Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Жируар, И. В. Полтерович, Об оценках Херша–Пэйна–Шиффера для собственных значений задачи Стеклова, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 2, 33–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2984>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:27:24

УДК 517.956.227

Об оценках Херша–Пэйна–Шиффера для собственных значений задачи Стеклова*

© 2010. А. ЖИРУАР, И. ПОЛТЕРОВИЧ

В работе доказывается точность изопериметрического неравенства Херша–Пэйна–Шиффера для n -го ненулевого собственного значения задачи Стеклова на ограниченной односвязной плоской области при всех $n \geq 1$. Равенство достигается в пределе для семейства односвязных областей, вырождающихся в несвязное объединение n одинаковых кругов. Аналогичные результаты получены для произведения двух последовательных собственных значений. Мы также приводим новое доказательство неравенства Херша–Пэйна–Шиффера при $n = 2$, из которого следует, что в этом случае оно строгое.

§1. Введение и основные результаты

1.1. Задача Стеклова. Рассмотрим ограниченную односвязную плоскую область Ω с липшицевой границей. Пусть $\rho \in L^\infty(\partial\Omega)$ — неотрицательная функция на границе, не равная нулю тождественно. Задача на собственные значения с *граничными условиями Стеклова* определяется следующими соотношениями [28]:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в области } \Omega, \\ \partial u / \partial \nu = \sigma \rho u & \text{на границе } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

где $\partial/\partial\nu$ — нормальная производная вдоль границы. Существуют различные физические интерпретации задачи Стеклова ([3], [26]). В частности, она описывает колебания свободной мембраны, у которой вся масса $M(\Omega)$ сосредоточена на границе $\partial\Omega$ и распределена на ней с плотностью ρ :

$$M(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \rho(s) ds. \quad (1.1.2)$$

Если $\rho \equiv 1$, то масса $M(\Omega)$ в точности равна *длине границы* области Ω .

Задача Стеклова имеет дискретный спектр, и собственные значения

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \sigma_3(\Omega) \leq \dots \nearrow \infty$$

удовлетворяют следующим вариационным соотношениям [3, с. 95 и с. 103]:

$$\sigma_n(\Omega) = \inf_{E_n} \sup_{0 \neq u \in E_n} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dz}{\int_{\partial\Omega} u^2 \rho ds}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1.3)$$

*Работа выполнена при поддержке Национального исследовательского совета по науке и инженерии (NSERC) Канады и Квебекского фонда естественно-научных и технологических исследований (FQRNT).

Точная нижняя грань здесь берется по всем n -мерным подпространствам E_n соболевского пространства $H^1(\Omega)$, ортогональным константам на $\partial\Omega$, т.е. $\int_{\partial\Omega} u(s)\rho(s)ds = 0$ для всех $u \in E_n$. Заметим, что, как и в случае задачи Неймана, спектр задачи Стеклова всегда начинается с нулевого собственного значения, соответствующего собственным функциям $u = \text{const}$.

Если плотность ρ тождественно равна единице, то собственные функции и собственные значения задачи Стеклова совпадают соответственно с собственными функциями и собственными значениями оператора Дирихле–Неймана

$$\Gamma: H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

задаваемого формулой

$$\Gamma f = \frac{\partial}{\partial\nu}(\mathcal{H}f).$$

Здесь $\mathcal{H}f$ — гармоническое расширение функции $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ во внутренность области Ω . Если граница области достаточно гладкая, то оператор Дирихле–Неймана является псевдодифференциальным оператором первого порядка [30, с. 37–38]. Он имеет множество важных приложений, в частности, к изучению обратных задач [31].

1.2. Оценки сверху для собственных значений задачи Стеклова. Целью настоящей работы является изучение следующего вопроса.

Вопрос 1.2.1. *Насколько большим может быть n -е собственное значение задачи Стеклова на ограниченной односвязной плоской области фиксированной массы?*

Для $n = 1$ ответ на этот вопрос был получен Вайнстоком [33] в 1954 г. Вайнсток доказал, что

$$\sigma_1(\Omega)M(\Omega) \leq 2\pi, \quad (1.2.2)$$

причем равенство достигается на круге с постоянной плотностью на границе. Заметим, что на единичном круге $\mathbb{D}$ с единичной плотностью на границе первое собственное значение задачи Стеклова равно единице и имеет кратность два: $\sigma_1(\mathbb{D}) = \sigma_2(\mathbb{D}) = 1$. Неравенство Вайнстока послужило отправной точкой для многих работ ([2], [18], [4], [10], [11]). Недавний обзор результатов на эту тему содержится в статье [1].

В 1974 г. Херш, Пэйн и Шиффер [20, с. 102] доказали следующие неравенства:

$$\sigma_m(\Omega)\sigma_n(\Omega)M(\Omega)^2 \leq \begin{cases} (m+n-1)^2\pi^2, & \text{если } m+n \text{ нечетно,} \\ (m+n)^2\pi^2, & \text{если } m+n \text{ четно.} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

В частности, при $m = n$ и $m = n + 1$ мы получаем

$$\sigma_n(\Omega)M(\Omega) \leq 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2.4)$$

$$\sigma_n(\Omega)\sigma_{n+1}(\Omega)M(\Omega)^2 \leq 4\pi^2 n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.5)$$

1.3. Основные результаты. Легко видеть, что при $n = 1$ неравенства (1.2.4) и (1.2.5) являются равенствами на круге с постоянной плотностью ρ на границе. В работе [20] отмечается, что неравенства (1.2.3) вряд ли являются точными для всех m и n . Это утверждение, скорее всего, справедливо. Однако оказывается, что для $m = n$ и $m = n + 1$ неравенства (1.2.3) *точны* при всех $n \geq 1$.

Теорема 1.3.1. *Существует семейство односвязных ограниченных областей $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей и плотностью $\rho \equiv 1$ на ней, вырождающихся в несвязное объединение n одинаковых кругов при $\varepsilon \rightarrow 0+$ таким образом, что*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon) M(\Omega_\varepsilon) = 2\pi n, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (1.3.2)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon) \sigma_{n+1}(\Omega_\varepsilon) M(\Omega_\varepsilon)^2 = 4\pi^2 n^2, \quad n = 2, 3, \dots. \quad (1.3.3)$$

В частности, неравенства Херша–Пэйна–Шиффера (1.2.4) и (1.2.5) точны при всех $n \geq 1$.

Замечание 1.3.4. Как будет показано в разд. 2.2, равенства (1.3.2) и (1.3.3) верны отнюдь не для всех семейств областей, вырождающихся в несвязное объединение n одинаковых дисков.

Было бы интересно проверить, влечет ли за собой любое из соотношений (1.3.2) и (1.3.3) сходимость (в определенном смысле) семейства Ω_ε к несвязному объединению n одинаковых кругов при $n \geq 2$.

Замечание 1.3.5. При $\rho \equiv 1$ из оценки (1.2.4) и стандартного изопериметрического неравенства в $\mathbb{R}^2$ следует неравенство

$$\sigma_n(\Omega) \sqrt{\text{Area}(\Omega)} < n\sqrt{\pi}, \quad n \geq 2.$$

При условии, что площадь области Ω , $\text{Area}(\Omega)$, фиксирована, точная оценка для σ_n , $n \geq 2$, неизвестна (см. [16, открытая проблема 25]).

Теорема 1.3.1 дает практически исчерпывающий ответ на вопрос 1.2.1. Остается лишь проверить, являются ли неравенства (1.2.4) строгими при всех $n \geq 2$. Мы полагаем, что это так. С помощью метода, предложенного в работе [14], мы доказываем этот результат для $n = 2$.

Теорема 1.3.6. *Неравенство (1.2.4) является строгим при $n = 2$:*

$$\sigma_2(\Omega) M(\Omega) < 4\pi. \quad (1.3.7)$$

Доказательство теоремы 1.3.6 использует теорему Римана о конформном отображении, которая также применяется в работах [29], [33], [14]. Отметим, что исходное доказательство оценок (1.2.3) основано на совершенно других идеях.

1.4. Сравнение с задачами Дирихле и Неймана. Оценки (1.2.2) и (1.3.7) интересно сравнить с аналогичными результатами для собственных значений задач с граничными условиями Дирихле и Неймана. Эти задачи описывают колебания однородной мембраны, а масса определяется площадью.

Пусть $0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots$ и $0 = \mu_0 < \mu_1(\Omega) \leq \mu_2(\Omega) \leq \dots$ — собственные значения задач Дирихле и Неймана соответственно на ограниченной плоской области Ω . Имеют место следующие оценки:

- *Неравенство Фабера–Крана:* $\lambda_1(\Omega) \text{Area}(\Omega) \geq \pi \lambda_1(\mathbb{D})$ (сформулировано Рэлеем в [27] в качестве гипотезы, доказано в [12] и [22]; более слабый вариант этой оценки был получен Курантом [7]).

- *Неравенство Крана:* $\lambda_2(\Omega) \text{Area}(\Omega) > 2\pi \lambda_1(\mathbb{D})$ [23]. Этот результат имеет интересную историю (см. [1, с. 110]). Равенство достигается в пределе для семейства областей, вырождающихся в несвязное объединение двух одинаковых кругов.

• *Неравенство Сегё–Вайнбергера*: $\mu_1(\Omega) \text{Area}(\Omega) \leq \pi \mu_1(\mathbb{D})$. Эта оценка была доказана Сегё [29] для односвязных плоских областей. Вайнбергер [32] обобщил ее на произвольные области в любой размерности.

• Если область Ω односвязна, то $\mu_2(\Omega) \text{Area}(\Omega) \leq 2\pi \mu_1(\mathbb{D})$. Это неравенство было доказано в недавней работе авторов и Надирашвили [14]. Равенство достигается в пределе для семейства областей, вырождающихся в несвязное объединение двух одинаковых кругов. Было бы интересно обобщить эту оценку на случай неодносвязных областей.

Для более высоких собственных значений Дирихле и Неймана точные оценки такого вида неизвестны и аналогия со случаем задачи Стеклова не прослеживается. Как отмечалось в [14, замечание 1.2.8], несвязное объединение n одинаковых кругов не может максимизировать величину $\mu_n(\Omega) \text{Area}(\Omega)$ для достаточно больших n , поскольку это противоречит закону Вейля. Это верно также и для задачи минимизации величины $\lambda_n(\Omega) \text{Area}(\Omega)$. В частности, имеется гипотеза, подтвержденная численными вычислениями, что минимум величины $\lambda_3(\Omega) \text{Area}(\Omega)$ достигается на одном круге ([34], [6]).

1.5. План работы. В §2 настоящей работы мы доказываем теорему 1.3.1. Мы также строим семейство областей, вырождающихся в несвязное объединение двух кругов так, что все их собственные значения стремятся к нулю. Это явление довольно удивительно и не имеет аналогов для спектров задач Дирихле или Неймана. Последующие параграфы работы посвящены доказательству теоремы 1.3.6. В §3 мы применяем к задаче Стеклова метод «сложенных и перераспределенных мер», предложенный в статье [25] и развитый в [14]. В §4 мы используем топологические и аналитические идеи, чтобы построить двумерное пространство тест-функций для вариационного представления (1.1.3) второго собственного значения задачи Стеклова. Это пространство играет далее ключевую роль в доказательстве неравенства (1.3.7).

§2. Максимизация и «коллапс» собственных значений задачи Стеклова

2.1. Доказательство теоремы 1.3.1. Начнем со случая $n = 2$. Для каждого $\varepsilon \in (0, 1/10)$ рассмотрим односвязную плоскую область

$$\Omega_\varepsilon = \{|z - 1 + \varepsilon| < 1\} \cup \{|z + 1 - \varepsilon| < 1\} \subset \mathbb{C}. \quad (2.1.1)$$

Рис. 1. Область Ω_ε при $n = 2$

При $\varepsilon \rightarrow 0+$ область Ω_ε вырождается в несвязное объединение двух одинаковых единичных кругов.

Лемма 2.1.2. *Допустим, что $\rho \equiv 1$ на $\partial\Omega_\varepsilon$ для любого ε . Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_2(\Omega_\varepsilon) = 1.$$

Напомним, что если $\rho \equiv 1$, то $\sigma_1(\mathbb{D}) = \sigma_2(\mathbb{D}) = 1$.

Замечание 2.1.3. Это утверждение не назовешь неожиданным, но в то же время оно не следует напрямую из общих результатов о сходимости собственных значений. Сложность заключается в том, что семейство Ω_ε не является *равномерно* липшицевым. Это эквивалентно тому, что семейство Ω_ε не удовлетворяет равномерному условию конуса (см. [8, с. 49] или [17, с. 53]). Иными словами, невозможно выбрать константу Липшица равномерно по $z \in \partial\Omega_\varepsilon$ и по ε *одновременно*. Действительно, легко видеть, что константа Липшица становится неограниченной около точки $z = 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельное поведение собственных значений задачи Стеклова в такой ситуации может быть априори весьма неожиданным, см. разд. 2.2.

Доказательство леммы 2.1.2. Из неравенства (1.2.4) следует, что

$$\sigma_2(\Omega_\varepsilon)M(\Omega_\varepsilon) \leq 4\pi$$

для всякого $\varepsilon \in (0, 1/10)$. Так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} M(\Omega_\varepsilon) = 4\pi$, то

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_2(\Omega_\varepsilon) \leq 1.$$

Остается проверить, что

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_2(\Omega_\varepsilon) \geq 1. \quad (2.1.4)$$

Ввиду замечания 2.1.3 для того, чтобы применить стандартные результаты о сходимости собственных значений, нам необходимо «устранить» особенность в нуле у семейства областей Ω_ε . Введем обозначение $\Omega'_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$. Рассмотрим вспомогательную задачу со смешанными граничными условиями на области Ω'_ε : наложим условия Неймана на интервале $\Omega_\varepsilon \cap \{\operatorname{Re} z = 0\}$ и оставим условия Стеклова на $\partial\Omega'_\varepsilon \cap \partial\Omega_\varepsilon$. Пусть $0 = \sigma_0^N(\Omega'_\varepsilon) < \sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon) \leq \sigma_2^N(\Omega'_\varepsilon) \leq \dots$ — спектр этой смешанной задачи (она естественным образом возникает при изучении колебаний жидкости, см. [13]). Добавление условий Неймана внутри области увеличивает пространство допустимых тест-функций. Поэтому, согласно стандартному принципу монотонности [3, с. 100], собственные значения уменьшаются. Следовательно,

$$\sigma_2(\Omega_\varepsilon) \geq \sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon)$$

и, значит, чтобы доказать (2.1.4), достаточно проверить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon) = 1. \quad (2.1.5)$$

Семейство областей Ω'_ε сходится к $\mathbb{D}$ в дополнительной топологии Хаусдорфа (см. [5, с. 101]) при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Более того, поскольку области Ω'_ε равномерно липшицевы одновременно и по $z \in \partial\Omega'_\varepsilon$, и по $\varepsilon \in (0, 1/10)$, операторы расширения $H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ равномерно ограничены [5, с. 198]. Аналогичным образом, нормы операторов ограничения на границу тоже равномерно ограничены [9]. Заметим, что часть границы $\partial\Omega'_\varepsilon$, совпадающая с $\Omega_\varepsilon \cap \{\operatorname{Re} z = 0\}$, на которой

задано условие Неймана, вырождается в точку $z = 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Следовательно, из отношения Рэлея для смешанной задачи Неймана–Стеклова [13, с. 673]) немедленно вытекает равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n^N(\Omega'_\varepsilon) = \sigma_n(\mathbb{D}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Полагая $n = 1$, мы получаем соотношение (2.1.5). □

Завершим доказательство теоремы 1.3.1. Из оценки (1.2.5) и очевидного неравенства $\sigma_{n+1}(\Omega_\varepsilon) \geq \sigma_n(\Omega_\varepsilon)$ следует, что (1.3.2) влечет за собой (1.3.3). Следовательно, достаточно доказать соотношение (1.3.2). При $n = 2$ оно следует из леммы 2.1.2. При $n > 2$ доказательство аналогично. Пусть Ω_ε — объединение n кругов радиуса $1 + \varepsilon$ с центрами в точках $z = 2k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Сделаем разрезы вдоль вертикальных линий $\operatorname{Re} z = 2k-1$, $k = 1, \dots, n$, и наложим условия Неймана вдоль этих разрезов. Мы получим n вспомогательных смешанных задач двух видов: два крайних круга имеют единственный разрез (как и выше, обозначим соответствующие области символом Ω'_ε), а промежуточные круги имеют два разреза — один слева и другой справа (соответствующие области обозначим символом Ω''_ε). Спектры каждой из n вспомогательных граничных задач начинаются с нулевого собственного значения. Используя, как и выше, принцип монотонности, мы получаем, что

$$\sigma_n(\Omega_\varepsilon) \geq \min(\sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon), \sigma_1^N(\Omega''_\varepsilon)).$$

Доказав, как и в случае $n = 2$, сходимость собственных значений вспомогательных задач, мы приходим к равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_1^N(\Omega''_\varepsilon) = 1.$$

Значит, $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon) \geq 1$. Поскольку $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} M(\Omega_\varepsilon) = 2\pi n$, из неравенства (1.2.4) следует, что $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon) \leq 1$. Таким образом, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon) = 1$. Теорема 1.3.1 доказана.

2.2. «Коллапс» спектра задачи Стеклова. Семейство областей Ω_ε построено путем «растаскивания» кругов, в то время как геометрически более естественным кажется соединить их маленькими перешейками, исчезающими при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако, как показывает приведенный ниже пример, предельное поведение собственных значений задачи Стеклова при таком вырождении областей может оказаться весьма неожиданным.

Рис. 2. Область Σ_ε

Как и ранее, положим $\rho \equiv 1$. Пусть $\Sigma_\varepsilon = \mathbb{D}_1 \cup P_\varepsilon \cup \mathbb{D}_2$ — область, полученная соединением двух единичных кругов $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$ при помощи прямоугольного перешейка P_ε длины ε и ширины ε^3 (см. рис. 2). Меньшие его стороны явля-

ются хордами граничных окружностей $\partial\mathbb{D}_1$ и $\partial\mathbb{D}_2$. То, что ширина перешейка стремится к нулю гораздо быстрее длины, имеет принципиальное значение. Для простоты предположим, что круги и перешеек расположены таким образом, что область Σ_ε симметрична относительно обеих осей координат. Легко видеть, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получаем в пределе удивительное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Sigma_\varepsilon) = 0 \quad (2.2.1)$$

для всех $n = 1, 2, \dots$. Действительно, рассмотрим попарно ортогональные тест-функции, обращающиеся в нуль на множестве $(\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2) \setminus P_\varepsilon$ и равные $\sin(2\pi n x / \varepsilon)$ внутри перешейка P_ε . Тогда для всякого n градиент такой тест-функции имеет порядок n/ε , площадь перешейка P_ε равна ε^4 , а длина «внешней» части границы $\partial P_\varepsilon \cap \partial \Sigma_\varepsilon$ равна 2ε . Заметим также, что построенные тест-функции склеиваются непрерывным образом вдоль меньших сторон прямоугольника P_ε и потому принадлежат соболевскому пространству $H^1(\Sigma_\varepsilon)$. Таким образом, для каждого фиксированного n соответствующее отношение Рэлея имеет порядок $n^2\varepsilon$ и стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$, откуда следует формула (2.2.1).

Похожие конструкции использовались ранее при изучении граничных задач с условиями Неймана (см. [21], [15] и работы, цитируемые в этих статьях). Однако собственные значения области Σ_ε с условиями Неймана сходятся к соответствующим собственным значениям несвязного объединения двух кругов при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Полный «коллапс» спектра задачи Стеклова, наблюдающийся в приведенном выше примере, связан с тем, что в этом случае в знаменателе отношения Рэлея стоит интеграл по границе. Заметим, что периметр перешейка P_ε стремится к нулю гораздо медленнее, чем его площадь, и поэтому для каждого фиксированного n числитель в отношении Рэлея стремится к нулю намного быстрее, чем знаменатель.

В последующих параграфах работы мы доказываем теорему 1.3.6.

§3. Сложенные и перераспределенные меры

3.1. Конформное отображение на круг. Пусть Ω — ограниченная односвязная плоская область с липшицевой границей. Как и выше, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ обозначает открытый единичный круг. По теореме Римана о конформном отображении (см. [30, с. 342]) существует конформный диффеоморфизм $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$, продолжающийся до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$ (чтобы не усложнять обозначения, здесь и далее мы обозначаем конформное отображение и его продолжение вплоть до границы одним и тем же символом). Пусть ds — мера длины на границе $\partial\Omega$, а $d\mu$ — прообраз меры $\rho(s) ds$ под действием отображения ϕ . Иными словами,

$$\int_{\mathcal{O}} d\mu = \int_{\phi(\mathcal{O})} \rho(s) ds \quad (3.1.1)$$

для любого открытого подмножества $\mathcal{O} \subset S^1$. Принимая во внимание соотношение (3.1.1) и используя конформную инвариантность интеграла Дирихле, мы можем переписать вариационную формулу (1.1.3) для σ_2 в следующем виде:

$$\sigma_2(\Omega) = \inf_E \sup_{0 \neq u \in E} \frac{\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dz}{\int_{S^1} u^2 d\mu}. \quad (3.1.2)$$

Точная нижняя грань здесь берется по всем двумерным подпространствам $E \subset H^1(\mathbb{D})$, таким, что $\int_{S^1} u \, d\mu = 0$ для любого $u \in E$.

3.2. Гиперболические шапочки. Пусть γ — геодезическая на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в круге. Иными словами, γ есть либо диаметр круга, либо дуга окружности, ортогональная абсолюту $S^1 = \partial\mathbb{D}$. Компонента связности множества $\mathbb{D} \setminus \gamma$ называется *гиперболической шапочкой* [14]. Для каждой точки $p \in S^1$ и произвольного числа $l \in (0, 2\pi)$ мы можем однозначно определить гиперболическую шапочку $a_{l,p}$ следующим условием: дуга границы $\partial a_{l,p} \cap S^1$ имеет длину l и ее центр находится в точке p (рис. 3). Таким образом, можно отождествить пространство $\mathcal{HC}$ всех гиперболических шапочек с цилиндром $(0, 2\pi) \times S^1$. Для каждой гиперболической шапочки $a \in \mathcal{HC}$ определим отображение $\tau_a: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, являющееся отражением относительно гиперболической геодезической, ограничивающей a . Иными словами, τ_a — единственная нетривиальная конформная инволюция круга $\mathbb{D}$, оставляющая неподвижной каждую точку геодезической $\partial a \cap \mathbb{D}$. В частности, $\tau_a(a) = \mathbb{D} \setminus \bar{a}$.

Рис. 3. Гиперболическая шапочка $a_{l,p}$

Назовем *поднятием* функции $u: \bar{a} \rightarrow \mathbb{R}$ функцию $\tilde{u}: \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$, заданную соотношением

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{при } z \in \bar{a}, \\ u(\tau_a z) & \text{при } z \in \mathbb{D} \setminus \bar{a}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Заметим, что

$$\int_{S^1} \tilde{u} \, d\mu = \int_{\partial a \cap S^1} u \, d\mu + \int_{\tau_a(\partial a) \cap S^1} u \circ \tau_a \, d\mu = \int_{\partial a \cap S^1} u \, (d\mu + \tau_a^* d\mu). \quad (3.2.2)$$

Назовем меру

$$d\mu_a = \begin{cases} d\mu + \tau_a^* d\mu & \text{на } \partial a \cap S^1, \\ 0 & \text{на } S^1 \setminus \partial a \end{cases} \quad (3.2.3)$$

сложенной мерой. Формулу (3.2.2) можно переписать следующим образом:

$$\int_{S^1} \tilde{u} \, d\mu = \int_{S^1} u \, d\mu_a.$$

3.3. Собственные функции на круге. Для каждого вектора $t \in \mathbb{R}^2$ определим функцию $X_t: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$, равную скалярному произведению $X_t(z) = z \cdot t$, $z \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. Пусть (e_1, e_2) — стандартный базис в $\mathbb{R}^2$. Тогда функции X_{e_1} и X_{e_2} образуют базис в первом собственном подпространстве задачи Стеклова на круге с единичной плотностью на границе. Метод Херша (см. [14, разд. 4.1]) позволяет нам предположить без ограничения общности, что центр масс меры $d\mu$ расположен в нуле:

$$\int_{S^1} X_t d\mu = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^2. \quad (3.3.1)$$

Поворотом осей координат всегда можно добиться того, что

$$\int_{S^1} X_{e_1}^2 d\mu \geq \int_{S^1} X_t^2 d\mu \quad \forall t \in S^1. \quad (3.3.2)$$

3.4. Перераспределение меры. Пусть $a \in \mathcal{H}\mathcal{C}$ — гиперболическая шапочка, а $\psi_a: \mathbb{D} \rightarrow a$ — конформный диффеоморфизм. Следуя соглашению, принятому в разд. 3.1, продолжение этого диффеоморфизма до границы $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{a}$ мы тоже обозначаем символом ψ_a . Для каждого $t \in \mathbb{R}^2$ определим функцию $u_a^t: \overline{a} \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$u_a^t(z) = X_t \circ \psi_a^{-1}(z) = t \cdot \psi_a^{-1}(z).$$

В доказательстве леммы 4.1.1 будет использовано следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.4.1. *Поднятие функции u_a^t не является гармонической функцией в круге $\mathbb{D}$.*

Доказательство. Допустим, что $\tilde{u}_a^t$ — гармоническая функция. Тогда она гладкая, и поэтому, в соответствии с формулой (3.2.1), нормальная производная функции u_a^t должна равняться нулю в каждой точке $p \in \partial a \cap \mathbb{D}$. Легко проверить, что равенство нулю нормальной производной сохраняется при конформных преобразованиях. Следовательно, нормальная производная функции $X_t = u_a^t \circ \psi_a$ обращается в нуль на множестве $\psi_a^{-1}(\partial a \cap \mathbb{D}) \subset S^1$. В то же время несложное вычисление показывает, что $\partial X_t(s)/\partial n \neq 0$ при $s \neq \pm t/|t|$. Это противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Пусть $w_a^t \in C^\infty(\mathbb{D})$ — гармоническое расширение функции $\tilde{u}_a^t|_{S^1}$:

$$\begin{cases} \Delta w_a^t = 0 & \text{в } \mathbb{D}, \\ w_a^t = \tilde{u}_a^t & \text{на } S^1, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

которое определяется однозначным образом. Функции w_a^t будут использованы ниже в качестве тест-функций в вариационной формуле (3.1.2). Заметим, что

$$\int_{S^1} \tilde{u}_a^t d\mu = \int_{S^1} u_a^t d\mu_a = \int_{S^1} X_t \psi_a^* d\mu_a. \quad (3.4.3)$$

Назовем меру

$$d\nu_a = \psi_a^* d\mu_a \quad (3.4.4)$$

перераспределенной мерой на S^1 .

Назовем семейство конформных преобразований $\{\psi_a: \mathbb{D} \rightarrow a\}_{a \in \mathcal{H}\mathcal{C}}$ непрерывным, если отображение из множества $(0, 2\pi) \times S^1 \times \mathbb{D}$ в круг, определенное по

формуле $(l, p, z) \mapsto \psi_{a_l, p}(z)$, непрерывно. Следующая лемма описывает поведение перераспределенной меры $d\nu_a$ при двух «противоположных» вырождениях гиперболической шапочки a : в точку $p \in S^1$ и в весь круг.

Лемма 3.4.5. *Существует непрерывное семейство конформных диффеоморфизмов $\{\psi_a: \mathbb{D} \rightarrow a\}_{a \in \mathcal{HC}}$, такое, что для всех гиперболических шапочек $a \in \mathcal{HC}$ и всех векторов $t \in \mathbb{R}^2$*

$$\int_{S^1} w_a^t d\mu = 0, \quad (3.4.6)$$

$$\lim_{a \rightarrow \mathbb{D}} d\nu_a = d\mu, \quad (3.4.7)$$

$$\lim_{a \rightarrow p} d\nu_a = R_p^* d\mu, \quad (3.4.8)$$

где w_a^t определяется по формуле (3.4.2), $d\nu_a$ — перераспределенная мера, заданная соотношением (3.4.4), а $R_p(x) = x - 2(x \cdot p)$ — симметрия относительно диаметра, перпендикулярного вектору $p \in S^1$.

Две последние формулы в лемме 3.4.5 требуют некоторых пояснений. Как отмечалось в разд. 3.2, пространство $\mathcal{HC}$ можно отождествить с цилиндром $(0, 2\pi) \times S^1$, и сходимость в $\mathcal{HC}$ понимается в смысле обычной топологии на этом цилиндре. Сходимость мер понимается в смысле топологии, задаваемой нормой

$$\|d\nu\| = \sup_{f \in C(S^1), |f| \leq 1} \left| \int_{S^1} f d\nu \right|. \quad (3.4.9)$$

Доказательство. Мы приводим лишь схему доказательства, подробно-сти можно найти в работе [14, разд. 2.5]. Рассмотрим произвольное непрерывное семейство конформных диффеоморфизмов $\{\phi_a: \mathbb{D} \rightarrow a\}_{a \in \mathcal{HC}}$, такое, что $\lim_{a \rightarrow \mathbb{D}} \phi_a = \text{id}$. Отображение ψ_a определяется как композиция преобразования ϕ_a с автоморфизмами круга, возникающими в методе Херша. В частности, соотношение (3.4.6) оказывается автоматически выполненным. При вырождении шапочки a в полный круг $\mathbb{D}$ конформные диффеоморфизмы ψ_a сходятся к тождественному преобразованию на $\mathbb{D}$, откуда следует равенство (3.4.7). Наконец, полагая $n = 1$ в лемме 4.3.2 из [14], мы получаем формулу (3.4.8). $\square$

Зафиксируем семейство конформных отображений ψ_a , определенных в лемме 3.4.5. Заметим, что перераспределенная мера $d\nu_a$ непрерывно меняется при вырождении гиперболической шапочки a . Это свойство будет использовано в топологической части доказательства предложения 4.2.2.

§4. Построение тест-функций

4.1. Оценка отношения Рэлея. Из формулы (3.4.6) следует, что функции w_a^t , определенные соотношением (3.4.2), могут быть использованы в качестве тест-функций в вариационном представлении (3.1.2) собственного значения σ_2 . Для каждой гиперболической шапочки $a \in \mathcal{HC}$ обозначим через

$$E_a = \{w_a^t \mid t \in \mathbb{R}^2\}$$

двумерное пространство тест-функций.

Лемма 4.1.1. Для всякой тест-функции $w_a^t \in E_a$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla w_a^t|^2 dz < 2\pi.$$

Доказательство. Поскольку функция w_a^t гармоническая, ее интеграл Дирихле строго меньше, чем у любой другой функции из пространства $H^1(\mathbb{D})$ с теми же граничными значениями. Функция $\tilde{u}_a^t$ не является гармонической по лемме 3.4.1, и поскольку она непрерывна, она не может совпадать с w_a^t в пространстве $H^1(\mathbb{D})$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |\nabla w_a^t|^2 dz &< \int_{\mathbb{D}} |\nabla \tilde{u}_a^t|^2 dz = \int_a |\nabla u_a^t|^2 dz + \int_{\mathbb{D} \setminus a} |\nabla (u_a^t \circ \tau_a)|^2 dz \\ &= 2 \int_a |\nabla u_a^t|^2 dz = 2 \int_{\mathbb{D}} |\nabla X_t|^2 dz = 2 \underbrace{\sigma_1(\mathbb{D})}_1 \overbrace{\int_{S^1} X_t^2 d\theta}^{\pi} = 2\pi. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Второе и третье равенства в этой формуле следуют из сохранения интеграла Дирихле при конформных преобразованиях плоских областей. $\square$

Пусть $t_1, t_2 \in S^1$ — два перпендикулярных вектора. Для всякой гиперболической шапочки $a \in \mathcal{HC}$

$$\int_{S^1} (w_a^{t_1})^2 d\mu = \int_{S^1} (X_{t_1})^2 d\nu_a \geq \frac{1}{2} \int_{S^1} \overbrace{(X_{t_1})^2 + (X_{t_2})^2}^1 d\nu_a = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \rho(s) ds. \quad (4.1.3)$$

Действительно, первое равенство следует из (3.4.2) и (3.4.3), последнее равенство вытекает из (3.2.3) и (3.1.1), а среднее неравенство можно считать верным без ограничения общности (если оно неверно, поменяем местами t_1 и t_2).

Замечание 4.1.4. Поскольку $X_{t_1}^2 + X_{t_2}^2 = 1$ на окружности S^1 , доказательство оценки (4.1.3) аналогично рассуждению, приведенному в статье [19]. Оно значительно проще доказательства аналогичного результата [14, лемма 2.7.5] для задачи Неймана.

Рассмотрим одномерное пространство тест-функций

$$V_{t_1} = \{\alpha w_a^{t_1} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Из леммы 4.1.1 и формулы (4.1.3) следует, что любая функция $u \in V_{t_1}$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dz}{\int_{S^1} u^2 d\mu} \leq \frac{4\pi}{M(\Omega)}. \quad (4.1.5)$$

Мы хотим показать, что существует такая гиперболическая шапочка a , что оценка (4.1.5) выполнена не только для $u \in V_{t_1}$, но и для *любой* функции $u \in E_a$. Поскольку пространство E_a двумерно, неравенство (1.3.7) будет тогда следовать из формул (4.1.5) и (3.1.2).

4.2. Простые и кратные меры. Пусть дана конечная мера $d\nu$ на окружности S^1 . Рассмотрим квадратичную форму $V_{d\nu}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, заданную формулой

$$V_{d\nu}(t) = \int_{S^1} X_t^2 d\nu.$$

Обозначим через $\mathbb{R}P^1 = S^1/\mathbb{Z}_2$ проективную прямую, а через $[t] \in \mathbb{R}P^1$ элемент, соответствующий паре точек $\pm t \in S^1$. Будем говорить, что $[t] \in \mathbb{R}P^1$ есть *максимальное направление* меры $d\nu$, если $V_{d\nu}([t]) \geq V_{d\nu}([s])$ для любого $[s] \in \mathbb{R}P^1$. Назовем меру $d\nu$ *простой*, если ее максимальное направление единственно. В противном случае, назовем меру $d\nu$ *кратной*.

Лемма 4.2.1. *Мера $d\nu$ является кратной в том и только в том случае, когда $V_{d\nu}(t)$ не зависит от вектора $t \in S^1$.*

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из простого факта, что $V_{d\nu}(t)$ есть квадратичная форма. Детали доказательства можно найти в работе [14, лемма 2.6.1]. $\square$

Заметим, что, согласно формуле (3.3.2), $[e_1]$ является максимальным направлением меры $d\mu$.

Предложение 4.2.2. *Если мера $d\mu$ простая, то существует гиперболическая шапочка $a \in \mathcal{HC}$, такая, что соответствующая перераспределенная мера $d\nu_a$ кратная.*

Предложение 4.2.2 доказывается от противного. Предположим, что мера $d\mu$ и меры $d\nu_a$ для всех $a \in \mathcal{HC}$ простые. Для каждой гиперболической шапочки a обозначим через $[m(a)] \in \mathbb{R}P^1$ единственное максимальное направление перераспределенной меры $d\nu_a$.

По построению сложенная мера $d\mu_a$ непрерывно зависит от a . Семейство конформных отображений ψ_a непрерывно по лемме 3.4.5; следовательно, перераспределенная мера $d\nu_a$ тоже непрерывно зависит от a . Поэтому квадратичная форма $V_{d\nu_a}$ и единственное максимальное направление $[m(a)]$ меры $d\nu_a$ непрерывно зависят от a .

Изучим поведение максимального направления при вырождении гиперболической шапочки a в точку или в весь круг.

Лемма 4.2.3. *Допустим, что мера $d\mu$ и меры $d\nu_a$ для всех $a \in \mathcal{HC}$ простые. Тогда*

$$\lim_{a \rightarrow \mathbb{D}} [m(a)] = [e_1], \quad (4.2.4)$$

$$\lim_{a \rightarrow e^{i\theta}} [m(a)] = [e^{2i\theta}]. \quad (4.2.5)$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что формула (4.2.4) немедленно следует из соотношений (3.4.7) и (3.3.2). Докажем (4.2.5). Положим $p = e^{i\theta}$. По формуле (3.4.8)

$$\lim_{a \rightarrow p} \int_{S^1} X_t^2 d\nu_a = \int_{S^1} X_t^2 R_p^* d\mu = \int_{S^1} X_t^2 \circ R_p d\mu = \int_{S^1} X_{R_p t}^2 d\mu. \quad (4.2.6)$$

Поскольку мера $d\mu$ простая, $[e_1]$ есть ее единственное максимальное направление. Следовательно, правая часть равенства (4.2.6) максимальна при $R_p t = \pm e_1$. Применяя R_p с обеих сторон, мы получаем $t = \pm e^{2i\theta}$ и, тем самым, $[m(a)] = [e^{2i\theta}]$. $\square$

Доказательство предложения 4.2.2. Допустим, что мера $d\nu_a$ простая для каждой гиперболической шапочки $a \in \mathcal{HC}$. Как отмечалось ранее, пространство $\mathcal{HC}$ можно отождествить с открытым цилиндром $(0, 2\pi) \times S^1$. Определим отображение $h: (0, 2\pi) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ по формуле $h(l, p) = [m(a_{l,p})]$. Как было

замечено выше, максимальное направление $[m(a)]$ непрерывно зависит от a . Поэтому, применяя лемму 4.2.3, мы получаем, что h продолжается до непрерывного отображения замкнутого цилиндра $[0, 2\pi] \times S^1$, при котором

$$h(0, e^{i\theta}) = [e_1], \quad h(2\pi, e^{i\theta}) = [e^{2i\theta}].$$

Это означает, что h есть гомотопия между тривиальной петлей и нестягиваемой петлей в $\mathbb{R}P^1$. По очевидным топологическим причинам это невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство предложения. $\square$

4.3. Доказательство теоремы 1.3.6. Допустим, что мера $d\mu$ простая. Согласно предложению 4.2.2, существует такая гиперболическая шапочка $a \in \mathcal{HC}$, что соответствующая перераспределенная мера $d\nu_a$ кратная. Тогда неравенство (4.1.5) справедливо для любой функции $u \in E_a$, и теорема 1.3.6 непосредственно следует из вариационного принципа (3.1.2) для σ_2 .

Допустим теперь, что мера $d\mu$ кратная. В этом случае доказательство значительно проще. Действительно, как следует из леммы 4.2.1, любое направление $[s] \in \mathbb{R}P^1$ является максимальным направлением меры $d\mu$. Возьмем двумерное пространство

$$E = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}^2\}$$

в качестве пространства тест-функций в вариационной формуле (3.1.2) для σ_2 . Заменяя w_a^t на X_t и аккуратно прослеживая выкладки, легко видеть, что множитель 2 в формуле (4.1.2) исчезает. Таким образом, из формулы (3.1.2) следует оценка

$$\sigma_2(\Omega)M(\Omega) \leq 2\pi, \quad (4.3.1)$$

более сильная, чем (1.3.7). Теорема 1.3.6 доказана.

Замечание 4.3.2. Если мера $d\mu$ кратная, то лемма 3.4.1 неприменима, поскольку мы не используем формулу (3.2.1). Это объясняет, почему мы получаем нестрогое неравенство (4.3.1). Действительно, равенство достигается на круге с постоянной плотностью на границе.

Легко видеть, что если область Ω имеет симметрию порядка $q \geq 3$ (например, если Ω — правильный q -угольник), то мера $d\mu$ кратная при условии, что граничная плотность ρ обладает такой же симметрией (см. [2] и [3, с. 136–140]). В этих предположениях оценка (4.3.1) есть частный случай результата из [3, теорема 3.15]. Заметим, что из теоремы Куранта о нодальных областях собственных функций задачи Стеклова [24, §3] следует, что если Ω и плотность ρ обладают симметрией порядка $q \geq 3$, то $\sigma_1 = \sigma_2$ и оценка (4.3.1) следует из неравенства Вайнстока (1.2.2). Действительно, в этом случае область Ω имеет как минимум две оси симметрии и каждая из них является нодальной линией собственной функции, соответствующей собственному значению σ_1 . Таким образом, его кратность больше или равна 2. Мы не знаем ни одного примера, в котором мера $d\mu$ кратная, а собственное значение σ_1 при этом простое.

Благодарности. Авторы выражают признательность Михаилу Левитину, Марко Марлетте, Николаю Надирашвили, Юрию Сафарову и Марлен Фригон за полезные обсуждения. И. Полтерович благодарит за гостеприимство Институт Вейцмана (Израиль), где была завершена работа над этой статьей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. S. Ashbaugh, R. D. Benguria, *Isoperimetric inequalities for eigenvalues of the Laplacian*, in: Spectral Theory and Mathematical Physics: a Festschrift in Honor of Barry Simon's 60th Birthday, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 76, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 105–139.
- [2] C. Bandle, *Über des Stekloffsche Eigenwertproblem: Isoperimetrische Ungleichungen für symmetrische Gebiete*, Z. Angew. Math. Phys., **19** (1968), 627–237.
- [3] C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman, Boston, 1980.
- [4] F. Brock, *An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem*, Z. Angew. Math. Mech., **81**:1 (2001), 69–71.
- [5] D. Bucur, G. Buttazzo, *Variational Methods in Shape Optimization Problems*, Birkhäuser, Boston, MA, 2005.
- [6] D. Bucur, A. Henrot, *Minimization of the third eigenvalue of the Dirichlet Laplacian*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **456**:1996 (2000), 985–996.
- [7] R. Courant, *Beweis des Satzes, daß von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt*, Math. Z., **1**:2–3 (1918), 321–328.
- [8] M. Delfour, J.-P. Zolésio, *Shapes and Geometries. Analysis, Differential Calculus, and Optimization*, Advances in Design and Control, vol. 4, SIAM, Philadelphia, 2001.
- [9] Z. Ding, *A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**:2 (1996), 591–600.
- [10] B. Dittmar, *Sums of reciprocal Stekloff eigenvalues*, Math. Nachr., **268** (2004), 44–49.
- [11] J. Edward, *An inequality for Steklov eigenvalues for planar domains*, Z. Angew. Math. Phys., **45**:3 (1994), 493–496.
- [12] G. Faber, *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München Jahrgang, 1923, 169–172.
- [13] D. W. Fox, J. P. Kuttler, *Sloshing frequencies*, Z. Angew. Math. Phys., **34**:5 (1983), 668–696.
- [14] A. Girouard, N. Nadirashvili, I. Polterovich, *Maximization of the second positive Neumann eigenvalue for planar domains*, J. Differential Geom., **83**:3 (2009), 637–662.
- [15] R. Hempel, L. Seco, B. Simon, *The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains*, J. Funct. Anal., **102**:2 (1991), 448–483.
- [16] A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [17] A. Henrot, M. Pierre, *Variation et optimisation de formes*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [18] A. Henrot, G. Philippin, A. Safoui, *Some isoperimetric inequalities with application to the Stekloff problem*, <http://arxiv.org/abs/0803.4242>.
- [19] J. Hersch, *Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **270** (1970), A1645–A1648.
- [20] J. Hersch, L. E. Payne, M. M. Schiffer, *Some inequalities for Stekloff eigenvalues*, Arch. Rat. Mech. Anal., **57** (1974), 99–114.
- [21] S. Jimbo, Y. Morita, *Remarks on the behavior of certain eigenvalues on a singularly perturbed domain with several thin channels*, Comm. Partial Differential Equations, **17**:3–4 (1992), 523–552.
- [22] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann., **94**:1 (1925), 97–100.

- [23] E. Krahn, *Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen*, Acta Comm. Unic. Dorpat, **A9** (1926), 1–44.
- [24] J. R. Kuttler, V. G. Sigillito, *An inequality of a Stekloff eigenvalue by the method of defect*, Proc. Amer. Math. Soc., **20** (1969), 357–360.
- [25] N. Nadirashvili, *Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere*, J. Differential Geom., **61**:2 (2002), 335–340.
- [26] L. Payne, *Isoperimetric Inequalities and Their Applications*, SIAM Rev., **9**:3 (1967), 453–488.
- [27] J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound*, vol. 1, McMillan, London, 1877.
- [28] W. Stekloff, *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **19** (1902), 455–490.
- [29] G. Szegő, *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area*, J. Rational Mech. Anal., **3** (1954), 343–356.
- [30] M. E. Taylor, *Partial differential equations II. Qualitative studies of linear equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 116, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [31] G. Uhlmann, J. Sylvester, *The Dirichlet to Neumann map and applications*, in: Inverse Problems in Partial Differential Equations (Arcata, CA, 1989), SIAM, Philadelphia, PA, 1990, 101–139.
- [32] H. F. Weinberger, *An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem*, J. Rational Mech. Anal., **5** (1956), 633–636.
- [33] R. Weinstock, *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J. Rational Mech. Anal., **3** (1954), 745–753.
- [34] A. Wolf, J. Keller, *Range of the first two eigenvalues of the Laplacian*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **447** (1994), 397–412.

Невшательский университет, Швейцария
e-mail: alexandre.girouard@unine.ch
Монреальский университет, Канада
e-mail: polterovi@yahoo.com

Поступило в редакцию
15 сентября 2008 г.