача доказательства дизъюнктности может быть поставлена в каждом из возникающих десяти случаев. Вполне вероятно, что дизъюнктность может быть доказана с использованием методов, аналогичных методам нашей работы.

Обратим внимание на то, что в формулировке теоремы 1 на параметры z, w накладывается ограничение $\operatorname{Re}(z + w) > -1/2$. На самом деле конструкция представления $T_{z,w}$ имеет смысл для всех $z, w \in \mathbb{C}$, однако для $\operatorname{Re}(z + w) \leq -1/2$ мы получаем представления, не обладающие так называемым выделенным K -инвариантным вектором. Было бы интересно изучить и эти представления, но наши методы в этом случае оказываются неприменимыми.

Поясним другой результат, представленный в §6 работы. Путем в графе Гельфанда–Цетлина называется последовательность $\{\lambda(N)\}$ доминантных весов неприводимых представлений групп $U(N)$, а каждый вес $\lambda(N)$ может быть представлен как пара диаграмм Юнга $(\lambda^+(N), \lambda^-(N))$. Каждая мера $\rho_{z,w}$ порождает две случайные последовательности диаграмм Юнга $\{\lambda^+(N)\}$, $\{\lambda^-(N)\}$,

которые образуют марковский процесс роста. В качестве еще одного приложения метода, который будет описан в §4, мы доказываем, что длина диагонали в диаграммах $\lambda^\pm(N)$ растет при увеличении N не быстрее чем логарифмически.

Автор благодарен Г. И. Олшанскому за постановку задачи, многочисленные плодотворные обсуждения и помощь в упрощении доказательств. Автор выражает признательность А. М. Бородину, обнаружившему пробел в первоначальном доказательстве. Кроме того, автор хотел бы поблагодарить Б. М. Гуревича и С. А. Пирогова за их советы.

§1. Представления группы $U(\infty)$, граф Гельфанда–Цетлина, сведение к спектральным мерам

В этом параграфе мы приводим общие факты о представлениях группы $U(\infty)$; большинство из них взяты автором из работы [11].

Рассмотрим цепочку классических компактных групп $U(N)$, $N = 1, 2, \dots$, вложенных друг в друга естественным образом, и обозначим через $U(\infty)$ их объединение. Следуя общей философии работы [10], мы образуем (G, K) -пару, где G — это группа $U(\infty) \times U(\infty)$, а K — ее диагональная подгруппа, изоморфная $U(\infty)$. Мы работаем с унитарными представлениями T группы G , обладающими выделенным циклическим K -инвариантным вектором ξ . Эти представления называются *сферическими представлениями* (G, K) -пары. Они полностью определяются соответствующим матричным коэффициентом $\psi(\cdot) = (T(\cdot)\xi, \xi)$. Такие функции ψ называются *сферическими*. Они являются K -биинвариантными функциями на G , из которых могут быть получены (ограничением на подгруппу $U(\infty) \times \{e\} \subset G$) центральные функции χ на $U(\infty)$ (т. е. функции, постоянные на классах сопряженности). Неприводимым представлениям T отвечают *экстремальные характеры* (иными словами, крайние точки выпуклого множества всех характеров — центральных положительно определенных непрерывных комплексных функций на $U(\infty)$ со значением 1 в единице группы).

Неприводимые сферические представления пары (G, K) и экстремальные характеры группы $U(\infty)$ полностью описаны, они зависят от счетного числа параметров. Существует биективное соответствие $\chi^{(\omega)} \leftrightarrow \omega$ между экстремальными характерами и точками ω бесконечномерной области

$$\Omega \subset \mathbb{R}^{4\infty+2} = \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

где Ω — множество шестерок

$$\omega = (\alpha^+, \beta^+; \alpha^-, \beta^-; \delta^+, \delta^-),$$

таких, что

$$\alpha^\pm = (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \geq \dots \geq 0) \in \mathbb{R}^\infty, \quad \beta^\pm = (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \geq \dots \geq 0) \in \mathbb{R}^\infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm) \leq \delta^\pm, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1.$$

Для функций $\chi^{(\omega)}(U)$, где $U \in U(\infty)$, существует явная формула, открытая Войкулеску. Нам эта формула не нужна, все подробности можно найти в [15] и [11].

Как показано в [11], для любого характера χ существует и единственная вероятностная мера σ на Ω , такая что

$$\chi(U) = \int_{\Omega} \chi^{(\omega)}(U) \sigma(d\omega), \quad U \in U(\infty).$$

Мы называем σ *спектральной мерой* характера χ . Верно и обратное: каждой вероятностной мере на Ω соответствует характер группы $U(\infty)$.

В соответствии с общей теорией дизъюнктность двух сферических представлений T и T' эквивалентна дизъюнктности спектральных мер σ и σ' , отвечающих их характерам. Ее мы и будем доказывать.

Удобным средством для описания характеров группы $U(\infty)$ является *граф Гельфанда–Цетлина* $\mathbb{GT}$ (также называемый графом сигнатур). Его вершины соответствуют неприводимым представлениям групп $U(N)$, а ребра задают отношения включения между неприводимыми представлениями групп $U(N)$ и $U(N+1)$. Обозначим через $\mathbb{GT}_N$ N -й уровень графа, отвечающий неприводимым представлениям группы $U(N)$. Вершины $\mathbb{GT}_N$ могут быть отождествлены с доминантными весами представлений группы $U(N)$, которые являются упорядоченными наборами из N целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N)$ — *сигнатурами*. Мы соединяем две сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ ребром и пишем $\lambda < \mu$, если

$$\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq \mu_{N+1}.$$

В дальнейшем нам будет удобно изображать сигнатуру λ двумя диаграммами Юнга λ^+ и λ^- : длины строчек в λ^+ — это в точности положительные координаты λ_i , а длины строчек в λ^- — это абсолютные значения отрицательных координат. Мы будем называть λ^+ и λ^- *положительной диаграммой Юнга* и *отрицательной диаграммой Юнга* соответственно.

Если $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ — две диаграммы Юнга, такие, что $\tilde{\lambda} \subset \tilde{\mu}$, то их теоретико-множественная разность называется *косой диаграммой*; мы обозначаем ее через $\tilde{\mu}/\tilde{\lambda}$ (см. [8, гл. 1]). Напомним, что косая диаграмма Юнга, содержащая не более одной клетки в каждом столбце, называется *горизонтальной полоской*. Заметим, что $\lambda < \mu$ в том и только в том случае, когда и μ^+/λ^+ , и μ^-/λ^- являются горизонтальными полосками.

Напомним также, что *содержанием* клетки $\square$ диаграммы Юнга, лежащей в i -й строке и j -м столбце, называется число $c(\square) = j - i$.

Неприводимый характер группы $U(N)$, индексированный сигнатурой $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, обозначается нами через χ^λ . Ограничение произвольного характера χ группы $U(\infty)$ на $U(N)$ мы можем разложить в выпуклую комбинацию функций $\chi^\lambda(\cdot)/\chi^\lambda(e)$. Коэффициенты этого разложения определяют вероятностное распределение $M_N(\lambda)$ на дискретном множестве $\mathbb{GT}_N$. Таким образом мы получаем биекцию между характерами и последовательностями вероятностных распределений $\{M_N\}_{N=1,2,\dots}$, называемыми *когерентными системами* (из соотношений когерентности, связывающих M_N и M_{N+1}). Более подробную информацию можно найти в работе [11].

Путем в графе сигнатур $\mathbb{GT}$ называется конечная или бесконечная последовательность $\tau = (\tau(1), \tau(2), \dots)$, такая, что $\tau(N) \in \mathbb{GT}_N$ и для каждого $N = 1, 2, \dots$ сигнатуры $\tau(N)$ и $\tau(N+1)$ соединены ребром. В дальнейшем $\tau_i(N)$ будет обозначать i -ю координату сигнатуры $\tau(N)$.

Мы будем говорить, что клетка $\square$ добавляется при движении вдоль пути τ к положительной диаграмме Юнга на этаже N , если $\square \in \tau^+(N+1)/\tau^+(N)$.

На множестве $\mathcal{T}$, состоящем из всех бесконечных путей в $\mathbb{GT}$, можно определить топологию. Ее база состоит из *цилиндрических множеств*

$$C_\tau = \{\zeta \in \mathcal{T} \mid \zeta(1) = \tau(1), \dots, \zeta(N) = \tau(N)\},$$

где $\tau = (\tau(1), \dots, \tau(N))$ — конечный путь.

Теперь мы можем рассмотреть σ -алгебру борелевских множеств, порожденных этой топологией, и изучать меры на этой σ -алгебре.

Мера на $\mathcal{T}$ называется *центральной*, если мера произвольного цилиндрического множества C_τ , $\tau = (\tau(1), \dots, \tau(N))$, зависит только от $\tau(N)$.

Рассмотрим некоторую сигнатуру $\lambda \in \mathbb{GT}_N$. Заметим, что множество путей, оканчивающихся в λ , состоит ровно из $\text{Dim}_N(\lambda) = \chi^\lambda(e)$ элементов. По любой когерентной системе на графе сигнатур можно построить центральную меру ρ на множестве $\mathcal{T}$, положив

$$\rho(C_\tau) = \frac{M_N(\tau(N))}{\text{Dim}_N(\tau(N))},$$

где C_τ , как и выше, обозначает произвольное цилиндрическое множество, а $\tau(N)$ — это конец пути τ . Корректность такого определения следует из свойств когерентных систем.

Итак, мы получили последовательность биекций, связывающих характеры группы $U(\infty)$, вероятностные меры σ на пространстве Ω (спектральные меры), когерентные системы $\{M_N\}$ и центральные меры ρ на пространстве $\mathcal{T}$.

Покажем, что дизъюнктность спектральных мер σ и σ' следует из дизъюнктности соответствующих центральных мер ρ и ρ' (для случая бесконечной симметрической группы аналогичное предложение было доказано в работе [5]).

Предложение 2. Пусть две центральные меры ρ и ρ' на пространстве $\mathcal{T}$ дизъюнктны. Тогда отвечающие им спектральные меры σ и σ' на пространстве Ω также являются дизъюнктными.

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через $\tilde{\sigma} = \sigma \wedge \sigma'$ наибольшую меру, не превосходящую мер σ и σ' (мера μ не превосходит меры ν , если $\mu(A) \leq \nu(A)$ для любого измеримого множества A). Проверка существования подобной меры не представляет трудностей. Понятно, что если меры σ и σ' не являются дизъюнктными, то $\tilde{\sigma}$ — некоторая ненулевая мера.

Далее заметим, что соответствие $\sigma \leftrightarrow \rho$ между вероятностными спектральными мерами на пространстве Ω и центральными мерами на $\mathcal{T}$ продолжается до соответствия между произвольными конечными мерами, которые не обязаны быть вероятностными.

Обозначим через $\tilde{\rho}$ центральную меру, соответствующую $\tilde{\sigma}$.

Для значений этой меры на цилиндрических множествах существует интегральное представление. Пусть $\omega \in \Omega$, а ρ_ω — центральная мера на $\mathcal{T}$, отвечающая экстремальному характеру $\chi^{(\omega)}(U)$. Обозначим через $f_{\tau(N)}(\omega)$ значение меры ρ_ω на цилиндрическом множестве C_τ , где $\tau(N)$ — конец пути τ . Имеем

$$\tilde{\rho}(C_\tau) = \int_{\Omega} f_{\tau(N)}(\omega) \tilde{\sigma}(d\omega).$$

Из последней формулы, неотрицательности величины $f_\lambda(\omega)$ и неравенств $\tilde{\sigma} \leq \sigma$, $\tilde{\sigma} \leq \sigma'$ сразу следует, что $\tilde{\rho} \leq \rho$ и $\tilde{\rho} \leq \rho'$. Значит, $\rho \wedge \rho' \neq 0$ и меры ρ и ρ' не могут быть дизъюнктными. $\square$

В дальнейшем мы будем доказывать дизъюнктность центральных мер на пространстве путей в графе сигнатур, отвечающих характерам представлений $T_{z,w}$ и $T_{z',w'}$. Обозначим эти меры через $\rho_{z,w}$ и $\rho_{z',w'}$.

В работе [11] было показано, что когерентная система, отвечающая представлению $T_{z,w}$, задается следующей формулой:

$$M_N^{z,w}(\lambda) = (S_N(z,w))^{-1} \prod_{i=1}^N \left| \frac{1}{\Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(w + N + 1 + \lambda_i - i)} \right|^2 \text{Dim}_N^2(\lambda),$$

где $S_N(z,w)$ — нормировочная константа, точное значение которой для нас не будет важно. Пусть $P_N^{z,w}(\lambda)$ — значение меры $\rho_{z,w}$ на некотором цилиндрическом множестве C_τ , таком, что λ является концом пути τ . Имеет место следующая формула:

$$\rho_{z,w}(C_\tau) = P_N^{z,w}(\tau(N)) = M_N^{z,w}(\tau(N)) / \text{Dim}_N(\tau(N)).$$

Ниже меры $\rho_{z,w}$ будут называться (z,w) -мерами.

С этого момента мы можем забыть о представлениях $T_{z,w}$, все дальнейшие рассуждения основываются на последних двух формулах.

§2. Схема доказательства

Нашей целью является доказательство того, что (z,w) -меры попарно дизъюнкты.

Рассмотрим две пары (z,w) и (z',w') , такие, что все четыре числа не являются целыми, $z \neq z'$, $z \neq \bar{z}'$, $w \neq w'$, $w \neq \bar{w}'$. Изучим отношение $P_N^{z,w}/P_N^{z',w'}$. Пусть Ω — множество всех бесконечных путей, вдоль которых это отношение стремится к конечному ненулевому пределу. Понятно, что это множество является борелевским. Дизъюнктность мер теперь следует из равенств $\rho_{z,w}(\Omega) = \rho_{z',w'}(\Omega) = 0$ и следующего предложения.

Предложение 3 [14, гл. 7, разд. 6, теорема 2]. Пусть X — измеримое пространство с фильтрацией $\{A_n\}$. Обозначим через P_n и $\tilde{P}_n$ ограничения двух произвольных вероятностных мер P и $\tilde{P}$ на σ -алгебру A_n . Предположим, что мера $\tilde{P}_n$ является абсолютно непрерывной по отношению к мере P_n , а производная Радона–Никодима $d\tilde{P}_n/dP_n$ почти наверное по мере P стремится к нулю (при n , стремящемся к ∞). Тогда меры P и $\tilde{P}$ дизъюнкты.

Чтобы показать, что мера множества Ω равняется нулю, мы рассматриваем вспомогательное множество G (оно будет определено далее). Введем временное обозначение $\Omega_0 = G \cap \Omega$. Ниже мы докажем, что мера множества Ω_0 равняется нулю (§§3 и 4), а потом покажем, что (z,w) -мера множества G равняется 1 (§5). Понятно, что эти два факта влекут за собой равенство нулю (z,w) -меры множества Ω .

Первая часть доказательства (оценки на меру множества Ω_0) содержит определенное количество технических деталей, и нам бы хотелось сначала привести некоторые основные идеи. Оказывается, что от множества Ω_0 можно перейти к семейству множеств Ω_0^l . Для каждого Ω_0^l мы строим набор отображений $\{f_i\}$,

которые переводят $\mathfrak{Q}_0^l$ в набор попарно дизъюнктивных множеств $\{\mathfrak{Q}_i^l\}$. Мера каждого из множеств $\mathfrak{Q}_i^l$ совпадает с мерой множества $\mathfrak{Q}_0^l$. В силу того, что подобных множеств $\mathfrak{Q}_i^k$ существует бесконечно много, мы можем заключить, что мера каждого из них должна равняться нулю. Следовательно, и мера множества $\mathfrak{Q}_0$ также равняется нулю.

Суть отображений f_i состоит в небольшой перестройке путей. Оказывается, что достаточно изменить путь только на одном этаже, чтобы получить достаточно большую флуктуацию от гипотетического предельного значения отношения $P_N^{z,w}/P_N^{z',w'}$. Это наблюдение и является главной идеей доказательства основной теоремы.

Каждое из отображений f_i устроено очень просто. Зафиксируем заранее некоторое большое целое число k . Отображение f_i модифицирует путь следующим образом: вместо того, чтобы добавить клетку с содержанием k к положительной диаграмме Юнга на этаже N , мы производим это добавление на этаже $N + 1$. Хотя не каждый путь может быть преобразован подобным образом, в дальнейшем мы покажем, что для практически всех путей из множества $\mathfrak{Q}_0^l$ отображения f_i могут быть корректно определены.

Важным элементом доказательства является следующее наблюдение: вероятность добавления на этаже N горизонтальной полоски, содержащей m клеток с содержаниями $k, k + 1, \dots, k + m - 1$, не превосходит величины $c(k, m)/N^m$ (это утверждение будет использовано нами лишь для $m = 1$, но и в более общем случае оно остается верным).

§3. Перестройка путей

Приступим к детальному доказательству.

Пусть $\tau = (\tau(1), \tau(2), \dots)$ — некоторый путь в графе сигнатур. Тогда $\{\tau^+(N)\}$ является возрастающей последовательностью диаграмм Юнга. (Чтобы не усложнять обозначения, мы обычно пишем $\tau^+(N)$ вместо $(\tau(N))^+$.) Положим $\bar{\tau}^+ = \bigcup_N \tau^+(N)$. Понятно, что множество $\bar{\tau}^+$ — это либо целый квадрант, либо некоторая его часть, называемая *толстым крюком*. Обозначим через G^+ множество всех таких путей τ , что $\bar{\tau}^+$ является полным квадрантом. Аналогичным образом мы полагаем $\bar{\tau}^- = \bigcup_N \tau^-(N)$ и обозначаем через G^- множество всех таких путей τ , что $\bar{\tau}^-$ — квадрант. В §5 мы покажем, что $\rho_{z,w}(G^+ \cup G^-) = 1$. А сейчас нашей целью является доказательство следующей теоремы:

Теорема 4. Если $\{z, \bar{z}\} \neq \{z', \bar{z'}\}$, то

$$\rho_{z,w}(\mathfrak{Q} \cap G^+) = \rho_{z',w'}(\mathfrak{Q} \cap G^+) = 0.$$

Если $\{w, \bar{w}\} \neq \{w', \bar{w'}\}$, то

$$\rho_{z,w}(\mathfrak{Q} \cap G^-) = \rho_{z',w'}(\mathfrak{Q} \cap G^-) = 0.$$

В частности, из этой теоремы следует, что если $z \neq z'$, $z \neq \bar{z'}$, $w \neq w'$ и $w \neq \bar{w'}$, то соответствующие меры дизъюнктивны.

Обратим внимание на то, что и граф Гельфанда–Цетлина, и (z, w) -меры инвариантны под действием симметрии

$$z \leftrightarrow w, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \leftrightarrow (-\lambda_N, \dots, -\lambda_1).$$

Следовательно, нам достаточно доказать только первую часть теоремы.

Положим

$$h_N(\tau) = \frac{P_{N+1}^{z,w}(\tau(N+1))}{P_{N+1}^{z',w'}(\tau(N+1))} : \frac{P_N^{z,w}(\tau(N))}{P_N^{z',w'}(\tau(N))}.$$

Заметим, что если $P_N^{z,w}(\tau(N))/P_N^{z',w'}(\tau(N))$ стремится к конечному ненулевому пределу, то $h_N(\tau) \rightarrow 1$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех путей, вдоль которых $h_N \rightarrow 1$. Нашей целью будет доказательство того, что (z, w) -мера множества $\mathfrak{A} \cap G^+$ равняется нулю ($\rho_{z,w}(\mathfrak{A} \cap G^+) = 0$).

Зафиксируем некоторое $\delta > 0$. Мы будем говорить, что на этаже N происходит δ -флуктуация, или, для краткости, просто флуктуация, если $|h_N - 1| > \delta$. Обозначим через A_t^δ множество всех путей, в которых, начиная с этажа t , нет δ -флуктуаций. Мы покажем, что если выбрать достаточно малое δ , то $\rho_{z,w}(A_t^\delta \cap G^+) = 0$ для всех t . Легко видеть, что из этого утверждения вытекает наша теорема.

Теорема 5. *Существует $\delta > 0$, такое, что для каждого t*

$$\rho_{z,w}(A_t^\delta \cap G^+) = 0.$$

Доказательство. Напомним, что содержанием клетки, лежащей в i -й строке и j -м столбце, называется число $c(\square) = j - i$.

Понятно, что для любого k вдоль любого пути из множества G^+ клетка с содержанием k добавляется к положительной диаграмме Юнга бесконечно много раз.

Идея нашего рассуждения состоит в следующем: добавление клетки с достаточно маленьким положительным содержанием может вызвать δ -флуктуацию. Предположим, что $\bar{\tau}$ — конечный фрагмент пути, такой, что в нем не происходит δ -флуктуаций, а клетка с содержанием k при движении вдоль $\bar{\tau}$ добавляется. Тогда для почти каждого $\bar{\tau}$ существует другой фрагмент $\bar{\tau}'$, такой, что у $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}'$ совпадают начала и концы, но при этом при движении вдоль фрагмента $\bar{\tau}'$ уже происходит δ -флуктуация. Так как вдоль типичного пути добавляется бесконечно много клеток с содержанием k , то последнее утверждение влечет за собой и более сильное. А именно, если фрагмент $\bar{\tau}$ является достаточно длинным, то мы можем сконструировать сколь угодно много различных подобных фрагментов $\bar{\tau}'$. А из этого уже следует, что мера множества всех путей, не содержащих δ -флуктуаций, равняется нулю.

Итак, зафиксируем некоторое натуральное число k . Его значение будет выбрано нами позднее.

Для заданных чисел k и последовательности натуральных чисел $N_1 < N_2 < \dots$ обозначим через $B(k, \{N_i\})$ множество всех таких путей $\tau \in G^+$, что для каждого $m > 0$ существует положительное целое число $n(m)$ и клетка $\square(m)$ с координатами (i, j) , удовлетворяющие следующим условиям:

1. $n(m)$ является минимальным числом из $[N_m, N_{m+1})$, таким, что $\tau^+(n+1)/\tau^+(n)$ содержит клетку с содержанием k ;
2. $\square(m) \in \tau^+(n(m)+1)/\tau^+(n(m))$ и $c(\square(m)) = j - i = k$;
3. $\tau^+(n(m)+1)/\tau^+(n(m))$ не содержит клетки с содержанием $k+1$ (а следовательно, не содержит клетки с координатами $(i, j+1)$);
4. $\tau^+(n(m)+2)/\tau^+(n(m)+1)$ не содержит клетки с содержанием $k-1$ (а следовательно, не содержит клетки с координатами $(i+1, j)$).

В дальнейшем мы построим определенные на этих множествах отображения f_i , которые «создают δ -флуктуации».

Предложение 6 (о допустимых путях). *Пусть k таково, что $\operatorname{Re}(k+w) > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность натуральных чисел $N_1 < N_2 < \dots$, такая, что $\rho_{z,w}(G^+ \setminus B(k, \{N_i\})) < \varepsilon$.*

Это предложение будет доказано в следующем параграфе. А сейчас мы докажем с его помощью теорему 5.

Обозначим через H пересечение множеств $B(k, \{N_i\})$ и A_t^δ . Ясно, что нам достаточно доказать, что для достаточно малого δ мера множества H равняется нулю (выбор δ не будет зависеть от ε).

Путь, лежащий в множестве H , может быть неформально описан следующим образом. Начиная с некоторого этажа, в нем не происходит δ -флуктуаций, однако клетки с содержанием k , описанные в предложении 6, все равно добавляются к положительной диаграмме Юнга.

Зафиксируем множество H и отвечающую ему последовательность натуральных чисел $\{N_i\}$. Выберем из чисел N_i некоторое достаточно большое число N_p . Возьмем целое число $q > p$ и рассмотрим этажи графа сигнатур с номерами от N_p до N_q . Последовательность $(\tau(N_p), \tau(N_p + 1), \dots, \tau(N_q))$ назовем $[N_p, N_q]$ -фрагментом пути $\tau = (\tau(1), \tau(2), \dots)$.

Зафиксируем произвольные сигнатуры λ^p на этаже N_p и сигнатуру λ^q на этаже N_q . Рассмотрим всевозможные $[N_p, N_q]$ -фрагменты путей τ , такие, что $\tau(N_p) = \lambda^p$ и $\tau(N_q) = \lambda^q$. Понятно, что существует конечное число подобных $[N_p, N_q]$ -фрагментов. В силу того что (z, w) -меры центральны, эти фрагменты равномерно распределены. Нам бы хотелось изучить долю $[N_p, N_q]$ -фрагментов, полученных из путей множества H , среди всех таких $[N_p, N_q]$ -фрагментов. Мы покажем, что эта доля стремится к нулю, когда $q \rightarrow \infty$ (сходимость равномерна по λ^p и λ^q). Ясно, что из этого уже будет следовать равенство нулю меры множества H .

Выберем теперь также сигнатуры на уровнях $N_{p+1}, N_{p+2}, \dots, N_{q-1}$. Рассмотрим $[N_p, N_q]$ -фрагменты путей τ , таких, что $\tau(N_p) = \lambda^p$, $\tau(N_{p+1}) = \lambda^{p+1}$, $\dots$, $\tau(N_q) = \lambda^q$. Нам снова хотелось бы изучить долю, которую составляют $[N_p, N_q]$ -фрагменты, полученные из путей множества H , среди всех подобных $[N_p, N_q]$ -фрагментов. Достаточно доказать, что эта доля стремится к нулю при q , стремящемся к бесконечности.

Зафиксируем некоторый $[N_p, N_q]$ -фрагмент пути τ , удовлетворяющий приведенным выше условиям. Рассмотрим подфрагмент этого $[N_p, N_q]$ -фрагмента, который сам является $[N_s, N_{s+1}]$ -фрагментом.

Мы знаем, что на некотором этаже $n(s) \in [N_s, N_s + 1, \dots, N_{s+1}]$ к диаграмме добавляется клетка с содержанием k . Определим модификацию f_s пути τ , которая состоит в добавлении этой клетки не на этаже $n(s)$, а на этаже $n(s) + 1$ (т.е. мы удаляем клетку из косой диаграммы Юнга $\tau^+(n(s) + 1)/\tau^+(n(s))$ и добавляем ту же самую клетку в косую диаграмму $\tau^+(n(s) + 2)/\tau^+(n(s) + 1)$). Условия 3 и 4 на множество $B(k, \{N_i\})$ гарантируют, что подобная модификация возможна. Таким образом, мы получаем некоторое отображение, областью определения которого является множество H . Понятно, что оно инъективно. (Чтобы определить прообраз пути, необходимо просто найти первое добавление клетки с содержанием k и переместить это добавление на предыдущий этаж.)

Лемма 7. *Можно выбрать параметры k, δ и p таким образом, что $f_s(\tau)$ не лежит в множестве H ни для какого пути $\tau \in H$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$h_{n(s)}(\tau) = \frac{P_{n(s)+1}^{z,w}(\tau(n(s)+1))}{P_{n(s)+1}^{z',w'}(\tau(n(s)+1))} : \frac{P_{n(s)}^{z,w}(\tau(n(s)))}{P_{n(s)}^{z',w'}(\tau(n(s)))}.$$

Заметим, что $\tau(n(s))$ не меняется под действием отображения f_s , тогда как $\tau(n(s)+1)$, напротив, меняется. Положим $N := n(s)+1$ и изучим N -й этаж. Суть нашей модификации пути состоит в том, что в новом пути для единственного i число λ_i (которое является длиной i -й строчки диаграммы $\tau^+(N)$) уменьшилось на 1. Вспомним, что

$$P_N^{z,w}(\lambda) = (S_N(z, w))^{-1} \prod_{i=1}^N \left| \frac{1}{\Gamma(z - \lambda_i + i) \Gamma(w + N + 1 + \lambda_i - i)} \right|^2 \text{Dim}_N(\lambda).$$

Следовательно, при преобразовании $\lambda_i \mapsto \lambda_i - 1$ эта величина (плотность) умножается на

$$\left| \frac{w + N + 1 + k}{z - k} \right|^2 \cdot (\text{множители, не зависящие от } z, w).$$

Мы можем заключить, что отношение плотностей $P_N^{z,w}/P_N^{z',w'}$ умножается на

$$\left| \frac{z' - k}{z - k} \right|^2 \cdot \left| \frac{w + N + 1 + k}{w' + N + 1 + k} \right|^2. \quad (*)$$

Исследуем сначала первый сомножитель. Заметим, что если $z \neq z'$ и $z \neq \bar{z}'$, то можно найти такие $k > 0$ и $\nu > 0$, что

$$\left| \left| \frac{z' - k}{z - k} \right|^2 - 1 \right| > \nu$$

и $\text{Re}(k + w) > 0$. Зафиксируем такие k и ν .

Теперь рассмотрим второй сомножитель в (*). Ясно, что этот сомножитель стремится к 1 при N , стремящемся к бесконечности. Пусть число N_p столь велико, что для любого $N > N_p$ этот множитель отличается от 1 менее чем на $\nu/100$.

В результате мы можем заключить, что произведение (*) отличается от 1 более чем на $\nu/2$.

Выберем $\delta \leq \nu/100$. Понятно, что для такого δ два отношения плотностей, до применения f_s и после применения, не могут одновременно принадлежать δ -окрестности 1 (так как f_s умножает это отношение плотностей на число (*), которое достаточно далеко от 1).

Выберем теперь p так, чтобы было выполнено еще и неравенство $N_p \geq t$. Из всего сказанного следует, что в любом пути из множества H на этажах начиная с N_p -го нет δ -флуктуаций, а после применения отображения f_s такие δ -флуктуации обязательно появляются. Следовательно, образ пути из множества H под действием отображения f_s не лежит в множестве H . $\square$

Лемма 8. *Предположим, что все параметры выбраны так же, как в лемме 7. Если $s \neq s'$, то множества $f_s(H)$ и $f_{s'}(H)$ не пересекаются.*

Доказательство. Из доказательства последней леммы следует, что в путях из множеств $f_s(H)$ и $f_{s'}(H)$ δ -флуктуации возникают на разных этажах. Следовательно, эти множества не пересекаются. $\square$

Пусть теперь различных $[N_p, N_q]$ -фрагментов путей множества H ровно E штук. Каждое из отображений f_s дает нам E дополнительных фрагментов, все f_s вместе дают $E(q - p)$ различных фрагментов. Следовательно, доля $[N_p, N_q]$ -фрагментов, получаемых из путей множества H , во всех $[N_p, N_q]$ -фрагментах (а значит, и мера множества H) не превосходит $E/(E + E(q - p))$. Выбирая число q достаточно большим, мы можем добиться сколь угодно маленьких значений для последнего выражения. Таким образом, теорема 5 доказана. $\square$

§4. Доказательство предложения о допустимых путях

Доказательство предложения 6. Будем интерпретировать (z, w) -меру как марковский процесс на графе Гельфанда–Цетлина с переходными вероятностями

$$p_{z,w}(\mu|\lambda) = \frac{P_{N+1}^{z,w}(\mu)}{P_N^{z,w}(\lambda)}, \quad \mu \in \mathbb{GT}_{N+1}, \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Таким образом, начиная с этого момента, мы можем говорить о случайном пути τ или о марковской цепи $\tau(N)$.

Лемма 9. *Предположим, что k таково, что $\operatorname{Re}(k + w) > 0$. Зафиксируем произвольную сигнатуру μ на этаже N (а значит, также зафиксируем и отвечающую ей положительную диаграмму Юнга). Для условных вероятностей имеют место две следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \operatorname{Prob} \left\{ \exists \square \in \frac{\tau^+(N+1)}{\tau^+(N)} : c(\square) = k \mid \tau(N) = \mu \right\} &< \frac{c(k)}{N}, \\ \operatorname{Prob} \left\{ \exists \square \in \frac{\tau^+(N+1)}{\tau^+(N)} : c(\square) = k \mid \tau(N) = \mu, \exists \square \in \frac{\tau^+(N+1)}{\tau^+(N)} : c(\square) = k-1 \right\} &< \frac{c(k)}{N}. \end{aligned}$$

Замечание. Вместо μ мы могли бы фиксировать весь путь $(\mu^1, \dots, \mu^N)$, идущий от первого этажа до сигнатуры μ^N , и заменить условие $\tau(N) = \mu$ на условие $\tau(1) = \mu^1, \dots, \tau(N) = \mu^N$. Свойство центральности наших мер гарантирует, что эта замена не повлияет ни на формулировку последнего утверждения, ни на его доказательство.

Доказательство леммы 9. Заметим, что для фиксированной сигнатуры μ существует не более одной клетки с содержанием k , которая может быть добавлена к положительной диаграмме. Обозначим координаты такой клетки через (i, j) . Сравним условную вероятность события $\tau_i(N+1) = j-1$ при условии $\tau(N) = \mu$ с условной вероятностью события $\tau_i(N+1) \geq j$ (при том же условии). Мы покажем, что последняя вероятность отличается от первой умножением на множитель вида $c(k)/N$, из чего уже будет следовать утверждение леммы.

В дополнение к выбору сигнатуры μ зафиксируем также все длины строчек на уровне $N+1$, кроме i -й строчки, произвольным образом. Таким образом, условие имеет вид $\tau(N) = \mu$, $\tau_1(N+1) = \lambda_1, \dots, \tau_{i-1}(N+1) = \lambda_{i-1}$, $\tau_{i+1}(N+1) = \lambda_{i+1}, \dots, \tau_{N+1}(N+1) = \lambda_{N+1}$.

Обозначим через p_m отношение условной вероятности события $\tau_i(N+1) = j-1$ к условной вероятности события $\tau_i(N+1) = j-1$. Доказательство нашего

утверждения сводится к проверке неравенства $\sum_{m=1}^{\infty} p_m < c(k)/N$. Используя определение переходной вероятности и формулу Вейля для размерности, мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Dim}_{N+1}(\lambda) &= \prod_{1 \leq u < v \leq N+1} \frac{\lambda_u - \lambda_v + v - u}{v - u}, \\ p_m &= \left| \frac{\Gamma(z - k + 1)\Gamma(w + N + 1 + k)}{\Gamma(z - k + 1 - m)\Gamma(w + N + 1 + k + m)} \right|^2 \\ &\quad \times \prod_{a=1}^{i-1} \frac{\lambda_a - a - (k - 1 + m)}{\lambda_a - a - (k - 1)} \prod_{a=i+1}^{N+1} \frac{(k - 1 + m) - (\lambda_a - a)}{(k - 1) - (\lambda_a - a)}. \end{aligned}$$

Первый сомножитель не превосходит 1, и мы можем его опустить, а для оценки второго воспользуемся неравенством

$$\frac{(k - 1 + m) - (\lambda_a - a)}{(k - 1) - (\lambda_a - a)} = \frac{m + (k - 1 - \lambda_a + a)}{k - 1 - \lambda_a + a} \leq \frac{m + (a - i)}{a - i}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p_m &\leq \left| \frac{\Gamma(z - k + 1)\Gamma(w + N + 1 + k)}{\Gamma(z - k + 1 - m)\Gamma(w + n + 1 + k + m)} \right|^2 \prod_{a=i+1}^{N+1} \frac{m + (a - i)}{a - i} \\ &\leq \left| \frac{\Gamma(z - k + 1)\Gamma(w + N + 1 + k)}{\Gamma(z - k + 1 - m)\Gamma(w + N + 1 + k + m)} \right|^2 \prod_{a=1}^N \frac{m + a}{a} \\ &= \frac{|(k - z)_m|^2}{|(w + N + 1 + k)_m|^2} \cdot \frac{(m + N)!}{N! m!} = \frac{|(k - z)_m|^2 (N + 1)_m}{|(w + N + 1 + k)_m|^2 m!} \\ &\leq \frac{((|\text{Re}(k - z)| + |\text{Im } z|)_m)^2}{|\text{Re}(w + N + 1 + k)|_m m!} \cdot \frac{(N + 1)_m}{|\text{Re}(w + N + 1 + k)|_m}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $\text{Re}(k + w) > 0$, то второй множитель меньше 1, а значит,

$$\begin{aligned} p_m &\leq \frac{((|\text{Re}(k - z)| + |\text{Im } z|)_m)^2}{|\text{Re}(w + N + 1 + k)|_m m!} \\ &= \frac{(|\text{Re}(k - z)| + |\text{Im } z|)^2 (|\text{Re}(k - z)| + |\text{Im } z| + 1)_{m-1}^2}{|\text{Re}(w + N + 1 + k)|_m |\text{Re}(w + N + 2 + k)|_{m-1} (m - 1)!} \\ &\leq \frac{c(k)}{N} \frac{((|\text{Re}(k - z)| + |\text{Im } z| + 1)_{m-1})^2}{|\text{Re}(w + N + 2 + k)|_{m-1} (m - 1)!}. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m \leq \frac{c(k)}{N} F(|\text{Re}(k - z)| + |\text{Im } z| + 1, |\text{Re}(k - z)| + |\text{Im } z| + 1, |\text{Re}(w + N + 2 + k)|; 1).$$

Здесь $F(a, b, c; 1)$ — гипергеометрическая функция ${}_2F_1$ с параметрами a, b, c и аргументом 1.

В нашем случае $a = b = |\text{Re}(k - z)| + |\text{Im } z| + 1$, $c = |\text{Re}(w + N + 2 + k)|$.

Используя формулу Гаусса для значения гипергеометрической функции в точке 1 (см., например, [1]), мы заключаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m \leq \frac{c(k)}{N} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-2a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-a)}.$$

Когда $N \rightarrow \infty$, параметр c стремится к бесконечности, тогда как a не меняется. Значит, $\Gamma(c)\Gamma(c-2a)/(\Gamma(c-a)\Gamma(c-a)) \rightarrow 1$. Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m \leq \frac{c_1(k)}{N}. \quad \square$$

Лемма 10. *Зафиксируем k и выберем два достаточно больших целых числа m и n . Рассмотрим следующее событие: существует число l , $n < l < m$, такое, что выполнены условия*

- 1) *существует клетка $\square$, такая, что $c(\square) = k$, $\square \in \tau^+(l+1)/\tau^+(l)$,*
 - 2) *либо существует клетка $\square$, такая, что $c(\square) = k+1$, $\square \in \tau^+(l+1)/\tau^+(l)$, либо существует клетка $\square$, такая, что $c(\square) = k-1$, $\square \in \tau^+(l+2)/\tau^+(l+1)$.*
- Вероятность этого события не превосходит $c_1(k)/n$.*

Доказательство. Представим событие «Существует число l , $n < l < m$, такое, что выполнены условия 1) и 2)» как дизъюнктное объединение событий «Минимальное l , $n < l < m$, для которого выполнены условия 1) и 2), равняется i » ($n < i < m$). Обозначим эти события через L^i . Пусть τ^i — путь, идущий от первого этажа графа сигнатур до этажа i и такой, что минимальное l , $n < l < m$, для которого выполнены условия 1) и 2), в точности равняется i . Запишем L^i как дизъюнктное объединение элементарных событий $C_{\tau^i}^i$, отвечающих различным таким τ^i .

Применение предыдущей леммы для каждого $C_{\tau^i}^i$ и суммирование всех полученных оценок завершает доказательство. $\square$

Продолжим доказательство предложения 6.

Заметим, что лемма 10 влечет за собой следующее утверждение: если N_1 достаточно велико, а числа N_i возрастают хотя бы так же быстро, как 2^i , то третье и четвертое условия в определении множества $B(k, \{N_i\})$ автоматически выполнены на множестве, мера которого сколь угодно близка к 1.

Имея некоторое ε , выберем N_1 столь большим, чтобы мера множества, на котором третье или четвертое условие из определения множества $B(k, \{N_i\})$ могут быть не выполнены, не превышала $\varepsilon/2$. Обозначим дополнение этого множества через S .

Пусть $A_1 = S \cap G^+$. Ясно, что $\rho_{z,w}(G^+ \setminus A_1) \leq \varepsilon/2$.

Обозначим через $A_2^R \subset A_1$ ($R > N_1$) подмножество, состоящее из таких путей, что клетка с содержанием k добавляется на одном из этажей $N_1, N_1 + 1, \dots, R$. Ясно, что $A_2^R \subset A_2^{R+1}$. Мы знаем, что вдоль любого пути из множества $A_1 \subset G^+$ клетки с содержанием k добавляются бесконечно много раз. Значит, множества A_2^R исчерпывают A_1 . Следовательно, мы можем выбрать число $N_2 > 2N_1$, такое, что

$$\rho_{z,w}(A_1 \setminus A_2^{N_2}) < \varepsilon/4.$$

Положим $A_2 = A_2^{N_2}$.

Далее мы выбираем число $N_3 > 2N_2$ и множество $A_3 \subset A_2$ аналогичным образом. Выполнено неравенство $\rho_{z,w}(A_2 \setminus A_3) < \varepsilon/8$. И так далее.

Пересечение всех множеств A_i и является искомым множеством B_ε . $\square$

§5. Мера множества всех путей, заключенных в толстом крюке

Мы говорим, что и положительная, и отрицательная диаграммы Юнга пути $\tau = (\tau(1), \tau(2), \dots)$ заключены в толстом крюке, если одновременно и $\bigcup_N \tau^+(N)$, и $\bigcup_N \tau^-(N)$ не являются целыми квадрантами (т.е. эти множества являются так называемыми толстыми крюками). Обозначим множество всех таких путей через $\overline{G}$. Легко видеть, что $\overline{G} = \mathcal{T} \setminus (G^+ \cup G^-)$.

Теорема 11. (z, w) -мера множества $\overline{G}$ равняется нулю.

Доказательство. Обозначим через $R(i, j, l, m, t)$ множество всех путей τ , таких, что для каждого $N \geq t$

- 1) $\tau_i(N) = j - 1$,
- 2) $\tau_{i-1}(N) \geq j$,
- 3) $\tau_{N-l}(N) = m + 1$,
- 4) $\tau_{N-l+1}(N) \leq m$.

Ясно, что $\overline{G}$ является объединением всевозможных $R(i, j, l, m, t)$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой пятерки параметров (i, j, l, m, t) выполнено равенство $\rho_{z,w}(R(i, j, l, m, t)) = 0$.

Нам будет снова удобно рассматривать $\tau(N)$ как марковскую цепь.

Лемма 12. Пусть N достаточно велико. Обозначим через p_N условную вероятность события « $\tau_i(N+1) = j-1$ и $\tau_{N+1-l}(N+1) = m+1$ » при условии $\tau_i(N) = j-1$, $\tau_{i-1}(N) \geq j$, $\tau_{N-l}(N) = m+1$, $\tau_{N-l+1}(N) \leq m$.

Величина p_N не превышает $1 - \varepsilon/N$.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные сигнатуры на этаже $N+1$, которые соединены ребром с данной сигатурой μ на этаже N . Для каждой сигнатуры λ на этаже $N+1$, такой, что $\lambda_i = j-1$, рассмотрим следующую новую сигнатуру λ' : длины всех ее строк, кроме i -й, остаются теми же, что и у λ , а $\lambda_i = j$.

Сравним условные вероятности событий « $\tau(N+1) = \lambda'$ » и « $\tau(N+1) = \lambda$ » при условии $\tau(N) = \mu$.

Эти условные вероятности отличаются множителем

$$\frac{P_N^{z,w}(\lambda')}{P_N^{z,w}(\lambda)} = \left| \frac{z - j + i}{w + N + 1 + j - i} \right|^2 \cdot \frac{\text{Dim}_{N+1}(\lambda')}{\text{Dim}_{N+1}(\lambda)}.$$

Если N достаточно велико, то первый из сомножителей правой части больше чем const/N^2 .

По формуле Вейля для размерности

$$\text{Dim}_{N+1}(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq N+1} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

Значит,

$$\frac{\text{Dim}_{N+1}(\lambda')}{\text{Dim}_{N+1}(\lambda)} = \prod_{1 \leq p < i} \frac{\lambda_p - p - j + i}{\lambda_p - p - (j-1) + i} \cdot \prod_{N+1 \geq p > i} \frac{j - i - (\lambda_p - p)}{j - i - 1 - (\lambda_p - p)}. \quad (**)$$

Заметим, что здесь первое из произведений ограничено снизу константой $2^{-(i-1)}$.

Далее, все множители во втором произведении заключены между 1 и 2. Более того, если $i < p < N - l$, то $m < \lambda_p < j$. Следовательно, $\lambda_p - p$ принимает по одному разу все значения из множества $\{j - i - N, \dots, j - i - 2\}$, кроме s штук, а число s может быть оценено сверху константой, не зависящей от N . Значит, выражение (**) может быть оценено снизу следующим:

$$\text{const} \cdot \prod_{g=j-i-2}^{j-i-N} \frac{j-i-g}{j-i-g-1} = \text{const} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{N}{N-1} = \text{const} \cdot N.$$

Таким образом, условные вероятности отличаются множителем, большим const/N ; значит, $p_N \leq 1 - \varepsilon/N$. $\square$

Теперь мы можем заключить, что

$$\rho_{z,w}(R(i, j, l, m, t)) \leq \prod_{N=t+1}^{\infty} p_N \leq \prod_{N=t+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right) \rightarrow 0. \quad \square$$

По мнению автора теорема о дизъюнктности мер остается верной и в более общем случае. Кажется правдоподобным следующее более сильное утверждение: (z, w) -мера множества всех путей, заключенных в некотором левом толстом крюке, равняется нулю. (Путь τ заключен в левом толстом крюке, если существуют два таких числа i и j , что $\tau_i(N) < j$ для каждого N .)

Тем не менее в настоящий момент простое непосредственное доказательство этого факта отсутствует. Как представляется автору, доказательство можно было бы провести, используя результаты статьи [3] о предельном поведении промежуточных координат Фробениуса положительной и отрицательной диаграмм Юнга, отвечающих сигнатуре $\tau(N)$.

Если наше предположение верно, то теорему 1 можно распространить и на некоторые дополнительные случаи. Например, мы могли бы утверждать, что представления $T_{z,w}$ и $T_{z,w'}$, где $\{w, \bar{w}\} \neq \{w', \bar{w}'\}$, также дизъюнктны.

§6. Приложение. Рост длины диагонали

Пусть τ — бесконечный путь в графе сигнатур. Напомним, что сигнатуре $\tau(N)$ соответствует диаграмма Юнга $\tau^+(N)$, которую мы называем ее положительной диаграммой Юнга.

В качестве следствия леммы 9 мы докажем, что почти для каждого (по (z, w) -мере) пути длина диагонали положительной диаграммы Юнга растет с ростом номера этажа не быстрее чем логарифмически.

Обозначим через $\tilde{s}_N(\tau)$ длину главной диагонали диаграммы $\tau^+(N)$.

Если рассматривать (z, w) -меру как вероятностную меру на множестве всех путей $\mathcal{T}$, то $\tilde{s}_N$ становится последовательностью случайных величин.

Теорема 13. *Существует положительная константа $c(z, w)$, такая, что почти наверное по (z, w) -мере*

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{s}_N}{\log(N)} \leq c(z, w).$$

Доказательство. Сначала приведем некоторые необходимые нам общие определения и факты.

Обозначим через X множество $\{0, 1\}^\infty$ бесконечных последовательностей из 0 и 1. Снабдим X топологией прямого произведения и рассмотрим сигма-алгебру борелевских множеств на X .

Обозначим через A_i i -й член последовательности $A \in X$. Мы также будем использовать обозначение $A_i = q_i(A)$.

На множестве X определен естественный частичный порядок: $A \leq B$, если $A_i \leq B_i$ для всех i .

Будем говорить, что вещественнозначная функция f , определенная на пространстве последовательностей, является *монотонно возрастающей*, если из того, что $A \leq B$, следует $f(A) \leq f(B)$. Обозначим через $\mathbb{M}$ семейство всех непрерывных монотонно возрастающих функций.

Рассмотрим две вероятностные меры μ_1 и μ_2 на X . Будем писать $\mu_1 \leq \mu_2$, если $E_{\mu_1} f \leq E_{\mu_2} f$ для всех функций $f \in \mathbb{M}$. Здесь через $E_\mu f$ обозначено математическое ожидание функции f относительно вероятностной меры μ .

Пусть $\mathcal{A} \subset X$. В дальнейшем мы будем отождествлять $\mathcal{A}$ с событием « $x \in \mathcal{A}$ » и обозначать через $\text{Prob}_\mu \mathcal{A}$ вероятность этого события относительно вероятностной меры μ . Через $\text{Prob}_\mu \{\mathcal{A} | \mathcal{B}\}$ мы будем обозначать условную вероятность события $\mathcal{A}$ при условии события $\mathcal{B}$.

Лемма 14. *Предположим, что μ и ν — две вероятностные меры на X , такие, что ν — мера Бернулли (т.е. product-мера) и имеют место оценки*

$$\text{Prob}_\nu \{q_n = 1\} \geq \text{Prob}_\mu \{q_n = 1 | \mathcal{A}\}$$

для всех событий $\mathcal{A}$, принадлежащих σ -алгебре, порожденной первыми $n - 1$ координатными функциями $q_1, \dots, q_{n-1}$.

Тогда $\mu \leq \nu$.

Подобная лемма была сформулирована в [7, лемма 1.1], а доказательство (причем даже более общего факта) можно найти, например, в [13, лемма 1].

Вернемся теперь к нашей теореме.

Главная диагональ диаграммы Юнга состоит из клеток, для которых $c(\square) = 0$. Рассмотрим побочную диагональ, отвечающую содержанию клетки k , т.е. множество всех таких клеток, что $c(\square) = k$.

Выберем такое k , что $\text{Re}(k + w) > 0$. Обозначим длину побочной диагонали, отвечающей содержанию клетки k , через s_N . Понятно, что $\tilde{s}_N \leq s_N + k$. Следовательно, нам достаточно доказать обсуждаемую теорему для случайных величин s_N вместо случайных величин $\tilde{s}_N$.

Заметим, что так как $\text{Re}(k + w) > 0$, то мы можем применить лемму 9 для оценки скорости роста длины диагонали.

Введем семейство случайных величин $\xi_N = \xi_N(\tau)$ на пространстве $\mathcal{T}$. Если при переходе с $N - 1$ -го этажа графа Гельфанда–Цетлина на этаж N вдоль пути τ к положительной диаграмме Юнга добавляется клетка с содержанием k (т.е. если длина соответствующей побочной диагонали увеличивается на 1), то $\xi_N(\tau) = 1$; в противном случае $\xi_N(\tau) = 0$. Понятно, что $s_N = \sum_{i=1}^N \xi_i$.

Совместное распределение случайных величин ξ_i естественным образом определяет вероятностную меру на пространстве последовательностей X . Обозначим ее через μ .

Утверждение теоремы 13 теперь может быть переформулировано как свойство меры μ . Мы заменяем вероятностное пространство $\mathcal{T}$ на X , а (z, w) -меру на μ . Случайные величины ξ_i превращаются в координатные функции q_i . Длина побочной диагонали s_N , в свою очередь, превращается в сумму $q_1 + \dots + q_N$.

Предложение 15. *Существует константа $c_1(z, w)$, такая, что для любого набора $\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$, состоящего из нулей и единиц, имеет место следующая оценка:*

$$\text{Prob}\{\xi_N = 1 \mid \xi_1 = a_1, \dots, \xi_{N-1} = a_{N-1}\} \leq \frac{c_1(z, w)}{N}.$$

Доказательство. Это прямое следствие леммы 9. □

Рассмотрим следующее семейство $\{\nu_N\}$ вероятностных мер на двухэлементном множестве $\{0, 1\}$:

$$\nu_N(\{1\}) = \min(1, c_1(z, w)/N), \quad \nu_N(\{0\}) = 1 - \min(1, c_1(z, w)/N).$$

Здесь $c_1(z, w)$ — константа из предложения 15.

Теперь обозначим через ν прямое произведение мер ν_N .

Применяя предложение 15 и лемму 14, мы заключаем, что $\mu \leq \nu$.

Далее мы доказываем аналог усиленного закона больших чисел для меры ν . Таким образом, для ν справедлива оценка, аналогичная теореме 13.

Предложение 16. *Почти наверное по мере ν*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q_1 + \dots + q_N}{\log N} = c_1(z, w).$$

Доказательство. Понятно, что $E_\nu q_i = c_1(z, w)/i$. Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_\nu \left(\frac{q_1 + \dots + q_N}{\log N} \right) = c_1(z, w).$$

Положим $p_i = q_i - E_\nu(q_i)$. Нам надо доказать, что почти наверное по мере ν

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_1 + \dots + p_N}{\log N} = 0.$$

Лемма 17. *Предположим, что b_i — произвольная числовая последовательность, такая, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится. Тогда*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 \log 1 + \dots + b_N \log N}{\log N} = 0.$$

Доказательство см., например, в [14, гл. 4, §3, лемма 2].

Положим $t_i = p_i / \log i$. Используя последнюю лемму, мы заключаем, что достаточно доказать сходимость почти наверное ряда $\sum_{i=1}^{\infty} t_i$. Оценим дисперсию случайной величины t_i . Мы обозначаем дисперсию через D_ν . В силу определения $D_\nu q_i \leq c/i$; следовательно, $D_\nu t_i \leq c/(i \log^2 i)$. Таким образом, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} D_\nu t_i$ сходится. Теперь мы используем следующую лемму:

Лемма 18. *Пусть ϕ_i — последовательность независимых центрированных случайных величин, таких, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} D\phi_i$ сходится. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i$ сходится почти наверное.*

См. [14, гл. 4, разд. 2, теорема 3].

Доказательство предложения 16 завершено. $\square$

Из предложения 16 следует, что почти для любой по мере ν последовательности из X существует такое N , что для любого $n > N$

$$\frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n q_i < c, \quad (***)$$

где c — константа, зависящая только от z, w , а q_i — это i -я координатная функция. Покажем, что это утверждение выполнено также и для меры μ .

Пусть $\mathcal{A}_N \subset X$ — множество таких последовательностей, что неравенство $(***)$ выполнено для всех $n > N$. Понятно, что $\mathcal{A}_N \subset \mathcal{A}_{N+1}$ для любого N . В силу предложения 16

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}_\nu \mathcal{A}_N = 1.$$

Лемма 19. $\text{Prob}_\mu \mathcal{A}_N \geq \text{Prob}_\nu \mathcal{A}_N$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{B}_N^i \subset X$ множество всех таких последовательностей, что неравенство $(***)$ выполнено для $n = N, N+1, \dots, N+i-1$. Множество $\mathcal{A}_N$ совпадает с пересечением убывающей последовательности множеств $\mathcal{B}_N^i$,

$$\mathcal{A}_N = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_N^i.$$

Заметим, что если неравенство $(***)$ выполнено для некоторой последовательности A , а $B \leq A$ (относительно частичного порядка на X , определенного выше), то неравенство будет выполнено и для B тоже. Следовательно, индикатор множества $\mathcal{B}_N^i$ является монотонно убывающей функцией. Таким образом, неравенство $\nu \geq \mu$ влечет за собой неравенство $\text{Prob}_\mu \mathcal{B}_N^i \geq \text{Prob}_\nu \mathcal{B}_N^i$. Следовательно,

$$\text{Prob}_\mu \mathcal{A}_N = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{Prob}_\mu \mathcal{B}_N^i \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \text{Prob}_\nu \mathcal{B}_N^i = \text{Prob}_\nu \mathcal{A}_N. \quad \square$$

Из леммы вытекает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}_\mu \mathcal{A}_N = 1.$$

Значит, для почти каждой по мере μ последовательности из множества X существует число N , такое, что для любого $n > N$ выполнено $(***)$. Последнее утверждение эквивалентно теореме 13. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, М., 1973.
- [2] A. Borodin, G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes*, Ann. of Math., **161**:3 (2005), 1319–1422; <http://arxiv.org/abs/math/0109194>.
- [3] A. Borodin, G. Olshanski, *Random partitions and the gamma kernel*, Adv. Math., **194**:1 (2005), 141–202; <http://arxiv.org/abs/math-ph/0305043>.
- [4] A. Borodin, G. Olshanski, *Infinite random matrices and ergodic measures*, Comm. Math. Phys., **223**:1 (2001), 87–123; <http://arxiv.org/abs/math-ph/0010015>.

- [5] S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group*, Invent. Math., **158**:3 (2004), 551–642; <http://arxiv.org/abs/math/0312270>.
- [6] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [7] T. M. Liggett, R. H. Schonmann, A. M. Stacey, *Domination by product measures*, Ann. Probab., **25**:1 (1997), 71–95.
- [8] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [9] Yu. A. Neretin, *Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups*, Duke Math. J., **114**:2 (2002), 239–266; <http://arxiv.org/abs/math-ph/0010014>.
- [10] Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления бесконечномерных пар (G, K) и формализм Р. Хау*, Докл. АН СССР, **269**:1 (1983), 33–36.
- [11] G. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group*, J. Funct. Anal., **205**:2 (2003), 464–524; <http://arxiv.org/abs/math/0109193>.
- [12] D. Pickrell, *Measures on infinite-dimensional Grassmann manifolds*, J. Funct. Anal., **70**:2 (1987), 323–356.
- [13] L. Russo, *An approximate zero-one law*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **61**:1 (1982), 129–139.
- [14] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1989.
- [15] D. Voiculescu, *Représentations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$* , J. Math. Pures Appl., **55**:1 (1976), 1–20.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Независимый московский университет
e-mail: vadicgor@gmail.com

Поступило в редакцию
10 ноября 2008 г.