Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Овсеевич, Структура аттрактора форм множеств достижимости, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 2, 74–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:06:09

Структура аттрактора форм множеств достижимости

© 2010. А. И. ОВСЕЕВИЧ

Изучено асимптотическое поведение областей достижимости для линейной автономной импульсной управляемой системы. Основной результат состоит в полном описании множества предельных форм областей достижимости (аттрактора) для случая скалярного управления. Аттрактор оказывается тором, определенным в терминах чисто мнимых собственных значений матрицы системы.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную автономную конечномерную импульсную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^n, \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

где u — векторная мера на $\mathbb{R}_+$ с полной вариацией ≤ 1 . Предполагается, что выполнено условие Калмана полной управляемости, т. е. из любой точки можно попасть в любую, двигаясь по траекториям соответствующей системы без ограничений на управление u . Обозначим через $D(T) = \{x(T)\}$ множество концов допустимых траекторий системы (1), называемое *областью (множеством) достижимости* в момент T . Область достижимости — один из центральных объектов теории управления ([1], [2]), имеющий смысл для любых, не только линейных, управляемых систем. В нашем контексте в силу условия Калмана это выпуклое тело — точка пространства Минковского симметричных относительно $0 \in \mathbb{V}$ выпуклых тел. Последнее является полным метрическим пространством относительно метрики Банаха–Мазура

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \log(t(\Omega_1, \Omega_2)t(\Omega_2, \Omega_1)), \quad \text{где } t(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{t \geq 1 : t\Omega_1 \supset \Omega_2\}.$$

При сопоставлении выпуклому телу Ω его опорной функции

$$H_\Omega(\xi) = \sup_{x \in \Omega} \langle x, \xi \rangle$$

пространство Минковского отождествляется с множеством банаховых норм на двойственном пространстве $\mathbb{V}^*$. Множество банаховых норм на исходном пространстве $\mathbb{V}$ также естественно отождествляется с пространством Минковского при сопоставлении норме соответствующего единичного шара.

Через $\text{Sh } D(T)$ обозначим форму тела $D(T)$, т. е. орбиту $\{gD(T) : g \in \text{GL}(\mathbb{V})\}$ точки $D(T)$ в пространстве Минковского под действием полной линейной группы. Это элемент пространства $\mathbb{S}$ форм симметричных выпуклых тел, которое является компактным метрическим пространством с факторметрикой Банаха–Мазура. Факторметрика здесь понимается стандартным образом: $\rho(\text{Sh } \Omega_1, \text{Sh } \Omega_2) = \inf\{\rho(g_1\Omega_1, g_2\Omega_2), g_i \in \text{GL}(\mathbb{V})\}$. Пространство $\mathbb{S}$ можно естественным образом трактовать как множество банаховых норм на $\mathbb{V}$ или $\mathbb{V}^*$ с точностью до линейного изоморфизма. Компактность пространства $\mathbb{S}$ легко получается, например, из классической теоремы Джона [5], утверждающей, что любое выпуклое симметричное тело находится на конечном ($\leq \frac{1}{2} \log n$) расстоянии Банаха–Мазура

от некоторого эллипсоида, и критерия компактности Асколи–Арцела в применении к опорным функциям.

Через $\mathcal{A}$ обозначим аттрактор — совокупность всех ω -предельных точек кривой $T \mapsto \text{Sh } D(T)$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \lim_{T_k \rightarrow +\infty} \text{Sh } D(T_k) \right\} \subset \mathbb{S}.$$

Структура аттрактора $\mathcal{A}$ в значительной (но не полной) мере известна [3]. Для ее описания необходимо ввести некоторые обозначения. Рассмотрим каноническое разложение

$$A = A_+ \oplus A_0 \oplus A_- \quad (2)$$

матрицы A системы (1) на неустойчивую, нейтральную и устойчивую компоненты в соответствии со знаком действительных частей ее собственных значений. Разложение (2) порождает разложение фазового пространства $\mathbb{V}$ в прямую сумму

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_-,$$

которое позволяет записывать векторы $x \in \mathbb{V}$ в виде троек (x_+, x_0, x_-) , где $x_i \in \mathbb{V}_i$. Определим $\mathbb{V}_{ij}$, где $i, j \in \{+, 0, -\}$, как сумму $\mathbb{V}_i \oplus \mathbb{V}_j$.

Рассмотрим разложение Жордана нейтральной компоненты матрицы A :

$$A_0 = D + N, \quad DN = ND,$$

где D — диагонализуемая, а N — нильпотентная матрицы. Существует (неоднозначно определенная) матрица $F_\infty = F_\infty(N): \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0$ со следующими свойствами: $F_\infty N = 0$, $F_\infty D = D F_\infty$, факторотображение $\overline{F}_\infty: \overline{\mathbb{V}}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{V}}_0$, где $\overline{\mathbb{V}}_0 = \mathbb{V}_0 / N\mathbb{V}_0$, тождественное.

Для выпуклых компактов Ω_i будем обозначать выпуклую оболочку Ω их объединения знаком соединения (джойна): $\Omega = \Omega_1 * \Omega_2$.

Определим тор $\mathcal{T} \subset \text{GL}(\mathbb{V}_0)$ как замыкание однопараметрической подгруппы $\{e^{Dt}\} \subset \text{GL}(\mathbb{V}_0)$.

Основное утверждение о структуре аттрактора состоит в следующем [3].

Теорема 1. *Аттрактор $\mathcal{A}$ представляет собой образ тора $\mathcal{T}$ при некотором непрерывном отображении Φ , а кривая $T \mapsto \text{Sh } D(T)$ в пространстве форм асимптотически близка к образу $T \mapsto \Phi(\gamma(T))$ прямолинейной обмотки $\gamma(T) = e^{DT}$ тора $\mathcal{T}$. Более точно, $\Phi(\mathbf{t}) = \text{Sh } \Omega(\mathbf{t})$, где*

$$\Omega(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}\Omega_{+0}) * \Omega_0 * \Omega_{-0}. \quad (3)$$

Здесь $\Omega_\alpha \subset \mathbb{V}_\alpha$, $\alpha \in \{+, 0, -\}$, — некоторые не зависящие от времени выпуклые компакты.

Говоря еще точнее, опорные функции множеств Ω_α задаются явными формулами

$$\begin{aligned} H_{\Omega_{-0}}(\xi) &= \sup |B^* F_\infty^* e^{D^* t} \xi_0 + B^* e^{A^* t} \xi_-|, & t &\in [0, \infty), \\ H_{\Omega_{+0}}(\xi) &= \sup |B^* F_\infty^* e^{-D^* s} e^{N^* s} \xi_0 + B^* e^{-A^* s} \xi_+|, & t &\in [0, \infty), \\ H_{\Omega_0}(\xi) &= \sup |B^* F_\infty^* \mathbf{t}^* e^{N^* \tau} \xi_0|, & \mathbf{t} &\in \mathcal{T}, \tau \in J = [0, 1]. \end{aligned}$$

Нас интересует полное описание аттрактора, т. е., в свете теоремы 1, вопрос о том, когда предельные формы $\text{Sh } \Omega(\mathbf{t})$ совпадают при разных $\mathbf{t}$. Аналогичная проблема изучалась в [4] для периодических линейных систем с ограниченными управлениями.

Здесь мы рассмотрим только случай скалярного управления. Кроме того, считаем, что все компоненты $\mathbb{V}_i$, $i = \pm, 0$, ненулевые, поскольку в противном случае все предельные формы совпадают по тривиальным причинам и аттрактор сводится к точке. Например, в случае $\mathbb{V}_- = 0$ формула (3) сводится к равенству $\Omega(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}\Omega_{+0}) * \Omega_0 = \mathbf{t}(\Omega_{+0} * \Omega_0)$, поскольку множество Ω_0 инвариантно относительно тора $\mathcal{T}$. Следовательно, $\text{Sh } \Omega(\mathbf{t}) = \text{Sh } \Omega_{+0} * \Omega_0$ не зависит от $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$.

Для различения предельных форм $\text{Sh } \Omega(\mathbf{t})$ при разных $\mathbf{t}$ требуются инварианты — свойства множеств $\Omega(\mathbf{t})$, сохраняющиеся под действием $\text{GL}(\mathbb{V})$. Идея состоит в том, чтобы изучить множество крайних точек в $\Omega(\mathbf{t})$ и выделить в нем некоторые особенно замечательные кривые, которые и дают нужные инварианты.

Вспомогательный результат.

Теорема 2. Пусть $S \in \text{GL}(\mathbb{V})$ отображает кривую $\gamma = \{e^{At}b, t \geq 0\}$ в аналогичную кривую $\gamma' = \{e^{A't}b', t \geq 0\}$, т.е. $Se^{At}b = e^{A'\phi(t)}b'$, где $\phi(0) = 0$. Предположим, что выполнено условие Калмана: кривая γ линейно порождает все пространство $\mathbb{V}$. Тогда $SAS^{-1} = \lambda A'$, где λ — положительная константа.

Иными словами, если одна фазовая кривая системы $\dot{x} = Ax$ переводится линейным преобразованием S в фазовую кривую системы $\dot{x} = A'x$, то S переводит весь фазовый портрет в фазовый портрет.

В самом деле, положим $A'' = SAS^{-1}$. Тогда $e^{A''t}b' = e^{A'\phi(t)}b'$. При этом ϕ — бесконечно гладкая и даже аналитическая неотрицательная возрастающая функция на $[0, \infty)$. Дифференцируя по t , получим

$$(A'' - \phi(t)'A')e^{A''t}b' \equiv 0.$$

Отсюда следует, что $\det(A'' - \phi(t)'A') \equiv 0$. Однако уравнение

$$\det(A'' - \lambda A') = 0$$

имеет лишь конечное число решений λ . В частности, любое непрерывное семейство корней постоянно. Следовательно, $\phi(t)'$ есть константа λ и, значит,

$$(A'' - \lambda A')x = 0$$

при $x \in \gamma'$. Но поскольку кривая γ' линейно порождает все пространство, получается, что $A'' - \lambda A' = 0$. $\square$

Выделенные кривые. Откуда берутся кривые в нашей исходной задаче?

Пусть управление скалярное. Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = 0,$$

где b — вектор, а u — (вещественная) мера на $\mathbb{R}_+$ с полной вариацией ≤ 1 ; условие Калмана означает, что кривая $e^{At}b$ линейно порождает все фазовое пространство. При этом Ω_{-0} — выпуклая оболочка «кривой»

$$\gamma_{-0}(t) = \pm(e^{A-t}b_- + e^{Dt}b_0^-), \quad b_0^- = F_\infty b_0, \quad (4)$$

Ω_{+0} — выпуклая оболочка «кривой»

$$\gamma_{+0}(t) = \pm(e^{-A+t}b_+ + e^{-Dt}b_0^+), \quad b_0^+ = e^N F_\infty b_0, \quad (5)$$

Ω_0 — выпуклая оболочка множества γ_0 точек вида

$$\pm e^{Dt} e^{\tau N} b_{00}, \quad \text{где } b_{00} = b_0^- = F_\infty b_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \tau \in I = [0, 1].$$

Слово «кривая» в применении к γ_{-0} и γ_{+0} поставлено в кавычки, поскольку каждое из этих множеств на самом деле есть объединение двух кривых, причем эти кривые получаются друг из друга с помощью центральной симметрии. В дальнейшем будем эти кавычки опускать. Впрочем, γ_{-0} и γ_{+0} можно рассматривать как настоящие кривые, но в проективных пространствах $\mathbb{P}(\mathbb{V}_{\pm 0})$.

Восстановление кривых $\gamma_{\pm 0}$ по телу Ω . Утверждается, что на каждой из кривых γ_{-0} и γ_{+0} имеются плотные подмножества, состоящие из выступающих точек множества

$$\Omega = \Omega_{+0} * \Omega_0 * \Omega_{-0}.$$

Напомним, что если Ω — выпуклый компакт, то точка $x \in \Omega$ называется выступающей, если для некоторого двойственного вектора ξ функция

$$\Omega \ni y \mapsto \langle y, \xi \rangle$$

имеет в точке x строгий максимум. Разумеется, множество $\Gamma(\Omega)$ выступающих точек тела Ω является его линейным инвариантом в том смысле, что $\Gamma(g\Omega) = g\Gamma(\Omega)$ для $g \in \text{GL}(\mathbb{V})$. Инвариантом является и замыкание множества выступающих точек.

Поскольку Ω является выпуклой оболочкой объединения

$$\gamma = \gamma_{-0} \cup \gamma_{+0} \cup \gamma_0,$$

то вне этого объединения выступающих точек нет.

Рассмотрим сначала множество γ_0 . Пусть $t_* \geq 0$, $\tau_* \in I$ и

$$\gamma_0(t_*, \tau_*) = e^{Dt_*} e^{\tau_* N} b_{00}$$

— соответствующая точка в γ_0 . Функция

$$h_0 = h_{\xi_0} : (t, \tau) \mapsto \langle e^{Dt} e^{\tau N} b_{00}, \xi \rangle$$

имеет вид $\text{Re} \sum_{\omega} e^{i\omega t} p_{\omega, \xi}(\tau)$, где суммирование проводится по неотрицательным частотам $\omega \geq 0$, причем полином $p_{\omega, \xi}(\tau)$ является комплексным при $\omega \neq 0$ и вещественным при $\omega = 0$. Более того, варьируя $\xi = \xi_0$, можно сделать полиномы $p_{\omega, \xi}$ произвольными в рамках единственного ограничения — степень полинома $p_{\omega, \xi}$ меньше размера соответствующей жордановой клетки матрицы N .

Запишем $\text{Re} \sum_{\omega} e^{i\omega t} p_{\omega, \xi}(\tau)$ в виде $\text{Re} \sum_{\omega} e^{i\omega(t-t_*)} P_{\omega, \xi}(\tau)$, где на полиномы $P_{\omega, \xi}$ наложены те же самые ограничения, что и на $p_{\omega, \xi}$. Поэтому если $P_{\omega, \xi}(\tau_*) = \max_{\tau \in I} |P_{\omega, \xi}(\tau)|$ для всех индексов ω , то (t_*, τ_*) — точка максимума функции h_0 , причем этот максимум положительный и строгий по t . Более того, выполнено стандартное достаточное условие строгости максимума:

$$\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2}(t_*, \tau_*) < 0.$$

Добиться того, чтобы максимум был строгим и по τ , не всегда возможно: для этого нужно, чтобы степень хотя бы одного из полиномов $p_{\omega, \xi}$ была больше единицы или, что эквивалентно, чтобы размер одной из жордановых клеток матрицы N был не меньше трех. В этом случае все точки $\gamma_0(t_*, \tau_*)$, где $t_* \geq 0$, $\tau_* \in I$, выступающие. Если размеры всех жордановых клеток матрицы N меньше трех, то из предыдущих рассуждений вытекает, что выступающие точки — это все точки вида $\gamma_0(t_*, 0)$ или $\gamma_0(t_*, 1)$. Соответственно замыкание Γ_0 множества выступающих точек вида $\gamma_0(t, \tau)$ — это либо множество $M = \{x e^{\tau N} b_{00},$

$\mathbf{x} \in \mathcal{T}, \tau \in I$ }, либо объединение множеств $M_{\pm} = \{\mathbf{x}b_0^{\pm}, \mathbf{x} \in \mathcal{T}\}$, которое также можно описать как множество точек вида $\mathbf{x}e^{\tau N}b_{00}$, где $\tau \in \partial I = \{0, 1\}$. В последнем случае возможно, что $N = 0$, и тогда множества M_+ и M_- точек вида $\mathbf{x}e^{\tau N}b_{00}$ при $\tau = 0$ и $\tau = 1$ совпадают друг с другом и с M . «Неблагоприятный» случай — это когда максимальный размер жордановых клеток матрицы N равен двум. Тогда множество M действительно не совпадает с Γ_0 и получается из Γ_0 путем присоединения к Γ_0 прямолинейных отрезков $I(\mathbf{x})$, соединяющих точки $\mathbf{x}b_0^+$ и $\mathbf{x}b_0^-$.

Покажем теперь, что точку $\gamma_{-0}(t_*) = e^{A-t_*}b_- + e^{D t_*}F_{\infty}b_0$ можно сколь угодно хорошо приблизить выступающими точками на кривой γ_{-0} . Функцию $h_{-0}(t) = \langle \gamma_{-0}(t), \xi \rangle = \langle e^{A-t}b_-, \xi_- \rangle + h_{\xi_0}(t, 0)$ при малом двойственном векторе ξ_- можно рассматривать как малое возмущение функции

$$h^0(t) = h_{\xi_0}(t, 0),$$

которая имеет положительный строгий максимум в точке t_* . Пусть вектор ξ_- не только маленький, но еще и такой, что

$$\langle e^{A-t_*}b_-, \xi_- \rangle > 0.$$

Тогда, во-первых, максимум функции $\Omega \ni y \mapsto \langle y, \xi \rangle$, где $\xi = (\xi_-, \xi_0, 0)$, достигается на кривой γ_{-0} , поскольку на γ_{+0} и γ_0 ее значения меньше в силу неравенства $h_{-0}(t_*) > h^0(t_*) = \max h^0(t)$. Во-вторых, если вектор ξ_- достаточно мал, то этот максимум достигается в единственной точке вблизи точки t_* , причем в точке максимума выполнено условие невырожденности $\partial^2 h_{-0} / \partial t^2 < 0$. В частности, этот максимум строгий, и, таким образом, сколь угодно близко к $\gamma_{-0}(t_*)$ на γ_{-0} имеется выступающая точка.

Совершенно аналогичное рассуждение показывает, что на кривой γ_{+0} имеется плотное множество выступающих точек для тела Ω .

Выводы. Первый вывод из этих рассмотрений таков: по телу Ω можно однозначно восстановить кривые $\gamma_{\pm 0}$. В самом деле, по телу Ω можно однозначно восстановить замыкание $\bar{\Gamma} = \bar{\gamma}$ множества выступающих точек, которое, как мы выяснили, имеет вид $\bar{\Gamma} = \gamma_{-0} \cup \Gamma_0 \cup \gamma_{+0}$. Геометрически мы имеем два одномерных уса $\gamma_{\pm 0}$, наматывающихся на многообразие (возможно, с краем) Γ_0 . Компоненты разложения определяются по $\bar{\Gamma}$ однозначно. Действительно, внутренняя точка кривой $\gamma_{\pm 0}$ выделяется из прочих точек множества $\bar{\Gamma}$ тем, что если ее удалить из $\bar{\Gamma}$, то образуется дополнительная связная компонента.

Точно такие же рассуждения позволяют восстановить по телу $\Omega(\mathbf{t})$ пару «кривых» $\{\mathbf{t}\gamma_{+0}, \gamma_{-0}\}$.

Второй вывод состоит в том, что по телу Ω можно однозначно восстановить множество $M = \{\mathbf{x}e^{\tau N}b_{00}, \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \tau \in I\}$. В самом деле, множество $\Gamma_0 = \bar{\gamma} \setminus (\gamma_{-0} \cup \gamma_{+0})$ восстанавливается по Ω однозначно. Пусть осуществляется «благоприятный» случай, когда либо $N = 0$, либо у N имеется жорданова клетка размера ≥ 3 . Тогда $M = \Gamma_0$, и тем самым M восстанавливается по Ω однозначно.

Пусть реализуется «неблагоприятный» случай, когда $N \neq 0$, а все жордановы клетки имеют размеры ≤ 2 . Рассмотрим подпространство $\mathbb{V}_{\infty} = \mathbb{V}_+ \oplus F_{\infty}\mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_- \subset \mathbb{V}$. Отметим, что вектор $b_{-0} = (b_-, b_0^-)$ в обозначениях (4) лежит

в $\mathbb{V}_\infty$, а оператор $\tilde{A} = A_+ \oplus D \oplus A_-$ действует в этом пространстве. Инвариантное подпространство $\mathbb{V}_{\infty-0} = F_\infty \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_-$ — линейная оболочка кривой $\gamma_{-0} \subset \mathbb{V}_\infty$. Теперь применим вспомогательную теорему 2 к кривой γ_{-0} , рассматриваемой как множество. Получим, что параметризованная кривая $\gamma_{-0}(t)$ восстанавливается по Ω однозначно с точностью до линейной замены параметра $t \mapsto \lambda_- t$, $\lambda_- > 0$. Точно так же восстанавливается параметризованная кривая $\gamma_{+0}(t) \in \mathbb{V}_+ \oplus e^N F_\infty \mathbb{V}_0$ с точностью до линейной замены $t \mapsto \lambda_+ t$, $\lambda_+ > 0$. Утверждается, что $\lambda_+ = \lambda_-$. Действительно, замыкания кривых $\gamma_{\pm 0}(t)$ — главные однородные пространства одного и того же тора $\mathcal{T}$, и мы получаем автоморфизм тора, продолжающий автоморфизм $\exp(tD) \mapsto \exp(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} tD)$ порождающей однопараметрической группы. Но такое продолжение существует, только если $\lambda_+/\lambda_- = 1$. Следовательно, соответствие $\mathbf{x}b_0^+ \mapsto \mathbf{x}b_0^-$ между множествами M_+ и M_- определено телом Ω однозначно. Во избежание недоразумений отметим, что восстановление канонического соответствия между множествами M_+ и M_- происходит не только в «неблагоприятном» случае. Однако только в этом случае множество M получается из M_+ и M_- путем присоединения прямолинейных отрезков $I(\mathbf{x})$, соединяющих соответствующие точки, и потому также определяется однозначно.

Рассмотрим «аналитическое продолжение»

$$\widetilde{M} = \{\mathbf{x}e^{\tau N}b_{00}, (\mathbf{x}, \tau) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}\}$$

множества M . Это главное однородное пространство группы $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$, которое как множество определяется по телу Ω однозначно. Покажем, что естественная проекция $\widetilde{M} \rightarrow M_-$, задаваемая формулой $\mathbf{x}e^{\tau N}b_{00} \mapsto \mathbf{x}b_{00}$, определяется по телу Ω однозначно. В самом деле, она задается полиномиальным (в естественных матричных координатах) отображением $\pi: \mathcal{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$, которое обладает свойством $\pi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$. Однако такое отображение единственно: не существует непостоянных полиномиальных отображений $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$.

Следовательно, слои отображения π , которые являются орбитами однопараметрической группы $\{\exp(N\tau)\}$, определяются по телу Ω однозначно. Кроме того, отображение $\exp(N): M_- \rightarrow M_+$, как мы уже выяснили, восстанавливается по телу Ω . Следовательно, действие группы $\exp(N\tau)$ определяется по телу Ω однозначно с точностью до знака τ (обращение соответствует перестановке M_- и M_+).

Плоды просвещения. В частности, если $\text{Sh } \Omega(\mathbf{t}') = \text{Sh } \Omega(\mathbf{t}'')$, то отсюда следует, что имеется матрица $S \in \text{GL}(\mathbb{V})$, которая переводит пару кривых $\{\mathbf{t}'\gamma_{+0}, \gamma_{-0}\}$ в аналогичную пару $\{\mathbf{t}''\gamma_{+0}, \gamma_{-0}\}$ и, кроме того, коммутирует или антикоммутирует с матрицей N .

При этом могут представиться два случая: либо

$$S\mathbf{t}'\gamma_{+0} = \mathbf{t}''\gamma_{+0}, \quad S\gamma_{-0} = \gamma_{-0}, \quad SN = NS, \quad (6)$$

либо

$$S\mathbf{t}'\gamma_{+0} = \gamma_{-0}, \quad S\gamma_{-0} = \mathbf{t}''\gamma_{+0}, \quad SN = -NS. \quad (7)$$

Из теоремы 2 получаем, что в первом случае

$$S\tilde{A}S^{-1} = \lambda\tilde{A} \quad \text{и} \quad S\mathbf{t}'b_{+0} = \pm\mathbf{t}''b_{+0}, \quad Sb_{-0} = \pm b_{-0}, \quad (8)$$

а во втором

$$S\tilde{A}S^{-1} = -\lambda\tilde{A} \quad \text{и} \quad S\mathbf{t}'b_{+0} = \pm b_{-0}, \quad Sb_{-0} = \pm\mathbf{t}''b_{+0}, \quad (9)$$

где $b_{+0} = (b_+, b_0^+)$, $b_{-0} = (b_-, b_0^-)$ в обозначениях (4),(5), λ — положительная константа, а оператор $\tilde{A} = A_+ \oplus D \oplus A_-$ действует в пространстве $\mathbb{V}_\infty = \mathbb{V}_+ \oplus F_\infty \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_-$. Для определения константы λ используем следующее простое соображение: спектр $\text{Spec}(S\tilde{A}S^{-1})$ матрицы $S\tilde{A}S^{-1}$ совпадает со спектром $\text{Spec}(\tilde{A})$, а $\text{Spec}(\lambda\tilde{A}) = \lambda \text{Spec}(\tilde{A})$. Следовательно, $\text{Spec}(\tilde{A}) = \lambda \text{Spec}(\tilde{A})$. Так как спектр — конечное множество, а $\lambda > 0$, то $\lambda = 1$. Заметим, что первый случай, (7), сводится ко второму, (6), если рассмотреть преобразование S^2 вместо S и учесть, что $S\mathbf{t} = \mathbf{t}^{-1}S$ при $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$. Последнее вытекает из первого соотношения (9) с учетом равенства $\lambda = 1$. Конечно, второй случай следует рассматривать как исключительный, поскольку для его возникновения нужно, например, чтобы спектр матрицы A был симметричным: $\text{Spec}(A) = -\text{Spec}(A)$.

Из последних двух соотношений (8) получим, что $\mathbf{t}'b_0^- = \pm\mathbf{t}''b_0^-$.

В самом деле, из последнего соотношения (8) имеем $Sb_0^- = \pm b_0^-$, а из предпоследнего $S\mathbf{t}'e^N b_0^- = \pm\mathbf{t}''e^N b_0^-$. В силу (6) и (8) преобразование S коммутирует с N и с тором $\mathcal{T}$. Следовательно, $\mathbf{t}'b_0^- = \pm S\mathbf{t}'b_0^- = \pm\mathbf{t}''b_0^-$.

Поскольку действие тора $\mathcal{T}$ коммутирует с N , а векторы вида $N^k \mathbf{t}b_0^-$, где $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$, порождают все пространство $\mathbb{V}_0$, мы получаем, что $\mathbf{t}' = \pm\mathbf{t}''$.

Следовательно, множества $\Omega(\mathbf{t}')$ и $\Omega(\mathbf{t}'')$ имеют одинаковую форму, только если $\mathbf{t}' = \pm\mathbf{t}''$. Ясно, что если $\mathbf{t}' = \pm\mathbf{t}''$, то отображение

$$S: (x_+, x_0, x_-) \mapsto (x_+, -x_0, -x_-)$$

переводит $\Omega(\mathbf{t}')$ в $\Omega(\mathbf{t}'')$, так что условие $\mathbf{t}' = \pm\mathbf{t}''$ является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы $\text{Sh } \Omega(\mathbf{t}') = \text{Sh } \Omega(\mathbf{t}'')$. В частности, если матрица -1 из группы $\text{GL}(\mathbb{V}_0)$ не принадлежит $\mathcal{T}$, то аттрактор совпадает с тором.

Нетрудно дать критерий того, что $-1 \in \mathcal{T}$. А именно, нужно рассмотреть все целочисленные (резонансные) соотношения

$$\sum_{k=1}^d m_k \omega_k = 0 \quad (10)$$

между «частотами» ω_k или, что то же самое, собственными значениями $\lambda_k = i\omega_k$ матрицы A_0 . Тогда критерий состоит в том, что для любого соотношения (10) число $\sum m_k$ четное.

Вообще, пусть $z = \text{diag}(z_1, \dots, z_d)$ — диагональная матрица в том же базисе, в котором диагонализуется матрица $D = i \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_d)$. Тогда $z \in \mathcal{T}$ в том и только в том случае, когда

$$|z_k| = 1 \quad \text{для всех } k \quad \text{и} \quad \prod_{k=1}^d z_k^{m_k} = 1 \quad \text{для любого соотношения (10)}. \quad (11)$$

Ясно, что при $z = -1$ мы приходим к условию $\prod (-1)^{m_k} = (-1)^{\sum m_k} = 1$ для любого соотношения (10), а это и означает, что число $\sum m_k$ четное. Критерий (11) — это классическая теорема Кронекера, которая утверждает, что

вектор $(z_1, \dots, z_d) \in T^d$ можно сколь угодно хорошо приблизить вектором вида $(e^{i\omega_1 t}, \dots, e^{i\omega_d t}) \in T^d$, если (и только если) выполнено условие (11). (Здесь $T = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$.)

[Теорема Кронекера вытекает «из общих принципов», а именно из теории двойственности локально компактных абелевых групп. Действительно, замыкание $\mathcal{T}$ однопараметрической подгруппы $\{(e^{i\omega_1 t}, \dots, e^{i\omega_d t})\} \subset T^d$ должно совпадать с подмножеством в T^d , на котором обращаются в единицу все характеры T^d , обращающиеся в единицу на однопараметрической подгруппе. Но это и есть теорема Кронекера.]

В случае «общего положения» нетривиальных резонансов (10) вообще нет и, в частности, $-1 \in \mathcal{T}$. Но если резонансы присутствуют, то случай $-1 \notin \mathcal{T}$ встречается чаще, чем противоположный.

Итак, основной результат — следующий.

Теорема 3. Пусть в линейной системе (1) управление и скалярное, а все пространства $\mathbb{V}_i$, $i \in \{+, 0, -\}$, ненулевые. Тогда аттрактор $\mathcal{A}$ форм областей достижимости есть фактор тора $\mathcal{T}$ по отношению эквивалентности $\mathbf{t}' \sim \mathbf{t}'' \iff \mathbf{t}' = \pm \mathbf{t}''$. Если для любого соотношения (10) между частотами $\sum m_k \equiv 0 \pmod{2}$, то каждый класс эквивалентности на $\mathcal{T}$ состоит из двух элементов, в противном случае — из одного.

В частности, в условиях теоремы аттрактор $\mathcal{A}$ всегда сам является в естественном смысле тором, изогенным тору $\mathcal{T}$. Размерность аттрактора совпадает с рангом группы по сложению, порожденной чисто мнимыми собственными значениями матрицы системы A .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004.
- [2] F. L. Chernousko, *State Estimation of Dynamic Systems*, SRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1994.
- [3] Е. В. Гончарова, А. И. Овсеевич, *Асимптотика множеств достижимости линейных динамических систем с импульсным управлением*, Изв. РАН, Теор. сист. упр., 2007, № 1, 51–59.
- [4] T. Yu. Figurina, A. I. Ovseevich, *Asymptotic behavior of attainable sets of linear periodic control systems*, J. Optim. Theory Appl., **100**:2 (1999), 349–364.
- [5] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, in: Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, Interscience Publishers, New York, NY, 1948, 187–204.

Институт проблем механики РАН
e-mail: ovseev@ipmnet.ru

Поступило в редакцию
10 октября 2008 г.