Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Горячко, Элементарное доказательство простоты ветвления представлений групп $GL(n, q)$ при параболических ограничениях, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 2, 82–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2987>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 07:09:44

Элементарное доказательство простоты ветвления представлений групп $GL(n, q)$ при параболических ограничениях*

© 2010. Е. Е. Горячко

Введение. Фиксируем примарное число q ; для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ рассмотрим полную линейную группу $GL(n, q)$ степени n над конечным полем $\mathbb{F}_q$ и параболическое вложение $e_n: \mathbb{C}[GL(n, q)] \rightarrow \mathbb{C}[GL(n+1, q)]$, где $\mathbb{C}[GL(n, q)]$ и $\mathbb{C}[GL(n+1, q)]$ — комплексные групповые алгебры групп $GL(n, q)$ и $GL(n+1, q)$ соответственно, действующее на элементах группы $GL(n, q)$ по формуле

$$e_n: h \mapsto \frac{1}{q^n} \sum_{u \in (\mathbb{F}_q)^n} \begin{pmatrix} h & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что e_n — не сохраняющий единицу при $n \neq 0$ мономорфизм алгебр; если π — комплексное конечномерное представление группы $GL(n+1, q)$, то, обозначая через W образ (возможно, неединичного) идемпотента $\pi(e_n(\text{id}))$ и замечая, что пространство W инвариантно относительно всех операторов $\pi(e_n(h))$, $h \in GL(n, q)$, мы можем определить параболическое ограничение $r_{n+1}(\pi)$ представления π на группу $GL(n, q)$ по формуле $r_{n+1}(\pi)(h) = \pi(e_n(h))|_{W \rightarrow W}$.

Хорошо известно (см., например, [12, §13]), что полное описание неприводимых представлений групп $GL(n, q)$ позволяет доказать утверждение о простоте ветвления представлений групп $GL(n, q)$ при параболических ограничениях. Данное утверждение означает, что для любого неприводимого представления π группы $GL(n+1, q)$ представление $r_{n+1}(\pi)$ имеет простой спектр (его разложение на неприводимые компоненты свободно от кратностей).

А. М. Вершик поставил вопрос о прямом независимом доказательстве этого утверждения. Одна из основных причин интереса к этому вопросу заключается в том, что, как видно из единого подхода к теории представлений групп $GL(n, q)$ и симметрических групп S_n , развитого в [12], параболическое ограничение представлений групп $GL(n, q)$ является правильным обобщением (« q -аналогом») тривиальных ограничений представлений групп S_n , а для данных ограничений аналогичное утверждение доказывается прямо и просто (см. [3]). Параболический подход появился еще в классических работах, посвященных теории представлений групп $GL(n, q)$ (см., например, [6], [9]). При переходе к бесконечным матрицам он позволяет определить правильный q -аналог бесконечной симметрической группы S_∞ — локально компактную группу $GLB(q)$; простота ветвления при этом означает отсутствие кратных ребер в диаграмме Браттели групповой алгебры Брюа–Шварца этой группы (см. [2], [10], [11]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ НШ-2460.2008.1, а также грантов РФФИ 08-01-00379-а и 09-01-12175-офи_м.

В частном случае основной серии представлений групп $GL(n, q)$ прямое доказательство простоты ветвления было найдено в статье [4]. Как и для групп S_n , оно основывается на том, что простота спектра представления равносильна коммутативности его алгебры эндоморфизмов, а наличие этого свойства можно проверить, используя тот факт, что все элементы данной алгебры являются самосопряженными относительно некоторой невырожденной билинейной формы.

Однако, используя сформулированный классический критерий, решить задачу в общем случае не удастся. А. М. Вершик сообщил нам о новых идеях в этом направлении, предложенных И. Н. Бернштейном; они происходят из теории представлений полных линейных групп над локальными неархимедовыми полями (см. [1], [8]) и позволяют получить прямое доказательство простоты ветвления представлений и для локальных неархимедовых, и для конечных полей, что и было сделано Айзенбудом и Гуревичем в работе [7]. В статье [5] это доказательство было упрощено без существенного изменения схемы теоретико-представленческого рассуждения для случая групп $GL(n, q)$.

В настоящей заметке предлагается другое теоретико-представленческое рассуждение, приводящее к *более элементарному доказательству критерия простоты ветвления*, указанного в теореме 1; проверка этого критерия для групп $GL(n, q)$ имеется в [5], в настоящей заметке мы лишь приводим эскиз доказательства ключевой теоремы 2. Новое доказательство этого критерия состоит из четырех шагов. Как и в уже существующем подходе, оно основывается не на приведенном выше утверждении о простоте спектра, а на лемме о произведении кратностей (шаг 1); однако при этом мы не переходим к произведениям групп, а работаем с неприводимыми представлениями исходной группы, используя стандартные для теории представлений конечных групп приемы (шаги 2–4).

Автор глубоко признателен А. М. Вершику за постановку задачи и руководство в ходе работы над ней и благодарен Э. Б. Винбергу за ценные замечания к статье, а А. Айзенбуду и Д. Гуревичу за полезные обсуждения.

U-ограничения и критерий простоты ветвления. Нам будет удобно переформулировать задачу в следующем, более абстрактном контексте.

Пусть G — конечная группа, а H и U — ее подгруппы, причем H нормализует U и $H \cap U = \{1\}$ (это эквивалентно тому, что $HU \cong H \ltimes U$).

Определение. U -вложением e_U групповой алгебры $\mathbb{C}[H]$ группы H в групповую алгебру $\mathbb{C}[G]$ группы G назовем линейное отображение, действующее на элементах группы H по формуле $e_U(h) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} hu$.

Определение. Пусть π — комплексное конечномерное представление группы G . Тогда определим его U -ограничение $\text{res}_U \pi$ на подгруппу H по формуле $\text{res}_U \pi(h) = \pi(e_U(h))|_{W \rightarrow W}$ для всех $h \in H$, где $W = \text{Im } \pi(e_U(1))$.

Для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и произвольного поля K рассмотрим группу $G = GL(n+1, K)$ и ее подгруппы $H = \left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : h \in GL(n, K) \right\}$ и $U = \left\{ \begin{pmatrix} \text{id} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in K^n \right\}$; очевидно, что H нормализует U и $H \cap U = \{\text{id}\}$. Если $K = \mathbb{F}_q$, то можно проверить, что для этих групп определенные выше U -вложение e_U и U -ограничение res_U суть параболические вложение e_n и ограничение r_{n+1} соответственно.

Теперь, возвращаясь к абстрактному контексту, мы можем сформулировать следующий критерий простоты ветвления представлений группы G при U -ограничении на подгруппу H (смысл этого свойства точно такой же, как и в случае параболического ограничения представлений группы $GL(n+1, q)$).

Теорема 1. *Предположим, что инволютивный автоморфизм θ группы G сохраняет подгруппу H , а также обладает следующими свойствами:*

- (1) *любой $g \in G$ сопряжен с $\theta(g)^{-1}$, причем для всякого $g \in H$ это сопряжение можно осуществить при помощи элемента группы H ;*
- (2) *для любого $g \in G$ найдется такой $h \in H$, что $\theta(g)^{-1} \in h^{-1}\theta(U)gUh$.*

Тогда имеет место простота ветвления представлений группы G при U -ограничении на подгруппу H .

Прежде чем приступить к доказательству этого критерия, скажем несколько слов о его проверке для групп $\mathrm{GL}(n, q)$ (ее подробное изложение приводится в [5]). В этом случае, рассматривая инволютивный автоморфизм $\theta: g \mapsto (g^T)^{-1}$, мы устанавливаем, что условие (1) теоремы 1 следует из того, что каждая матрица сопряжена со своей транспонированной. Далее, пусть $g = \begin{pmatrix} f & u \\ a & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n+1, K)$. Тогда можно показать, что двойной класс смежности $\theta(U)gU = U^T g U$, где U — описанная выше матричная группа над полем K , определяется парой $(f, \det g)$, если $f \in \mathrm{GL}(n, K)$, или же тройкой $(f, u + \mathrm{Im} f, a^T + \mathrm{Im} f^T)$, если $f \in \mathrm{Mat}(n, K)$, $\mathrm{rk} f = n - 1$, $u \notin \mathrm{Im} f$, $a^T \notin \mathrm{Im} f^T$; поэтому условие (2) теоремы 1 означает, что найдется $h \in \mathrm{GL}(n, K)$, удовлетворяющий условию $(f^T, \det g) = (h^{-1}fh, \det g)$ в первом случае и $(f^T, a^T + \mathrm{Im} f^T, u + \mathrm{Im} f) = (h^{-1}fh, h^{-1}u + \mathrm{Im} h^{-1}f, (ah)^T + \mathrm{Im}(fh)^T)$ во втором случае. Итак, в первом случае условие (2) следует из сопряженности элементов f и f^T , а во втором — из доказанной ниже теоремы, уточняющей этот факт.

Теорема 2. *Для любой матрицы $f \in \mathrm{Mat}(n, K)$ существует такая матрица $h \in \mathrm{GL}(n, K)$, что $f^T = h^{-1}fh$ и $h = h^T$. Кроме того, если $\mathrm{rk} f = n - 1$, то для любых таких векторов $u, v \in K^n$, что $u \notin \mathrm{Im} f$ и $v \notin \mathrm{Im} f^T$, матрица h может быть выбрана так, что $hv - u \in \mathrm{Im} f$.*

Доказательство. Можно показать, что, используя фробениусову нормальную форму матрицы f , теорему достаточно проверить только в том случае, когда эта матрица есть фробениусова клетка, т. е. сопровождающая матрица некоторого приведенного многочлена. Пусть $c_0, \dots, c_{n-1} \in K$, а этот многочлен имеет вид $\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + t^n$; тогда элементы матрицы f таковы:

$$f_{ij} = \delta_{i-1,j} \text{ и } f_{in} = -c_{i-1}, \text{ где } i, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq n.$$

Предположим, что искомая матрица h имеет следующий, еще более специальный, чем симметричный, вид для некоторых $d_1, \dots, d_n \in K$:

$$h_{ij} = d_{i+j-1}, \text{ если } i+j \leq n+1, \text{ и } h_{ij} = 0, \text{ если } i+j \geq n+2.$$

Непосредственно проверяется, что тогда первое утверждение теоремы выполнено, если $d_n \neq 0$, а $d_i = c_i d_n$ для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Если теперь $\mathrm{rk} f = n - 1$, то $\mathrm{Im} f$ состоит из векторов с нулевой первой координатой, а $\mathrm{Im} f^T$ — из таких векторов $v \in K^n$, что определитель, составленный из v и ненулевых столбцов матрицы f^T , равен 0. Легко проверить, что указанный определитель равен $\sum_{i=1}^{n-1} v_i c_i + v_n$; далее, условие $hv - u \in \mathrm{Im} f$ означает, что $\sum_{i=1}^n v_i d_i - u_1 = 0$. В силу полученной выше формулы для $d_1, \dots, d_{n-1}$ это эквивалентно тому, что $(\sum_{i=1}^{n-1} v_i c_i + v_n) d_n = u_1$. Данное уравнение относительно d_n имеет ненулевое решение именно потому, что $u \notin \mathrm{Im} f$ и $v \notin \mathrm{Im} f^T$. $\square$

Для поля $K = \mathbb{F}_q$ данное матричное рассуждение вместе с изложенным ниже доказательством теоремы 1 приводит к прямому доказательству простоты ветвления представлений групп $GL(n, q)$ при параболических ограничениях.

Доказательство теоремы 1. Начнем со следующей простой леммы, которая имеет место для всех конечных групп и их комплексных конечномерных представлений. В ее формулировке и далее мы обозначаем через $\text{Hom}_H(W, W')$ пространство сплетающих операторов между пространствами W и W' , в каждом из которых задано представление конечной группы H . Если эти представления совпадают, то мы используем обозначение $\text{End}_H(W)$.

Шаг 1 (лемма о произведении кратностей). Пусть представления ρ и ρ' группы H действуют в пространствах W и W' соответственно. Тогда имеет место эквивалентность следующих условий:

(1) произведение кратностей вхождения всякого неприводимого представления σ группы H в представления ρ и ρ' не превосходит 1;

(2) $\text{Ker } a = \text{Ker } b \iff \text{Im } a = \text{Im } b$ для всех $a, b \in \text{Hom}_H(W, W')$.

Доказательство. Пусть неприводимое представление σ группы H определено в пространстве X , а также заданы $c \in \text{Hom}_H(W, X)$ и $c' \in \text{Hom}_H(X, W')$; тогда $a = c' \circ c \in \text{Hom}_H(W, W')$. Кроме того, по лемме Шура, если $c' \neq 0$, то $\text{Ker } a = \text{Ker } c$, а если $c \neq 0$, то $\text{Im } a = \text{Im } c$. Пусть выполнено условие (2); тогда если $\text{Hom}_H(W, X) \neq 0$, то образы всех ненулевых операторов, принадлежащих $\text{Hom}_H(X, W')$, совпадают и, значит, кратность вхождения представления σ в ρ' не больше 1; аналогично, если $\text{Hom}_H(X, W') \neq 0$, то кратность вхождения представления σ в ρ не больше 1. Итак, импликация (2) $\implies$ (1) доказана; обратная импликация еще более очевидным образом следует из леммы Шура. $\square$

Отметим, что приведенное доказательство остается верным для вполне приводимых представлений ρ и ρ' группы H , заданных над любым полем.

Пусть снова G — конечная группа, H, U — ее подгруппы, H нормализует U и $H \cap U = \{1\}$. На следующем шаге доказательства теоремы 1 мы предъявляем изоморфную копию U -ограничения каждого представления группы G .

Шаг 2. Пусть автоморфизм θ группы G сохраняет подгруппу H и удовлетворяет условию (1) теоремы 1. Тогда для любого представления π группы G представления $\text{res}_U \pi$ и $\text{res}_{\theta(U)} \pi$ группы H изоморфны.

Доказательство. Легко проверить, что для всякого $h \in H$ имеют место равенства $\chi_{\text{res}_U \pi}(h) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \chi_\pi(hu) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \chi_\pi(uh)$, где χ_π и $\chi_{\text{res}_U \pi}$ суть характеры представления π и U -ограничения $\text{res}_U \pi$; заменяя в данной сумме u на $\theta^{-1}(u)^{-1}$ и пользуясь тем, что элементы $\theta^{-1}(u)^{-1}h$ и $\theta(\theta^{-1}(u)^{-1}h)^{-1} = \theta(h)^{-1}u$ сопряжены в G и потому значения характера χ_π на них совпадают, мы получаем, что $\chi_{\text{res}_U \pi}(h) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in \theta(U)} \chi_\pi(\theta(h)^{-1}u) = \chi_{\text{res}_{\theta(U)} \pi}(\theta(h)^{-1})$. Полученное выражение равно $\chi_{\text{res}_{\theta(U)} \pi}(h)$, так как элементы h и $\theta(h)^{-1}$ сопряжены внутри H . Таким образом, характеры представлений $\text{res}_U \pi$ и $\text{res}_{\theta(U)} \pi$ совпадают, и, значит, эти представления изоморфны. $\square$

На следующем шаге появляется идея самосопряженности; однако мы применим ее не для доказательства коммутативности алгебры эндоморфизмов представления, а для проверки условия (2) шага 1. Далее нам будет удобно обозначить через i_U и $i_{\theta(U)}$ идемпотенты $e_U(1)$ и $e_{\theta(U)}(1)$ в алгебре $\mathbb{C}[G]$.

Шаг 3. Пусть представление π группы G действует в пространстве V . Тогда из самосопряженности всех операторов, принадлежащих пространству $\pi(i_{\theta(U)}) \text{End}_H(V) \pi(i_U)$, относительно некоторой невырожденной билинейной формы в V следует выполнение условия (2) леммы о произведении кратностей для представлений $\rho = \text{res}_U \pi$ и $\rho' = \text{res}_{\theta(U)} \pi$ группы H .

Доказательство. Из того факта, что ядро и образ самосопряженного оператора суть ортогональные дополнения друг друга, мы получаем, что $\text{Ker } a = \text{Ker } b \iff \text{Im } a = \text{Im } b$ для всех $a, b \in \pi(i_{\theta(U)}) \text{End}_H(V) \pi(i_U)$. Представления $\text{res}_U \pi$ и $\text{res}_{\theta(U)} \pi$ действуют в пространствах $\text{Im } \pi(i_U)$ и $\text{Im } \pi(i_{\theta(U)})$ соответственно. Рассматривая естественный изоморфизм между пространствами $\pi(i_{\theta(U)}) \text{End}_H(V) \pi(i_U)$ и $\text{Hom}_H(\text{Im } \pi(i_U), \text{Im } \pi(i_{\theta(U)}))$ и замечая, что ядра (образы) соответствующих при этом изоморфизме операторов определяют друг друга, мы видим, что полученное условие равносильно условию (2) шага 1. $\square$

Пусть теперь π — неприводимое представление группы G . Если мы докажем, что для него выполнено условие самосопряженности, сформулированное на шаге 3, то, применяя лемму о произведении кратностей к представлениям $\text{res}_U \pi$ и $\text{res}_{\theta(U)} \pi$ группы H и замечая, что в силу шага 2 они изоморфны, а потому произведение кратностей, указанное в условии (1) леммы, является квадратом, мы получим, что представление $\text{res}_U \pi$ имеет простой спектр. Итак, для завершения доказательства теоремы 1 нам осталось сделать следующий шаг.

Шаг 4. Пусть автоморфизм θ группы G удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для любого неприводимого представления группы G имеет место условие самосопряженности, сформулированное на шаге 3.

Доказательство. Легко видеть, что условие (2) теоремы 1 равносильно тому, что антиавтоморфизм $\sum_g p_g g \mapsto \sum_g p_g \theta(g)^{-1}$ алгебры $A = \mathbb{C}[G]$ действует тождественно на пространстве $S = i_{\theta(U)} Z(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}[G]) i_U$, где $Z(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}[G])$ — централизатор алгебры $\mathbb{C}[H]$ в $\mathbb{C}[G]$; разложение $A \cong \bigoplus_{\pi} A_{\pi}$, где $A_{\pi} = \text{End}(V^{\pi})$, π пробегает некоторую трансверсаль классов изоморфизма неприводимых представлений группы G и V^{π} есть пространство представления π , определяет разложение $S \cong \bigoplus_{\pi} S_{\pi}$, где $S_{\pi} = \pi(i_{\theta(U)}) \text{End}_H(V^{\pi}) \pi(i_U)$. В силу условия (1) указанный антиавтоморфизм действует тождественно на центре алгебры A и, значит, определяет антиавтоморфизм каждой из ее простых компонент A_{π} , действующий тождественно на S_{π} ; по теореме Сколема–Нётер любой антиавтоморфизм алгебры $\text{End}(V^{\pi})$ есть сопряжение относительно некоторой невырожденной билинейной формы в V^{π} ; поэтому в итоге мы получаем требуемый факт. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. Н. Бернштейн, А. В. Зелевинский, УМН, **31:3** (1976), 5–70. [2] А. М. Вершик, С. В. Керов, Функц. анализ и его прил., **32:3** (1998), 3–10. [3] А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, Зап. научн. сем. ПОМИ, **307** (2004), 57–98. [4] Е. Е. Горячко, Зап. научн. сем. ПОМИ, **331** (2006), 43–59. [5] Е. Е. Горячко, Зап. научн. сем. ПОМИ, **373** (2009), 124–133. [6] Д. К. Фаддеев, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **46** (1974), 64–88. [7] A. Aizenbud, D. Gourevitch, *Принята к печати в Canad. Math. Bull.*; <http://arxiv.org/abs/0910.3659v1>. [8] I. M. Gelfand, D. A. Kajdan, in: Lie Groups and Their Representations, Akad. Kiadó, Budapest, 1975, 95–118. [9] J. A. Green, Trans. Amer. Math. Soc., **80:2** (1955), 402–447. [10] A. M. Vershik, in: Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics, Lecture Notes in Math., vol. 1815,

Springer-Verlag, Berlin, 2003, 161–182. [11] A. M. Vershik, S. V. Kerov, Зап. научн. сем. ПОМИ, **344** (2007), 5–36. [12] A. V. Zelevinsky, *Representations of Finite Classical Groups. A Hopf algebra approach*, Lecture Notes in Math., vol. 869, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: eugene@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
11 декабря 2009 г.

УДК 517.984

Об одномерном операторе Шрёдингера с δ -взаимодействиями*

© 2010. А. С. КОСТЕНКО, М. М. МАЛАМУД

1. Введение. Пусть $\mathcal{J} = [0, b)$, $0 < b \leq +\infty$, $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{J}$ — строго возрастающая последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. Пусть также $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ — вещественная последовательность.

В $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{J})$ с дифференциальным выражением

$$\ell_{X,\alpha} := -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta(x - x_n) \quad (1)$$

связывают симметрический дифференциальный оператор (см. [1])

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{X,\alpha}^0 &:= -\frac{d^2}{dx^2}, & D(\mathbf{H}_{X,\alpha}^0) &= \{f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathcal{J} \setminus X) : f'(0) = 0, \\ & & & f(x_n+) = f(x_n-), f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Его замыкание, обозначаемое через $\mathbf{H}_{X,\alpha}$, интерпретируют как *гамильтониан δ -взаимодействий интенсивности α_n в центрах x_n* .

Спектральные свойства оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ хорошо изучены в случае, когда $d_* := \inf_{n \in \mathbb{N}} d_n > 0$ (здесь $d_n := x_n - x_{n-1}$ и $x_0 := 0$). Так, в этом случае оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ *всегда* самосопряжен [6]. Его полуограниченность снизу эквивалентна полуограниченности снизу последовательности $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ (см. [3]). Для дискретности спектра необходимо, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$.

Случай $d_* = 0$ *принципиально отличается* от случая $d_* > 0$. Так, в [4] показано, что в этом случае индексы дефекта $n_+(\mathbf{H}_{X,\alpha})$ и $n_-(\mathbf{H}_{X,\alpha})$ оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ равны и не превосходят единицы, и установлена альтернатива Вейля. В частности, из этого следует, что если $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = 1$, то спектры самосопряженных расширений оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ дискретны. Шубин Крист и Штольдц [17] показали, что $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = 1$, если $\mathcal{J} = \mathbb{R}_+$, $d_n = 1/n$ и $\alpha_n = -2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Основная цель заметки — спектральный анализ гамильтониана $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в случае, когда $d_* = 0$. Мы исследуем оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в рамках теории расширений

*Исследование первого автора было поддержано ESI Junior Research Fellowship Programme (Австрия) и IRCSET Post-Doctoral Fellowship Program (Ирландия).