Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кругляк, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер,
Ортоскалярные представления колчанов, соответ-
ствующих расширенным графам Дынкина, в кате-
гории гильбертовых пространств, *Функц. анализ и
его прил.*, 2010, том 44, выпуск 2, 57–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2986>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 09:02:40

Ортоскалярные представления колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина, в категории гильбертовых пространств

© 2010. С. А. КРУГЛЯК, Л. А. НАЗАРОВА, А. В. РОЙТЕР

Известно, что конечно представимые колчаны связаны с графами Дынкина, а ручные — с расширенными графами Дынкина. Ранее авторы распространили некоторые из этих результатов на локально скалярные (в дальнейшем названные ортоскалярными) представления колчанов в гильбертовых пространствах, в частности, доказали аналог теоремы Габриеля. В настоящей статье мы изучаем связь между неразложимыми представлениями в категории ортоскалярных представлений и неразложимыми представлениями в категории всех представлений колчана. Для колчанов, связанных с расширенными графами Дынкина, неразложимые ортоскалярные представления классифицируются с точностью до унитарной эквивалентности.

Введение

Более 30-ти лет назад (см. [1]) в работах И. М. Гельфанда, В. А. Пономарева, П. Габриеля и авторов было показано, что ряд проблем линейной алгебры (возникших в теории представлений алгебр, теории групп и модулей Хариш-Чандры) допускают содержательное изучение как на наивном языке приведения наборов матриц теми или иными допустимыми преобразованиями, так и в категорно-функторных терминах. Отметим представления колчанов и частично упорядоченных множеств. Было доказано, в частности, что конечно представимые (ручные) колчаны соответствуют графам (расширенным графам) Дынкина.

В [2] был предложен метод перенесения этих результатов на представления колчанов в категории сепарабельных гильбертовых пространств (конечномерных (унитарных) и счетномерных), построены функторы Кокстера и доказан аналог теоремы Габриеля [3] для локально скалярных представлений колчанов (в дальнейшем мы заменим термин «локально скалярные представления» [2] на термин «ортоскалярные представления», считая его более удачным). У колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина, размерности неразложимых ортоскалярных представлений не ограничены в совокупности (см. [2]), но, как следует из [4]–[6], среди бесконечно представимых колчанов эти колчаны и только они не имеют бесконечномерных неразложимых ортоскалярных представлений.

В работе [7] начато изучение ортоскалярных представлений колчанов ручного типа, в частности, классифицируются все неразложимые представления колчанов с графом $\tilde{D}_4$. В настоящей статье мы даем описание неразложимых представлений колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$, $\tilde{A}_m$ при четном m (см. теоремы 1–3).

§1. О неразложимости в категории представлений колчана и ее подкатегории ортоскалярных представлений

Напомним некоторые определения и факты (см. [7]) об ортоскалярных представлениях колчанов. Колчан Q с множеством вершин Q_v , $|Q_v| = N$, и множеством стрелок Q_a называется *разделенным*, если $Q_v = \overset{\circ}{Q} \sqcup \overset{\bullet}{Q}$ и для любой стрелки $\alpha \in Q_a$ ее начало t_α принадлежит $\overset{\circ}{Q}$, а конец h_α принадлежит $\overset{\bullet}{Q}$. Колчан Q называется *однократным*, если при $\alpha \neq \beta$ либо $t_\alpha \neq t_\beta$, либо $h_\alpha \neq h_\beta$. Вершины из $\overset{\circ}{Q}$ будем называть *четными*, вершины из $\overset{\bullet}{Q}$ — *нечетными*.

Пусть $m = |\overset{\circ}{Q}|$, $n = |\overset{\bullet}{Q}|$, $\overset{\circ}{Q} = \{i_1, \dots, i_m\}$, $\overset{\bullet}{Q} = \{j_1, \dots, j_n\}$. Представление T колчана Q ставит в соответствие вершине $i \in Q_v$ конечномерное линейное пространство $T(i)$, а стрелке $\alpha: j \rightarrow i$, $\alpha \in Q_a$, линейное отображение $T_{ij}: T(j) \rightarrow T(i)$. Представление T разделенного однократного колчана при фиксированных базисах пространств $T(i)$, $i \in Q_v$, можно ассоциировать с блочной матрицей $T = [T_{i,j,k}]_{k=1, \dots, n}^{l=1, \dots, m}$, считая, что $T_{i,j,k} = 0$, если не существует стрелки $\alpha \in Q_a$, такой, что $t_\alpha = j_k$, $h_\alpha = i_l$.

Пусть $\text{Rep } Q$ — категория представлений колчана Q , объекты которой суть представления, а морфизм представления T в представление $\tilde{T}$ определяется как семейство линейных отображений $C = \{C_i\}_{i \in Q_v}$, $C_i: T(i) \rightarrow \tilde{T}(i)$, таких, что для каждой стрелки $\alpha \in Q_a$ с $t_\alpha = j$, $h_\alpha = i$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(j) & \xrightarrow{T(\alpha)} & T(i) \\ \downarrow C_j & & \downarrow C_i \\ \tilde{T}(j) & \xrightarrow{\tilde{T}(\alpha)} & \tilde{T}(i) \end{array} \quad (1)$$

коммутативна, т. е. $C_i T_{ij} = \tilde{T}_{ij} C_j$.

Пусть представления $T, \tilde{T}$ заданы матрицами

$$T = [T_{i,j,k}]_{k=1, \dots, n}^{l=1, \dots, m}, \quad \tilde{T} = [\tilde{T}_{i,j,k}]_{k=1, \dots, n}^{l=1, \dots, m}$$

и $A = \text{diag}\{C_{i_1}, \dots, C_{i_m}\}$, $B = \text{diag}\{C_{j_1}, \dots, C_{j_n}\}$. Тогда из коммутативности диаграмм (1) следует, что

$$AT = \tilde{T}B. \quad (2)$$

Будем в дальнейшем также пользоваться обозначением $C = (A, B)$.

Пусть $\mathcal{H}$ — категория унитарных (конечномерных гильбертовых) пространств. Обозначим через $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$ подкатегорию в $\text{Rep } Q$, объекты которой являются представлениями T , такими, что $T(i)$, $i \in Q_v$, — унитарные пространства, а морфизмы $C: T \rightarrow \tilde{T}$ — это те из морфизмов в $\text{Rep } Q$, для которых, кроме (1), коммутативными будут и диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T(j) & \xleftarrow{T(\alpha)^*} & T(i) \\ \downarrow C_j & & \downarrow C_i \\ \tilde{T}(j) & \xleftarrow{\tilde{T}(\alpha)^*} & \tilde{T}(i) \end{array} \quad (3)$$

т. е. будут выполняться равенства

$$AT = \tilde{T}B, \quad BT^* = \tilde{T}^*A \quad (4)$$

Представления $T, \tilde{T}$ из $\text{Rep } Q$ (соответственно из $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$) эквивалентны в $\text{Rep } Q$ (соответственно в $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$), если найдется обратимый морфизм $C: T \rightarrow \tilde{T}$. Можно показать, что T и $\tilde{T}$ эквивалентны в $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда они унитарно эквивалентны (см., например, [8]), т. е. обратимый морфизм можно выбрать состоящим из унитарных матриц C_i .

Положим

$$\vec{T}_i = [T_{i,j_1}; \dots; T_{i,j_n}], \quad T_j^\downarrow = \begin{bmatrix} T_{i_1,j} \\ \vdots \\ T_{i_m,j} \end{bmatrix}.$$

Представление T однократного разделенного колчана Q из категории $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$ назовем *ортоскалярным*, если каждой вершине $i \in Q_v$ сопоставлено действительное неотрицательное число $\chi(i)$ и выполняются следующие условия:

$$\vec{T}_i \cdot \vec{T}_i^* = \chi(i)I_i \quad \text{при } i \in \overset{\circ}{Q}, \quad (5)$$

$$T_j^{\downarrow*} \cdot T_j^\downarrow = \chi(j)I_j \quad \text{при } j \in \overset{\circ}{Q}; \quad (6)$$

здесь I_i — матрица единичного оператора в $T(i)$. Ортоскалярной будем называть и матрицу представления T . Набор $\chi = \{\chi(i)\}_{i \in Q_v}$ будем называть характером ортоскалярного представления T .

В определении представлений колчана Q в $\mathcal{H}$ можно было бы отказаться от конечномерности пространств $T(i)$ и рассматривать также бесконечномерные представления, повторяя предыдущие определения почти дословно (ставя в соответствие вершине сепарабельное гильбертово пространство, а стрелке — ограниченное линейное отображение). Поскольку все неразложимые ортоскалярные представления колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина, конечномерны, то для разложимых представлений в категории гильбертовых пространств есть общие теоремы (см. [9]) о разложении в прямую сумму (или прямой интеграл) неразложимых.

Будем говорить, что Q (ортоскалярно) *конечно представим* в $\mathcal{H}$, если все его ортоскалярные представления распадаются в прямую сумму (конечную либо бесконечную) конечномерных представлений, размерности его неразложимых представлений ограничены в совокупности и в каждой размерности число неразложимых представлений с данным характером конечно. В противном случае будем называть Q *бесконечно представимым*.

Определим категорию $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$ как полную подкатегорию в $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$, объекты которой суть ортоскалярные представления колчана Q .

Заметим, что предположение о разделенности колчана является чисто техническим. Пусть колчанам Q и Q' соответствует один и тот же граф G , но ориентации разные. Пусть $X(a) = \{\alpha \in Q_a \mid t_\alpha = a\}$, $Y(a) = \{\alpha \in Q_a \mid h_\alpha = a\}$, $a \in Q_v$. Представление T колчана Q является ортоскалярным с характером $\chi = \{\chi(a)\}_{a \in Q_v}$, если для любого $a \in Q_v$

$$\sum_{\alpha \in X(a)} T^*(\alpha)T(\alpha) + \sum_{\beta \in Y(a)} T(\beta)T^*(\beta) = \chi(a)I_{T(a)}.$$

Морфизмы между представлениями определяются коммутативными диаграммами (1), (3). В этом случае определяется категория $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$. Легко видеть что между объектами и морфизмами категорий $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$ и $\text{Rep}_{\text{os}}(Q', \mathcal{H})$ естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие и категории $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$ и $\text{Rep}_{\text{os}}(Q', \mathcal{H})$ эквивалентны. В этом смысле ортоскалярные представления колчанов не зависят от выбора ориентации ребер, что оправдывает выбор технически удобной ориентации (разделенные колчаны).

Пусть G — граф и G_v — множество его вершин. Обозначим через $\mathbb{R}^{G_v}$ линейное действительное пространство, состоящее из наборов $x = (x_i)$ действительных чисел x_i ($i \in G_v$); элементы из $\mathbb{R}^{G_v}$ будем называть G -векторами. G -вектор x будем называть положительным ($x > 0$), если $x \neq 0$ и $x_i \geq 0$ для $i \in G_v$. Положим $\mathbb{R}_+^{G_v} = \{x \in \mathbb{R}^{G_v} \mid x > 0\}$.

Пусть T — ортоскалярное представление разделенного однократного колчана Q и G — соответствующий этому колчану граф. Сопоставим представлению T два N -мерных G -вектора ($N = m + n$): *размерность* $d = \{d(j)\}_{j \in Q_v}$, где $d(j) = \dim T(j)$, и *характер* $\chi = \{\chi(j)\}_{j \in Q_v}$, определенный выше (см. (5), (6)). Два ортоскалярных представления T и $\tilde{T}$ эквивалентны, если существуют такие унитарные матрицы $U = \text{diag}\{U_{i_1}, \dots, U_{i_m}\}$ и $V = \text{diag}\{V_{j_1}, \dots, V_{j_n}\}$, что

$$UT = \tilde{T}V, \quad \text{или} \quad \tilde{T}_{i_l, j_k} = U_{i_l} T_{i_l, j_k} V_{j_k}^*.$$

Представление T будем называть *шуровским* (*brick*) в категории $\text{Rep } Q$ (соответственно $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$, $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$), если его кольцо эндоморфизмов в этой категории одномерно (изоморфно $\mathbb{C}$). Очевидно, что если T — шуровское представление, то оно неразложимо (в соответствующей категории). Как известно, если T неразложимо в категории $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$, то оно в ней шуровское (см., например, [7, замечание 4 и его доказательство]).

Представление T колчана Q называется *точным*, если $T(i) \neq 0$ при всех $i \in Q_v$. *Носителем* представления T называется множество $Q_v^T = \{i \in Q_v \mid T(i) \neq 0\}$. Характер ортоскалярного представления T определен однозначно на его носителе Q_v^T (и неоднозначно вне носителя). Если $Q_v^T = Q_v$, то характер определен однозначно и обозначается через χ_T . В общем случае обозначим через $\{\chi_T\}$ множество всех характеров представления T . Ясно, что если T и $\tilde{T}$ унитарно эквивалентны, то $\{\chi_T\} = \{\chi_{\tilde{T}}\}$.

Теорема 1. Пусть Q — разделенный однократный колчан.

(а) Если $T, \tilde{T} \in \text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$ — представления с одинаковыми характеристиками и T эквивалентно $\tilde{T}$ в $\text{Rep } Q$, то T эквивалентно $\tilde{T}$ в $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$.

(б) Если T — неразложимое представление в $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$, то оно является неразложимым и, более того, шуровским и в $\text{Rep } Q$.

Для доказательства этой теоремы нужны следующие 3 леммы.

Лемма 1. Пусть C — морфизм представления T в $\tilde{T}$ в $\text{Rep } Q$, т.е. $AT = \tilde{T}B$ и A, B — унитарные отображения. Тогда C является морфизмом представления T в представление $\tilde{T}$ и в $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$, т.е. $BT^* = \tilde{T}^*A$.

Доказательство. Из (2) следует, что $T^*A^* = B^*\tilde{T}^*$ или, учитывая унитарность отображений A и B , $T^*A^{-1} = B^{-1}\tilde{T}^*$. Поэтому $BT^* = \tilde{T}^*A$. $\square$

Лемма 2. Пусть C — эндоморфизм представления T в $\text{Rep } Q$, т.е. $AT = TB$ и A, B — самосопряженные операторы. Тогда C есть эндоморфизм представления T и в $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$, т.е. $T^*A = BT^*$.

Доказательство. Равенство $BT^* = T^*A$ получается из равенства $AT = TB$ сопряжением. $\square$

Если $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{C}$, то длиной строки $\vec{x}$ назовем число $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i}$. Аналогично определяется длина $|y^\downarrow|$ для столбца.

Лемма 3. Пусть $Z = [z_{ij}]_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$, $W = [w_{ij}]_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$ — матрицы над полем $\mathbb{C}$, имеющие одинаковые положительные длины $|\vec{x}|$, $|y^\downarrow|$ соответствующих строк и столбцов. Пусть $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$, $a_i > 0$, $b_j > 0$, и пусть $AZ = WB$. Тогда $Z = W$.

Формулировка и доказательство леммы 3 содержатся в [7, лемма 1].

Доказательство теоремы 1. (а) Пусть $C = (A, B)$ осуществляет эквивалентность представлений $T, \tilde{T}$ из $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$ в категории $\text{Rep } Q$, т.е. $AT = \tilde{T}B$ (A и B — обратимые матрицы). Пусть $A = XU$, $B = VY$ — полярные разложения матриц A и B , где U, V — унитарные, а X, Y — положительные невырожденные матрицы (при этом можно считать, что U, V, X, Y имеют такую же блочно-диагональную структуру, как A и B). Пусть, кроме того, $X = U_1^* \tilde{X} U_1$, $Y = V_1 \tilde{Y} V_1^*$, где U_1, V_1 — унитарные матрицы, а $\tilde{X}, \tilde{Y}$ — диагональные матрицы с положительными числами на диагонали. Тогда $U_1^* \tilde{X} U_1 U T = \tilde{T} V V_1 \tilde{Y} V_1^*$, или $\tilde{X}(U_1 U T V_1) = (U_1 \tilde{T} V V_1) \tilde{Y}$. Из предположения, что T и $\tilde{T}$ являются ортоскалярными представлениями с одинаковыми характеристиками, следует, что $\vec{T}_i \vec{T}_i^* = \vec{\tilde{T}}_i \vec{\tilde{T}}_i^* = \chi(i) I_i$, а это, в частности, означает, что длины соответствующих строк матриц $\vec{T}_i$ и $\vec{\tilde{T}}_i$, а значит, и T и $\tilde{T}$ равны (аналогичное утверждение верно и для столбцов). При допустимых унитарных преобразованиях матриц T и $\tilde{T}$ (при переходе к матрицам $U_1 U T V_1$ и $U_1 \tilde{T} V V_1$) их ортоскалярность сохраняется и характеры не меняются, так что длины соответствующих строк и столбцов матриц $U_1 U T V_1$ и $U_1 \tilde{T} V V_1$ равны и потому $U_1 U T V_1 = U_1 \tilde{T} V V_1$ (лемма 3), а тогда, после сокращений, получаем $UT = \tilde{T}V$, и T и $\tilde{T}$ эквивалентны в $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$ по лемме 1.

Пункт (b) доказан в [7, теорема 1]. $\square$

§2. Размерности неразложимых ортоскалярных представлений

С колчаном Q связана форма Титса $q(x)$ на $\mathbb{R}^{Q_v}$:

$$q(x) = \sum_{i \in Q_v} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_a} x_{t_\alpha} x_{h_\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{Q_v}.$$

Из [10] следует, что размерности неразложимых в $\text{Rep } Q$ представлений для графов и расширенных графов Дынкина совпадают с решениями уравнений $q(x) = 1$ (действительные корни) и $q(x) = 0$ (мнимые корни), $x \in \mathbb{Z}_+^{Q_v} = \{x \in \mathbb{Z}^{Q_v} \mid x \neq 0, x_i \geq 0\}$. Мнимые корни кратны минимальному мнимому положительному корню $\delta = \delta_G$.

Фиксируем нумерацию вершин в $\overset{\bullet}{Q} = \{i_1, \dots, i_m\}$ и $\overset{\circ}{Q} = \{j_1, \dots, j_n\}$ (для определенности будем считать, что узловая точка, если она одна, лежит в $\overset{\bullet}{Q}$; будем вершины из $\overset{\circ}{Q}$ обозначать также символами $i_{m+k} = j_k$, $k = 1, \dots, n$). Пусть $x \in \mathbb{R}^{Q_v}$, $x_k = x(i_k)$, где $k = 1, \dots, m+n$, c — преобразование Кокстера на $\mathbb{R}^{Q_v}$, $c = \sigma_{i_{n+m}} \cdots \sigma_{i_2} \sigma_{i_1}$, $(\sigma_{i_k}(x))_k = -x_k + \sum_{l, i_l - i_k} x_l$, $(\sigma_{i_k}(x))_l = x_l$ при $l \neq k$. Ясно, что $\sigma_i^2 = \text{id}$ при $i = 1, \dots, n+m$. Поэтому $c^{-1} = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{n+m}}$. Будем также пользоваться обозначениями $\overset{\bullet}{c} = \sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1}$, $\overset{\circ}{c} = \sigma_{i_{m+n}} \cdots \sigma_{i_{m+1}}$ и называть эти преобразования отражениями Кокстера ($\overset{\bullet}{c}^2 = \text{id}$, $\overset{\circ}{c}^2 = \text{id}$). Положим $\overset{\bullet}{c}_k = \underbrace{\overset{\circ}{c} \overset{\circ}{c} \overset{\circ}{c}}_{k \text{ раз}}$, $\overset{\circ}{c}_k = \underbrace{\overset{\bullet}{c} \overset{\bullet}{c} \overset{\bullet}{c}}_{k \text{ раз}}$, $k \in \mathbb{N}$. Вектор $x \in \mathbb{R}_+^{G_v}$ *регулярен*, если $c^t(x) \in \mathbb{R}_+^{G_v}$ при любом $t \in \mathbb{Z}$, и *сингулярен* в противном случае (терминология восходит к [11]).

Представление T колчана Q *сингулярно*, если оно неразложимо, конечномерно и его размерность d — сингулярный вектор; T *регулярно*, если T неразложимо, конечномерно и не сингулярно.

Пусть $\delta_G = (\delta_1, \dots, \delta_m, \delta_{m+1}, \dots, \delta_{m+n})$. Построим линейную форму

$$L_G(x) = \sum_{i_k \in \overset{\bullet}{G}} \delta_k x_k - \sum_{i_{m+k} \in \overset{\circ}{G}} \delta_{m+k} x_{m+k}, \quad x \in \mathbb{R}^{G_v}.$$

Справедливо следующее утверждение (см., например, [12]): пусть G — расширенный граф Дынкина; для того чтобы корень $x \in \mathbb{R}^{G_v}$ был сингулярным, необходимо и достаточно, чтобы $L_G(x) \neq 0$. Отметим, что у графа Дынкина все корни действительны и сингулярны, у расширенного графа Дынкина все мнимые корни регулярны, а действительные корни разбиваются на сингулярные и регулярные. В [13] доказана следующая лемма.

Лемма 4. Если T — неразложимое в $\text{Rep } Q$ регулярное представление колчана Q , граф G которого есть расширенный граф Дынкина, то T является шуровским представлением тогда и только тогда когда $\dim T = d \leq \delta_G$ при покомпонентном сравнении векторов.

Докажем следующее утверждение:

Лемма 5. Пусть G — расширенный граф Дынкина, а $d \in \mathbb{Z}_+^G$ — корень графа G , удовлетворяющий условию $d < \sigma_G$. Тогда d либо является неточным корнем (одна из координат нулевая), либо получается из некоторого неточного корня $\tilde{d}$ применением отражений Кокстера $\overset{\bullet}{c}$ и $\overset{\circ}{c}$.

Доказательство. Достаточно показать, что такой точный корень можно отражениями Кокстера преобразовать в неточный корень $\tilde{d}$.

Рассмотрим граф $\tilde{D}_n$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \bullet \\ \diagdown \\ c_1 \\ \bullet \\ \diagup \\ a_2 \end{array} \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-4} \quad c_{n-3} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ b_1 \\ \bullet \\ \diagdown \\ b_2 \end{array}, \quad \delta_{\tilde{D}_n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Пусть $d = (d_{a_1}, d_{a_2}, d_{c_1}, \dots, d_{c_{n-3}}, d_{b_1}, d_{b_2})$ (координаты вектора $\delta_{\tilde{D}_n}$ располагаются так же, как соответствующие вершины в графе). Так как d — точный корень, то $d_{a_1} = d_{a_2} = d_{b_1} = d_{b_2} = 1$. Назовем *отмеченным* первый индекс k , для которого $x_{c_k} = 1$ (т.е. $x_{c_1} = x_{c_2} = \dots = x_{c_{k-1}} = 2$). Пусть для определенности $c_{k-1} \in \dot{G}$. Тогда у $\dot{c}d$ координаты $x_{a_1}, x_{a_2}, x_{c_1}, \dots, x_{c_{k-2}}$ совпадают с соответствующими координатами вектора d , а $x_{c_{k-1}} = 1$, т.е. отмеченный индекс уменьшается на единицу. Применяя к $\dot{c}d$ преобразование $\dot{c}$, продолжим этот процесс. В результате мы придем к вектору, у которого отмеченный индекс равен 1, а стало быть, на следующем шаге получим вектор, у которого $x_{a_1} = x_{a_2} = 0$. Это и будет искомым неточный вектор $\tilde{d}$.

Для графов $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ результат можно получить аналогично или прямым перебором (положительных корней d , таких, что $d < \delta_G$, конечное число).

Далее, $\delta_{\tilde{A}_n} = (1, \dots, 1)$, так что из условия $d < \delta_{\tilde{A}_n}$ следует, что одна из координат нулевая и d есть неточный вектор. $\square$

§3. Функторы Кокстера и ортоскалярные представления, размерности которых суть действительные корни

Пусть $g \in Q_v$ и Π_g — простейшее представление колчана Q : $\Pi_g(g) = \mathbb{C}$, $\Pi_g(i) = 0$ при $i \neq g$, $i \in Q_v$. Ясно, что если f_g — характер представления Π_g , то $f_g(g) = 0$; будем предполагать, что $f_g(i) > 0$ при $i \neq g$.

Обозначим через $\text{Rep}(Q, d, \chi)$ категорию, объектами которой являются пары (T, χ) , где T — представление из $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$ размерности d , а χ — его фиксированный характер (значения которого однозначно определяются по T лишь на носителе Q_v^T представления T). Так как $\chi(i)I_i = \vec{T}_i \vec{T}_i^*$ либо $\chi(i)I_i = T_i^{\downarrow*} T_i^{\downarrow}$, то $\chi(i) \geq 0$. Будем предполагать, что вне Q_v^T характер χ может принимать любые положительные значения. В этом смысле объекты (T, χ) при фиксированном T зависят от $|Q_v| - |Q_v^T|$ положительных параметров. Морфизмы объекта (T, χ) в объект $(\tilde{T}, \chi)$ отождествляются с морфизмами представления T в $\tilde{T}$ в категории $\text{Rep}_{\text{os}}(Q, \mathcal{H})$.

Если $(T, \chi) \in \text{Rep}(Q, d, \chi)$ и $\chi(i_0) = 0$, $d(i_0) \neq 0$, то либо T — простейшее представление Π_{i_0} , локализованное в вершине i_0 , либо Π_{i_0} входит в T прямым слагаемым. В предположении, что T — неразложимое представление, не являющееся простейшим, из $d(i_0) \neq 0$ следует, что $\chi(i_0) > 0$.

Пусть

$$\dot{Q}_v^T = \dot{Q} \cap Q_v^T, \quad \dot{Q}_v^T = \dot{Q} \cap Q_v^T,$$

$$S = \{(d, \chi) \in \mathbb{Z}_+^{Q_v} \times \mathbb{R}_+^{Q_v} \mid d(a) + \chi(a) > 0 \text{ для } a \in Q_v\},$$

$$S_\circ = \{(d, \chi) \in S \mid \chi(a) > 0 \text{ при } a \in \dot{Q}_v^T\},$$

$$S_\bullet = \{(d, \chi) \in S \mid \chi(a) > 0 \text{ при } a \in \dot{Q}_v^T\},$$

$\text{Rep}_\circ(Q, d, \chi) \subset \text{Rep}(Q, d, \chi)$ (соответственно $\text{Rep}_\bullet(Q, d, \chi) \subset \text{Rep}(Q, d, \chi)$) — полная подкатегория, объектами которой являются пары (T, χ) с $(d, \chi) \in S_\circ$ (соответственно $(d, \chi) \in S_\bullet$).

В [2] были построены *функторы отражений Кокстера* $\overset{\circ}{F}_{d,\chi}$, $\overset{\bullet}{F}_{d,\chi}$, $\overset{\circ}{F}$, $\overset{\bullet}{F}$:
 $\overset{\circ}{F}_{d,\chi}: \text{Rep}_\circ(Q, d, \chi) \rightarrow \text{Rep}_\circ(Q, \overset{\circ}{c}(d), \overset{\circ}{\chi})$, $\overset{\bullet}{F}_{d,\chi}: \text{Rep}_\bullet(Q, d, \chi) \rightarrow \text{Rep}_\bullet(Q, \overset{\bullet}{c}(d), \overset{\bullet}{\chi})$,
 где

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{c}(d)(i) &= \begin{cases} -d(i) + \sum_{j:j-i} d(j), & i \in \overset{\circ}{Q}, \\ d(i), & i \in \overset{\bullet}{Q}, \end{cases} & \overset{\bullet}{c}(d)(i) &= \begin{cases} -d(i) + \sum_{j:j-i} d(j), & i \in \overset{\bullet}{Q}, \\ d(i), & i \in \overset{\circ}{Q}, \end{cases} \\ \overset{\circ}{\chi}(i) &= \begin{cases} -\chi(i) + \sum_{j:j-i} \chi(j), & i \in \overset{\circ}{Q}_v^T, \\ \chi(i), & i \notin \overset{\circ}{Q}_v^T, \end{cases} & \overset{\bullet}{\chi}(i) &= \begin{cases} -\chi(i) + \sum_{j:j-i} \chi(j), & i \in \overset{\circ}{Q}_v^T, \\ \chi(i), & i \notin \overset{\circ}{Q}_v^T. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Определим (см. [2]) категорию $\text{Rep}(Q, \Pi)$ следующим образом: $\text{Ob Rep}(Q, \Pi) = \coprod_{(d,\chi) \in S} \text{Ob Rep}(Q, d, \chi)$, а морфизмы между объектами из $\text{Ob Rep}(Q, d_1, \chi_1)$ и $\text{Ob Rep}(Q, d_2, \chi_2)$ совпадают с морфизмами в $\text{Rep}(Q, d_1, \chi_1)$ при $(d_1, \chi_1) = (d_2, \chi_2)$ и отсутствуют при $(d_1, \chi_1) \neq (d_2, \chi_2)$. Определим полные подкатегории $\text{Rep}_\circ(Q, \Pi)$ и $\text{Rep}_\bullet(Q, \Pi)$ в $\text{Rep}(Q, \Pi)$. Множество объектов категории $\text{Rep}_\circ(Q, \Pi)$ есть $\coprod_{(d,\chi) \in S_\circ} \text{Ob Rep}(Q, d, \chi)$, а множество объектов категории $\text{Rep}_\bullet(Q, \Pi)$ есть $\coprod_{(d,\chi) \in S_\bullet} \text{Ob Rep}(Q, d, \chi)$. Функторы $\overset{\circ}{F}_{d,\chi}$ ($\overset{\bullet}{F}_{d,\chi}$) естественным образом порождают функторы $\overset{\circ}{F}$ ($\overset{\bullet}{F}$) четных (нечетных) отражений Кокстера,

$$\overset{\circ}{F}: \text{Rep}_\circ(Q, \Pi) \rightarrow \text{Rep}_\circ(Q, \Pi), \quad \overset{\bullet}{F}: \text{Rep}_\bullet(Q, \Pi) \rightarrow \text{Rep}_\bullet(Q, \Pi),$$

осуществляющих эквивалентность каждой из категорий в себя.

$$\text{Положим } \overset{\circ}{F}_k = \underbrace{\overset{\circ}{F}\overset{\circ}{F}\overset{\circ}{F}}_{k \text{ раз}}, \quad \overset{\bullet}{F}_k = \underbrace{\overset{\bullet}{F}\overset{\circ}{F}\overset{\circ}{F}}_{k \text{ раз}}.$$

Замечание 1. В [2] функторы отражений Кокстера вводятся в предположении, что граф G колчана Q не содержит циклов. Конструкция функторов $\overset{\circ}{F}$, $\overset{\bullet}{F}$ практически без изменений переносится на все разделенные однократные колчаны, и для них имеют место формулы (8), (9).

Пусть $Q_v^d = \{i \in Q_v \mid d(i) \neq 0\}$, Q^d — полный подколчан в Q с множеством вершин Q_v^d , $\hat{d} = \{d(i)\}_{i \in Q_v^d}$. Пусть $\text{Ind } Q^d$ — множество классов $[T]$ точных неразложимых ортоскалярных унитарно эквивалентных представлений T колчана Q^d размерности $\hat{d}$ в $\text{Rep}_{\text{os}}(Q^d, \mathcal{H})$, а $\text{Ind}(Q, d)$ — множество классов $[T, \chi]$ точных неразложимых эквивалентных объектов размерности d в категории $\text{Rep}(Q, \Pi)$. Если d — точный вектор, то $Q^d = Q$ и множества $\text{Ind}(Q, d)$ и $\text{Ind } Q$ естественным образом отождествляются. Если $(T, \chi) \in \text{Rep}(Q, d, \chi)$, то, отождествляя класс $[T, \chi]$ с парой $([T], (\chi(a))_{a \in Q_v \setminus Q_v^d})$, получаем, что $\text{Ind}(Q, d) = \text{Ind } Q^d \times \mathbb{R}_{>0}^{Q_v \setminus Q_v^d}$.

Пусть Q — разделенный однократный колчан, граф G которого есть расширенный граф Дынкина, T — его точное неразложимое ортоскалярное представление размерности $d = (d(i))_{i \in Q_v}$ ($d(i) > 0$) с характером $\chi = (\chi(i))_{i \in Q_v}$.

Предположим, что d — действительный корень графа G . Рассмотрим 2 случая: d есть либо сингулярный корень, либо регулярный.

1) Пусть d — сингулярный действительный корень графа G ; тогда d получается из некоторого простейшего корня d_g ($d_g(a) = 0$, $a \neq g$, $d_g(g) = 1$) отражениями Кокстера. Если предположить для определенности, что $g \in \overset{\circ}{G}$, то $d = \overset{\circ}{c}_k d_g$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и для некоторого фиксированного характера $f_g(i)$ представления Π_g функтор $\overset{\circ}{F}_k: \text{Rep}_\circ(Q, d_g, f_g) \rightarrow \text{Rep}_\circ(Q, d, \chi)$ переводит объект (Π_g, f_g) в объект (T, χ) . Так как $\overset{\circ}{F}_k$ — функтор эквивалентности категорий $\text{Rep}_\circ(Q, d_g, f_g)$ и $\text{Rep}_\circ(Q, d, \chi)$, то этим определяется взаимно однозначное отображение

$$\phi: \mathbb{R}_{>0}^{Q_v \setminus \{0\}} \longrightarrow \text{Ind}(Q, d) = \text{Ind } Q,$$

и в этом смысле точные неразложимые ортоскалярные представления размерности d (определенные с точностью до унитарной эквивалентности) зависят от $|Q_v| - 1$ положительных параметров.

2) Пусть d — регулярный действительный корень графа G , являющийся размерностью неразложимого точного ортоскалярного представления T колчана Q . Тогда d получается из неточного корня d' отражениями Кокстера $\overset{\circ}{c}$ и $\overset{\bullet}{c}$ (см. леммы 4, 5). Пусть для определенности $d = \overset{\circ}{c}_k d'$ и k нечетное. Тогда (T, χ) получается из некоторого неточного неразложимого объекта (T', χ') с помощью функторов отражений Кокстера $\overset{\circ}{F}$ и $\overset{\bullet}{F}$ ($d' = \overset{\bullet}{c}_k d$ и $(T', \chi') = \overset{\bullet}{F}_k(T, \chi)$). T' есть точное представление колчана $Q^{d'}$ размерности $\hat{d}' = \{d'(i)\}_{i \in Q_v^{d'}}$. Вектор $\hat{d}'$ есть сингулярный корень графа $G^{d'}$, соответствующего колчану $Q^{d'}$ (так как $G^{d'}$ есть граф Дынкина — все его корни сингулярны). Следуя изложенному в п. 1), получаем, что функторы Кокстера в категории $\text{Rep}(Q^{d'}, \Pi)$ определяют взаимно однозначное отображение

$$\phi_1: \mathbb{R}_{>0}^{Q_v^{d'} \setminus \{0\}} \longrightarrow \text{Ind}(Q^{d'}, d') = \text{Ind } Q^{d'},$$

а функторы Кокстера в категории $\text{Rep}(Q, \Pi)$ — взаимно однозначное отображение

$$\psi: \text{Ind } Q^{d'} \times \mathbb{R}_{>0}^{Q_v \setminus Q_v^{d'}} \longrightarrow \text{Ind}(Q, d).$$

В результате получаем взаимно однозначное отображение

$$\phi: \mathbb{R}_{>0}^{Q_v^{d'} \setminus \{0\}} \times \mathbb{R}_{>0}^{Q_v \setminus Q_v^{d'}} \longrightarrow \text{Ind}(Q, d) = \text{Ind } Q,$$

и в этом смысле точные неразложимые ортоскалярные представления размерности d (определенные с точностью до унитарной эквивалентности) зависят от $|Q_v| - 1$ положительных параметров.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть Q — разделенный однократный колчан, граф G которого есть расширенный граф Дынкина, а d — его точный действительный корень. Тогда построенное с помощью функторов отражений Кокстера $\overset{\circ}{F}$ и $\overset{\bullet}{F}$ отображение

$$\phi: \mathbb{R}_{>0}^{Q_v \setminus \{0\}} \longrightarrow \text{Ind}(Q, d)$$

есть биекция, и в этом смысле точные неразложимые ортоскалярные представления размерности d колчана Q зависят от $|Q_v| - 1$ положительных параметров.

Заметим, что в доказательстве теоремы 2 фактически содержится алгоритм получения таких представлений из простейших с помощью функторов Кокстера.

§ 4. Ортоскалярные представления, размерности которых суть мнимые корни

Пусть Q — разделенный однократный колчан, граф G которого есть расширенный граф Дынкина. Из теоремы 1 и леммы 4 следует, что единственный мнимый корень, который может быть размерностью неразложимого ортоскалярного представления колчана Q , — это δ_G .

Докажем теорему аналогичную теореме 2, но относящуюся к мнимым корням графа G (заметим, что в случае $\chi_T = \delta_G$ для графов $\tilde{D}_4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ на другом языке и другими методами унитарная классификация неразложимых представлений получена в [14]–[16]).

Теорема 3. *Если Q — разделенный однократный колчан, граф G которого есть расширенный граф Дынкина, то в размерности δ_G неразложимые ортоскалярные представления колчана Q зависят от $|Q_v| + 1$ положительных параметров.*

Теорему докажем фактическим описанием всех неразложимых представлений указанных колчанов в размерностях δ_G .

а) Пусть $G = \tilde{A}_n$ — цикл с n вершинами. Из предположения о разделенности и однократности колчана следует, что n четное и $n \geq 4$. Известно, что $\delta_{\tilde{A}_n} = (1, \dots, 1)$. Представление T в размерности $\delta_{\tilde{A}_n}$ задается n ненулевыми комплексными числами. Переходом к унитарно эквивалентному представлению $n - 1$ чисел можно сделать положительными ($|Q_v| - 1$ параметров); допустимые преобразования, не меняющие значения этих параметров, не меняют и n -е число (зависящее от двух положительных параметров — аргумента и модуля). Таким образом, T зависит от n параметров, принимающих произвольные положительные значения, и одного параметра ϕ , принимающего значения на отрезке $(0, 2\pi]$, т. е. от $|Q_v| + 1 = n + 1$ параметров.

б) Пусть $G = \tilde{D}_n$, $n \geq 4$ (см. (7)). Пусть T — неразложимое ортоскалярное представление размерности $\delta_{\tilde{D}_n}$ соответствующего разделенного колчана Q .

Для определенности будем считать, что $c_1 \in \dot{Q}$.

Положим $A_1 = T_{c_1, a_1}$, $A_2 = T_{c_1, a_2}$, $X_1 = T_{c_1, c_2}$, $X_2 = T_{c_3, c_2}, \dots$, $B_1 = T_{c_{n-3}, b_1}$, $B_2 = T_{c_{n-3}, b_2}$ при четном n и $B_1 = T_{b_1, c_{n-3}}$, $B_2 = T_{b_2, c_{n-3}}$ при нечетном n .

Рассмотрим случай четного n . При $n = 4$ ортоскалярные неразложимые представления колчана Q в размерности $\delta_{\tilde{D}_4}$ зависят (см. [7]) от $6 = |Q_v| + 1$ положительных параметров.

Пусть $n > 4$. Допустимыми (унитарными) преобразованиями матриц представления матрицы $X_1, \dots, X_{n-4}$ можно диагонализировать так, чтобы на диагоналях стояли неотрицательные числа. Пусть $A = [A_1 | A_2]$, $X_i = \begin{bmatrix} x_i & 0 \\ 0 & y_i \end{bmatrix}$,

$i = 1, \dots, n-4$, $B = [B_1 \mid B_2]$. Тогда из ортоскалярности представления T следует, что матрицы AA^* и BB^* также диагональны. Пусть $AA^* = \begin{bmatrix} x_0^2 & 0 \\ 0 & y_0^2 \end{bmatrix}$, $BB^* = \begin{bmatrix} x_{n-3}^2 & 0 \\ 0 & y_{n-3}^2 \end{bmatrix}$. Тогда $\begin{bmatrix} x_i^2 & 0 \\ 0 & y_i^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{i+1}^2 & 0 \\ 0 & y_{i+1}^2 \end{bmatrix} = \chi(c_{i+1})I_{c_{i+1}}$, $i = 0, \dots, n-4$, и потому $x_i^2 + x_{i+1}^2 = y_i^2 + y_{i+1}^2$, а значит,

$$y_{i+1}^2 = x_{i+1}^2 + (-1)^i(x_0^2 - y_0^2), \quad i = 0, \dots, n-4. \quad (10)$$

Если $x_0^2 = y_0^2$ (либо $x_j^2 = y_j^2$ для любого фиксированного j), то из (10) следует, что $x_i^2 = y_i^2$ для $i = 0, \dots, n-3$. В этом случае матрица $[A_1 \mid A_2 \mid B_1 \mid B_2]$ задает ортоскалярное представление $\hat{T}$ колчана $\hat{Q}$, соответствующего графу $\tilde{D}_4$, и при переходе к эквивалентному представлению колчана Q , не меняющем приведенного вида матриц X_i , мы получаем переход к представлению колчана $\hat{Q}$, эквивалентному представлению $\hat{T}$. Такие представления колчана $\hat{Q}$, как мы отметили выше, зависят не более чем от 6 параметров. Соответствующие представления колчана Q (с учетом параметров $x_1, \dots, x_{n-4}$ и соотношения (10)) зависят не более чем от $6 + (n-4) = n+2 = |Q_v| + 1$ параметров.

Пусть $x_i \neq y_i$ при $i = 0, \dots, n-3$ и $(U_i)_{i \in G_v}$ осуществляют эквивалентность представления T с ортоскалярным представлением $\tilde{T}$, для которого $\tilde{X}_i = X_i$, $i = 0, \dots, n-4$ (U_i — унитарные матрицы). В этом случае легко убедиться, что $U_i = \begin{bmatrix} u_i & 0 \\ 0 & v_i \end{bmatrix}$ и в матрице $[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ можно все элементы, кроме двух, для определенности b_{21} и b_{22} , сделать действительными и параметризовать следующим образом:

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} x_0 \cos \phi_1 & x_0 \sin \phi_1 & x_{n-3} \cos \phi_2 & x_{n-3} \sin \phi_2 \\ y_0 \sin \phi_1 & -y_0 \cos \phi_1 & y_{n-3} \sin \phi_2 e^{i\theta} & -y_{n-3} \cos \phi_2 e^{i\theta} \end{bmatrix}.$$

Такие представления зависят от $n+2 = |Q_v| + 1$ положительных параметров $x_0, x_1, \dots, x_{n-3}, y_0, \phi_1, \phi_2, \theta$.

Случай нечетного n изучается аналогично с заменой матрицы $[A_1 \mid A_2 \mid B_1 \mid B_2]$ на матрицу $[A_1 \mid A_2 \mid B_1^* \mid B_2^*]$

с) Пусть $G = \tilde{E}_6$; соответствующий разделенный колчан Q имеет вид

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow b_1 \\ \circ \\ \uparrow b_2 \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \\ a_1 \quad a_2 \quad z \quad c_2 \quad c_1 \end{array}, \quad \delta_{\tilde{E}_6} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Пусть T — неразложимое ортоскалярное представление колчана Q в размерности $\delta_{\tilde{E}_6}$,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & C_1 \\ \hline 0 & B_1 & 0 \\ \hline A_1 & 0 & 0 \\ \hline A_2 & B_2 & C_2 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{l} D = [A_2 \ B_2 \ C_2], \quad A_2 = [a_{ij}]_{j=1,2}^{i=1,2,3}, \\ B_2 = [b_{ij}]_{j=1,2}^{i=1,2,3}, \quad C_2 = [c_{ij}]_{j=1,2}^{i=1,2,3}. \end{array}$$

Здесь $A_1 = T_{a_1, a_2}$, $B_1 = T_{b_1, b_2}$, $C_1 = T_{c_1, c_2}$, $A_2 = T_{z, a_2}$, $B_2 = T_{z, b_2}$, $C_2 = T_{z, c_2}$.

Унитарными преобразованиями столбцов приведем A_1 к виду $[0 \ x_0]$, $x_0 > 0$.

Унитарными преобразованиями строк матрицу A_2 приведем к виду $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \\ 0 & a_{32} \end{bmatrix}$, $a_{11} > 0$. Из ортогональности столбцов в $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ следует, что $a_{12} = 0$.

Унитарными преобразованиями столбцов (не меняя A_2) можно добиться, чтобы $b_{11} = 0$, $c_{11} = 0$; при этом $b_{12} \neq 0$, $c_{12} \neq 0$ — в противном случае можно проверить, что представление разложимо; допустимыми преобразованиями можно сделать b_{12} и c_{12} положительными. Унитарными преобразованиями двух последних строк матрицы D можно сделать так, чтобы $b_{22} = 0$, а тогда из ортогональности первых двух строк получим, что $c_{22} = 0$. Итак,

$$D = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{11} & 0 & 0 & b_{12} & 0 & c_{12} \\ 0 & a_{22} & b_{21} & 0 & c_{21} & 0 \\ 0 & a_{32} & b_{31} & b_{32} & c_{31} & c_{32} \end{array} \right].$$

Значения характера $\chi(i)$ ($i \in Q_v$) связаны соотношением $\chi(a_1) + \chi(b_1) + \chi(c_1) + 3\chi(z) = 2(\chi(a_2) + \chi(b_2) + \chi(c_2))$ (следует сумму квадратов модулей матричных элементов матрицы T подсчитать двумя способами — сначала складывая эти квадраты модулей по строкам, а потом по столбцам). Перейдем к нормированному представлению с характером χ , для которого $\chi(z) = 1$, поделив все матрицы представления на одно и то же число $\sqrt{\chi(z)}$. Нормировка представления уменьшает минимальное числа параметров, от которых зависит представление, на единицу.

Вектор (a_{11}, b_{12}, c_{12}) , поскольку $a_{11}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2 = 1$, допускает параметризацию: $(a_{11}, b_{12}, c_{12}) = (\sin \psi_1, \sin \phi_1 \cos \psi_1, \cos \phi_1 \cos \psi_1)$. Так как первая и третья строки матрицы D ортогональны, то $(b_{32}, c_{32}) = (\cos \phi_1, -\sin \phi_1)x$, где $x \in \mathbb{C}$. Домножением третьей строки матрицы D на число вида $e^{i\phi}$ (унитарное преобразование строк) сделаем элемент x положительным, а потом аналогичным домножением пятого столбца на число сделаем элемент c_{31} неотрицательным. Домножением второй строки матрицы D на число сделаем элемент c_{21} неотрицательным, а потом домножением второго и третьего столбцов — элементы a_{22} и b_{21} неотрицательными. Так как $a_{22}^2 + b_{21}^2 + c_{21}^2 = 1$, то вектор (a_{22}, b_{21}, c_{21}) допускает параметризацию: $(a_{22}, b_{21}, c_{21}) = (\cos \phi_2 \cos \psi_2, \sin \phi_2 \cos \psi_2, \sin \psi_2)$. Элементы a_{32} , b_{31} остаются, вообще говоря, комплексными. Пусть

$$a_{32}\bar{a}_{32} + b_{31}\bar{b}_{31} + c_{31}^2 = \sin^2 \psi_3, \quad b_{32}\bar{b}_{32} + c_{31}^2 = \cos^2 \psi_3. \quad (11)$$

Учитывая ортогональность первой и третьей строк матрицы D и соотношения (11), векторы (b_{32}, c_{32}) и (a_{32}, b_{31}, c_{31}) можно параметризовать так:

$$\begin{aligned} (b_{32}, c_{32}) &= (-\cos \phi_1 \cos \psi_3, \sin \phi_1 \cos \psi_3), \\ (a_{32}, b_{31}, c_{31}) &= (\cos \phi_3 \cos \psi_4 \sin \psi_3 e^{i\theta_1}, \sin \phi_3 \cos \psi_4 \sin \psi_3 e^{i\theta_2}, \sin \psi_4 \sin \psi_3). \end{aligned}$$

Таким образом, матрица D , которую мы будем называть *основой представления*, зависит от 9 действительных параметров $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \theta_1, \theta_2$. Из ортоскалярности представления следует ортонормированность строк в D . Ортогональность второй и третьей строк дает $\cos \phi_2 \cos \phi_3 \cos \psi_2 \sin \psi_3 \cos \psi_4 e^{i\theta_1} + \sin \phi_2 \sin \phi_3 \cos \psi_2 \sin \psi_3 \cos \psi_4 e^{i\theta_2} + \sin \psi_2 \sin \psi_3 \sin \psi_4 = 0$, откуда получаем два

«действительных» соотношения — равенство нулю действительной и мнимой части. Следовательно, из указанных параметров два можно исключить.

Пусть $A_1 = [0 \ x_1]$, $B_1 = [b_{01} \ b_{02}]$, $C_1 = [c_{01} \ c_{02}]$. Унитарными преобразованиями строк элементы b_{01} и c_{01} можно сделать действительными неотрицательными — пусть $b_{01} = y_0$, $b_{02} = y_1 e^{i\theta}$.

Покажем, что тогда основой D ортоскалярное представление T определяется однозначно.

Из условий ортоскалярности вытекает, что $x_0^2 + a_{22}^2 + a_{32}\bar{a}_{32} = a_{11}^2$, так что x_0 по основе представления определяется однозначно. Также имеем $b_{01}^2 + b_{21}^2 + |b_{31}|^2 = |b_{02}|^2 + b_{12}^2 + b_{32}^2$, так что $b_{01}^2 - |b_{02}|^2 = b_{12}^2 + b_{32}^2 - b_{21}^2 - |b_{31}|^2 = s$, и $b_{01}b_{02} + \bar{b}_{31}b_{32} = 0$, так что $b_{01}b_{02} = b_{01}|b_{02}|e^{i\theta} = -|b_{31}|e^{i\theta_2}b_{32}$. Поэтому $e^{i\theta} = -e^{i\theta_2}$ и $b_{01}^2(-|b_{02}|^2) = -|b_{31}|b_{32} = -t$, где $t > 0$. Стало быть, числа b_{01}^2 и $-|b_{02}|^2$ суть корни квадратного уравнения $z^2 - s \cdot z - t = 0$, $t > 0$. Уравнение имеет два действительных корня разного знака; таким образом, b_{01} и b_{02} определяются основой представления однозначно.

Аналогично по основе представления однозначно определяются и числа c_{01} , c_{02} . Стало быть, в размерности $\delta_{\tilde{E}_6}$ неразложимые нормированные ортоскалярные представления зависят от 7 независимых параметров, а неразложимые (не обязательно нормированные) — от $8 = |Q_v| + 1$ независимых параметров.

д) Пусть $G = \tilde{E}_7$; соответствующий разделенный колчан Q имеет вид

T — неразложимое ортоскалярное представление колчана Q в размерности $\delta_{\tilde{E}_7}$.

$T = [A_{ij}]_{j=1,\dots,5}^{i=1,2,3} = [a_{ij}]_{j=1,\dots,10}^{i=1,\dots,8}$, $A_{11} = T_{a_2, a_1}$, $A_{12} = T_{a_2, a_3}$, $A_{22} = T_{z, a_3}$, $A_{23} = T_{z, c_1}$, $A_{24} = T_{z, b_3}$, $A_{34} = T_{b_2, b_3}$, $A_{35} = T_{b_2, b_1}$, остальные блоки нулевые.

Допустимыми унитарными преобразованиями строк и столбцов некоторые из элементов матрицы T преобразуем в нули, некоторые из элементов станут равными нулю в силу ортогональности строк и столбцов внутри полос.

Символ $\bar{0}_k$ на каком-либо месте матрицы T будет означать, что на этом месте может быть получен нуль на k -м шаге унитарными преобразованиями столбцов вертикальной полосы, $0|_k$ — строк горизонтальной полосы, $\vec{0}_k$ — нуль получен в силу ортогональности столбцов вертикальной полосы, $0\downarrow_k$ — в силу ортогональности строк. При этом, делая нули на k -м шаге, мы не «портим» нули, полученные ранее. Умножением строк и столбцов на числа вида $e^{i\phi}$ (унитарные преобразования) некоторые из элементов можно сделать действительными неотрицательными, и мы на это укажем прямо в матрице ($a_{ij} \geq 0$ либо $a_{ij} \leq 0$). Мы указываем на строгое сравнение ($a_{ij} > 0$ либо $a_{ij} < 0$), если из равенства элемента a_{ij} нулю следует разложимость представления. В результате мы получим следующие значения элементов матрицы T : $a_{11} \geq 0$, $a_{12} = 0|_{11}$, $a_{13} \geq 0$, $a_{14} \leq 0$, $a_{21} \geq 0$, $a_{22} > 0$, $a_{23} \leq 0$, $a_{24} = \vec{0}_{12}$, $a_{32} > 0$, $a_{33} = \bar{0}_2$, $a_{34} = \bar{0}_2$, $a_{35} > 0$, $a_{36} = \bar{0}_2$, $a_{37} = \bar{0}_{|1}$, $a_{38} = \bar{0}_{|1}$, $a_{39} > 0$, $a_{42} > 0$, $a_{43} \geq 0$, $a_{44} = \bar{0}_6$, $a_{45} < 0$, $a_{46} = \vec{0}_5$, $a_{47} > 0$, $a_{48} = \bar{0}_6$, $a_{49} = \bar{0}_{|1}$, $a_{52} = 0|_3$, $a_{53} \geq 0$, $a_{54} \geq 0$,

$a_{55} = 0 \downarrow_4$, $a_{56} \geq 0$, $a_{57} \leq 0$, $a_{58} \geq 0$, $a_{59} = \bar{0}|_1$, $a_{62} = 0|_3$, $a_{63} = 0|_7$, $a_{64} \geq 0$, $a_{65} = 0 \downarrow_4$, $a_{66} \in \mathbb{C}$, $a_{67} = 0 \downarrow_8$, $a_{68} \in \mathbb{C}$, $a_{69} = \bar{0}|_1$, $a_{77} = 0|_9$, $a_{78} \geq 0$, $a_{79} = \vec{0}|_{10}$, $a_{7,10} \geq 0$, $a_{87} \geq 0$, $a_{88} \geq 0$, $a_{89} = \vec{0}|_9$, $a_{8,10} \leq 0$. Остальные элементы изначально были равны 0. Нормируем представление T (будем считать, что $\chi(z) = 1$). Тогда матрицу $D = [A_{22} \ A_{23} \ A_{24}]$ (будем называть ее основой представления) можно параметризовать следующим образом:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ \sin \phi_1 \cos \psi_2 & \cos \phi_2 \sin \psi_2 & 0 \\ 0 & \sin \phi_2 \cos \psi_4 & \cos \phi_3 \cos \psi_3 \sin \psi_4 \\ 0 & 0 & \sin \phi_4 \sin \psi_5 \end{bmatrix},$$

$$[A_{23} \ | \ A_{24}] = \left[\begin{array}{cc|cc} \sin \phi_1 \cos \psi_1 & 0 & 0 & 0 & \sin \psi_1 \\ -\cos \phi_1 \cos \psi_2 & 0 & \sin \phi_2 \sin \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi_3 \cos \psi_3 \sin \psi_4 & -\cos \phi_2 \cos \psi_4 & \sin \psi_3 \sin \phi_4 & 0 \\ 0 & \cos \phi_4 \sin \psi_5 e^{i\theta_1} & 0 & \cos \psi_5 e^{i\theta_2} & 0 \end{array} \right].$$

Из ортогональности третьей и четвертой строк матрицы D следует, что

$$\cos \phi_3 \sin \phi_4 \cos \psi_3 \sin \psi_4 \sin \psi_5 + \sin \phi_3 \cos \phi_4 \cos \psi_3 \sin \psi_4 \sin \psi_5 e^{i\theta_1} + \sin \psi_3 \sin \psi_4 \cos \psi_5 e^{i\theta_2} = 0.$$

Это соотношение эквивалентно двум действительным. Из равенства длин столбцов матрицы A_{23} следует, что

$$\sin^2 \phi_2 \cos^2 \psi_1 + \cos^2 \phi_1 \cos^2 \psi_2 = \sin^2 \phi_3 \cos^2 \psi_3 \sin^2 \psi_4 + \cos^2 \phi_4 \sin^2 \psi_5,$$

так что из 11 параметров ϕ_1 – ϕ_4 , ψ_1 – ψ_5 , θ_1 , θ_2 независимыми являются 8.

Легко видеть, что по основе D представления T матрицы A_{11} , A_{12} , A_{34} , A_{35} (ранее частично приведенные) находятся однозначно.

Так, из ортоскалярности столбцов матрицы $\begin{bmatrix} A_{24} \\ A_{34} \end{bmatrix}$ следует, что

$$a_{87}^2 + a_{47}^2 + a_{54}^2 = a_{39}^2, \quad a_{87}a_{88} + a_{54}a_{58} = 0, \quad a_{78}^2 + a_{88}^2 + a_{58}^2 + a_{68}\overline{a_{68}} = a_{39}^2.$$

Отсюда последовательно и однозначно находятся элементы a_{87} , a_{88} , a_{78} . Из ортоскалярности строк матрицы $[A_{34} \ A_{35}]$ вытекает, что $a_{78}^2 + a_{7,10}^2 = a_{87}^2 + a_{88}^2 + a_{8,10}^2$, $a_{78}a_{88} + a_{7,10}a_{8,10} = 0$, откуда находятся элементы $a_{7,10}$ и $a_{8,10}$.

Параметризуем столбцы матрицы $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$ следующим образом:

$$\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & x \sin \alpha_2 \sin \beta_2 & -x \sin \beta_3 \\ x \sin \beta_1 & -x \cos \alpha_2 \sin \beta_2 & 0 \\ \hline x \cos \alpha_1 \cos \beta_1 & 0 & 0 \\ x \sin \alpha_1 \cos \beta_1 & x \sin \alpha_3 \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & x \cos \alpha_3 \cos \beta_2 & x \sin \alpha_4 \cos \beta_3 \\ 0 & 0 & x \cos \alpha_4 \cos \beta_3 \end{array} \right];$$

здесь $x > 0$.

Покажем, что элементы матрицы A_{12} элементами матрицы A_{22} определяются однозначно. Так как $x \cos \alpha_1 \cos \beta_1 = a_{32}$, $x \sin \alpha_1 \cos \beta_1 = a_{42}$, то $x^2 \cos^2 \beta_1 =$

$a_{32}^2 + a_{42}^2$. Аналогично, $x^2 \cos^2 \beta_2 = a_{43}^2 + a_{53}^2$ и $x^2 \cos^2 \beta_3 = a_{54}^2 + a_{64}^2$. Следовательно, $x \sin \beta_1 = \sqrt{x^2 - (a_{32}^2 + a_{42}^2)}$, $x \sin \beta_2 = \sqrt{x^2 - (a_{43}^2 + a_{53}^2)}$, $x \sin \beta_3 = \sqrt{x^2 - (a_{54}^2 + a_{64}^2)}$. Из ортогональности столбцов матрицы $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$ следует, что

$$-x^2 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \alpha_2 + a_{42} a_{43} = 0, \quad -x^2 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \alpha_2 + a_{53} a_{54} = 0;$$

из этих равенств находятся $\cos \alpha_2$ и $\sin \alpha_2$.

Значение $x = \chi(a_3)$ определяется по основе представления однозначно: если A_{22} унитарно эквивалентна матрице $\text{diag}\{r_1, r_2, r_3\}$, $r_i \geq 0$, то $x = \max_i r_i$ (это легко получить, диагонализировав матрицы A_{12} , A_{22} унитарными преобразованиями, при этом существенно используется ортоскалярность представления). Элементы a_{11} , a_{21} однозначно находятся по матрице A_{12} (аналогично тому, как находятся элементы $a_{7,10}$, $a_{8,10}$ по матрице A_{34}).

Стало быть, (ненормированные) неразложимые ортоскалярные представления в размерности $\delta_{\tilde{E}_8}$ зависят от $9 = |Q_v| + 1$ независимых параметров.

е) Пусть $G = \tilde{E}_8$; соответствующий разделенный колчан имеет вид

Как известно, $\delta_{\tilde{E}_8} = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2$.

Пусть T — неразложимое ортоскалярное представление колчана Q в размерности $\delta_{\tilde{E}_8}$, $T = [A_{ij}]_{j=1, \dots, 5}^{i=1, \dots, 4} = [a_{ij}]_{j=1, \dots, 16}^{i=1, \dots, 14}$, где $A_{11} = T_{a_2, a_1}$, $A_{12} = T_{a_2, a_3}$, $A_{22} = T_{a_4, a_3}$, $A_{23} = T_{a_4, a_5}$, $A_{33} = T_{z, a_5}$, $A_{34} = T_{z, c_1}$, $A_{35} = T_{z, b_2}$, $A_{45} = T_{b_1, b_2}$; остальные блоки равны нулю. Следуя предыдущим договоренностям об обозначениях, матрицу T можно привести к виду, при котором $a_{11} > 0$, $a_{12} > 0$, $a_{13} = \vec{0}_{26}$, $a_{14} = \vec{0}_{26}$, $a_{21} = 0 \downarrow_{27}$, $a_{22} = 0 \downarrow_{25}$, $a_{23} > 0$, $a_{24} < 0$, $a_{32} > 0$, $a_{33} = \vec{0}_{21}$, $a_{34} = \vec{0}_{21}$, $a_{35} > 0$, $a_{36} = \vec{0}_{17}$, $a_{37} = \vec{0}_{17}$, $a_{38} = \vec{0}_{17}$, $a_{39} = \vec{0}_{17}$, $a_{42} = 0 \downarrow_{22}$, $a_{43} > 0$, $a_{44} = \vec{0}_{23}$, $a_{45} = 0 \downarrow_{16}$, $a_{46} > 0$, $a_{47} < 0$, $a_{48} = \vec{0}_{19}$, $a_{49} = \vec{0}_{19}$, $a_{52} = 0 \downarrow_{22}$, $a_{53} > 0$, $a_{54} > 0$, $a_{55} = 0 \downarrow_{16}$, $a_{56} = 0 \downarrow_{18}$, $a_{57} > 0$, $a_{58} < 0$, $a_{59} = \vec{0}_{21}$, $a_{62} = 0 \downarrow_{22}$, $a_{63} = 0 \downarrow_{24}$, $a_{64} > 0$, $a_{65} = 0 \downarrow_{16}$, $a_{66} = 0 \downarrow_{18}$, $a_{67} = 0 \downarrow_{20}$, $a_{68} > 0$, $a_{69} < 0$, $a_{75} > 0$, $a_{76} = \vec{0}_1$, $a_{77} = \vec{0}_1$, $a_{78} = \vec{0}_1$, $a_{79} = \vec{0}_1$, $a_{7,10} > 0$, $a_{7,11} = \vec{0}_2$, $a_{7,12} = \vec{0}_2$, $a_{7,13} > 0$, $a_{7,14} = \vec{0}_2$, $a_{7,15} = \vec{0}_2$, $a_{7,16} = \vec{0}_2$, $a_{85} = \vec{0}_1$, $a_{86} \geq 0$, $a_{87} = \vec{0}_6$, $a_{88} = \vec{0}_6$, $a_{89} = \vec{0}_6$, $a_{8,10} > 0$, $a_{8,11} = \vec{0}_6$, $a_{8,12} = \vec{0}_6$, $a_{8,13} < 0$, $a_{8,14} > 0$, $a_{8,15} = \vec{0}_6$, $a_{8,16} = \vec{0}_6$, $a_{95} = \vec{0}_1$, $a_{96} \geq 0$, $a_{97} \geq 0$, $a_{98} = \vec{0}_7$, $a_{99} = \vec{0}_7$, $a_{9,10} = 0 \downarrow_3$, $a_{9,11} > 0$, $a_{9,12} = \vec{0}_7$, $a_{9,13} = 0 \downarrow_4$, $a_{9,14} < 0$, $a_{9,15} = \vec{0}_9$, $a_{9,16} = \vec{0}_9$, $a_{10,5} = \vec{0}_1$, $a_{10,6} = 0 \downarrow_7$, $a_{10,7} \geq 0$, $a_{10,8} \geq 0$, $a_{10,9} = \vec{0}_{11}$, $a_{10,10} = 0 \downarrow_3$, $a_{10,11} < 0$, $a_{10,12} = \vec{0}_{13}$, $a_{10,13} = 0 \downarrow_4$, $a_{10,14} = 0 \downarrow_8$, $a_{10,15} > 0$, $a_{10,16} = \vec{0}_{14}$, $a_{11,5} = \vec{0}_1$, $a_{11,6} = 0 \downarrow_7$, $a_{11,7} = 0 \downarrow_{10}$, $a_{11,8} \geq 0$, $a_{11,9} \geq 0$, $a_{11,10} = 0 \downarrow_3$, $a_{11,11} = 0 \downarrow_{14}$, $a_{11,12} \geq 0$, $a_{11,13} = 0 \downarrow_4$, $a_{11,14} = 0 \downarrow_8$, $a_{11,15} < 0$, $a_{11,16} \geq 0$, $a_{12,5} = \vec{0}_1$, $a_{12,6} = 0 \downarrow_7$, $a_{12,7} = 0 \downarrow_{10}$, $a_{12,8} = 0$, $a_{12,9} \geq 0$, $a_{12,10} = 0 \downarrow_3$, $a_{12,11} = 0 \downarrow_{14}$, $a_{12,12} \in \mathbb{C}$, $a_{12,13} = 0 \downarrow_4$, $a_{12,14} = 0 \downarrow_8$, $a_{12,15} = 0 \downarrow_{15}$,

$a_{12,16} \in \mathbb{C}$, $a_{13,13} > 0$, $a_{13,14} > 0$, $a_{13,15} = \bar{0}_5$, $a_{13,16} = \bar{0}_5$, $a_{14,13} = 0|_5$, $a_{14,14} = 0|_5$, $a_{14,15} > 0$, $a_{14,16} > 0$.

Назовем основой представления матрицу $D = \begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & A_{45} \end{bmatrix}$. Ее можно параметризовать следующим образом: $a_{75} = \sin \psi_1$, $a_{7,10} = \cos \phi_1 \cos \psi_1$, $a_{7,13} = \sin \phi_1 \cos \psi_1$, $a_{86} = \sin \phi_2 \sin \psi_2$, $a_{8,10} = \sin \phi_1 \cos \psi_2$, $a_{8,13} = -\cos \phi_1 \cos \psi_2$, $a_{8,14} = \cos \phi_2 \sin \psi_2$, $a_{96} = \cos \phi_2 \sin \psi_3$, $a_{97} = \sin \phi_3 \cos \psi_3$, $a_{9,11} = \cos \phi_3 \cos \psi_3$, $a_{9,14} = -\sin \phi_2 \sin \psi_3$, $a_{10,7} = \cos \phi_3 \sin \psi_4$, $a_{10,8} = \sin \phi_4 \cos \psi_4$, $a_{10,11} = -\sin \phi_3 \sin \psi_4$, $a_{10,15} = \cos \phi_4 \cos \psi_4$, $a_{11,8} = \cos \phi_4 \cos \psi_5$, $a_{11,9} = \cos \phi_5 \sin \psi_5 \cos \psi_6$, $a_{11,12} = \sin \phi_5 \sin \psi_5 \cos \psi_6$, $a_{11,15} = -\sin \phi_4 \cos \psi_5$, $a_{11,16} = \sin \psi_5 \sin \psi_6$, $a_{12,9} = \cos \phi_6 \cos \psi_7$, $a_{12,12} = \sin \phi_6 \cos \psi_7 e^{i\theta_1}$, $a_{12,16} = -\sin \psi_7 e^{i\theta_2}$, $a_{13,13} = r \cos \phi_7$, $a_{13,14} = r \sin \phi_7$, $a_{14,15} = r \cos \phi_8$, $a_{14,16} = r \sin \phi_8$.

Так же, как и в предыдущих случаях, можно показать, что по основе D представления T матрицы A_{11} , A_{12} , A_{22} , A_{23} (ранее частично приведенные) находятся однозначно.

При выбранной параметризации многие соотношения, обеспечивающие ортоскалярность, уже выполняются. Дополнительно для элементов основы D следует потребовать ортогональность пятой и шестой строк (2 действительных соотношения), первого столбца со вторым, а также третьего с четвертым (еще 2 соотношения), равенство «длин» столбцов матрицы $\begin{bmatrix} A_{35} \\ A_{45} \end{bmatrix}$ (3 соотношения).

Таким образом, 18 параметров $\phi_1 - \phi_8$, $\psi_1 - \psi_7$, θ_1 , θ_2 и r нормированного представления связаны 9 соотношениями и зависят от 9 независимых параметров, а ненормированные неразложимые ортоскалярные представления в размерности $\delta_{\bar{E}_8}$ зависят от $10 = |Q_v| + 1$ независимых параметров. $\square$

Замечание 2. Как и для категории линейных пространств, размерности неразложимых ортоскалярных представлений расширенных графов Дынкина не ограничены в совокупности. В размерности, являющейся действительным корнем графа, при фиксированном характере неразложимое представление единственно. Для размерностей, являющихся мнимыми корнями графа, неразложимые ортоскалярные представления, в отличие от линейно-алгебраического случая, существуют только в размерности, совпадающей с минимальным положительным мнимым корнем, но также зависят при фиксированном характере, от одного (комплексного) параметра.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. V. Roiter, *Matrix problems*, in: Proc. ICM Helsinki, 1978, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, 319–322.
- [2] С. А. Кругляк, А. В. Ройтер, *Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств*, Функц. анализ и его прил., **39**:2 (2005), 13–30.
- [3] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math., **6** (1972), 71–107.
- [4] С. А. Кругляк, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко, *О суммах проекторов*, Функц. анализ и его прил., **36**:3 (2002), 20–35.
- [5] В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко, *Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самосопряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна*, Укр. матем. ж., **58**:11 (2006), 1556–1570.
- [6] S. Albeverio, V. Ostrovskiy, Yu. Samoilenko, *On functions on graphs and representations of a certain class of *-algebras*, J. Algebra, **308**:2 (2007), 567–582.

- [7] С. А. Кругляк, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Ортоскалярные представления колчанов в категории гильбертовых пространств*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **338** (2006), 180–199.
- [8] А. В. Ройтер, *Боксы с инволюцией*, в кн.: Представления и квадратичные формы, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1979, 124–126, 155.
- [9] Ж. Диксмье, *C^* -алгебры и их представления*, Наука, М., 1974.
- [10] V. G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, II, J. Algebra, **78** (1982), 141–162.
- [11] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space*, in: Hilbert Space Operators and Operator Algebra (Proc. Intern. Conf., Tihany, Hungary, 1970), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, vol. 5, 1972, 163–237.
- [12] И. К. Редчук, А. В. Ройтер, *Сингулярные локально-скалярные представления колчанов в гильбертовых пространствах и разделяющие функции*, Укр. матем. ж., **56**:6 (2004), 796–809.
- [13] W. Crawley-Boevey, *Lectures on Representations of Quivers, Preprojective Algebras and Deformations of Quotient Singularities*, <http://www.maths.leeds.ac.uk/~pmtwc/dmvlecs.pdf>.
- [14] V. L. Ostrovskiy, Yu. S. Samoilenko, *Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$ -algebras*, I, Rev. Math. Math. Phys., **11** (1999), 1–261.
- [15] А. С. Меллит, *Когда сумма трех частичных отражений равна нулю*, Укр. матем. ж., **55**:9 (2003), 1277–1283.
- [16] В. Л. Островський, *Зображення алгебри, асоційованої з графом Динкіна $\tilde{E}_7$* , Укр. матем. ж., **56**:9 (2004), 1193–1204.

Институт математики НАН Украины
e-mail: krug@ehl.kiev.ua

Институт математики НАН Украины
e-mail: nazarova@yahoo.co.uk

Институт математики НАН Украины

Поступило в редакцию
13 февраля 2009 г.