Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Асташкин, К. Е. Тихомиров, Об устойчиво $\mathcal{K}$ -монотонных банаховых парах, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 65–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:46:50

Теорема 3. Пусть операторы $A_j(t)A^{-j}$, $j = 1, \dots, 2k$, ограничены в H и выполняется неравенство

$$\sum_{j=0}^{2k-1} c_j \sup_t \|A_{2k-j}(t)A^{-2k+j}\|_{H \rightarrow H} < 1, \quad (3)$$

где числа c_j , $j = 0, \dots, 2k-1$, определяются в теореме 2. Тогда при любом $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ краевая задача (1), (2) имеет единственное регулярное решение.

Замечание 2. Полученные условия разрешимости неумлучшаемы в терминах операторных коэффициентов в том смысле, что в случае невыполнения неравенства (3) краевая задача (1), (2) не является корректной и само уравнение (1) становится не эллиптическим [4].

Замечание 3. При $\rho(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, и $A_j(t) \equiv A_j$, $j = 1, \dots, 2k$, теорема 3 получена в работе [3].

Отметим, что в широком аспекте эллиптические операторно-дифференциальные уравнения второго порядка исследованы, например, в работе [5]. Краевая же задача (1), (2) при $m_i = i$, $i = 0, \dots, k-1$, изучалась в работе [6], а еще ранее, для $\alpha = \beta = 1$ и $A_j(t) \equiv A_j$, $j = 1, \dots, 2k$, — в работах [7], [8], которые послужили толчком к появлению целого ряда статей, в том числе и настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
 [2] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971. [3] С. С. Мирзоев, Докл. АН СССР, **273**:2 (1983), 292–295.
 [4] Ю. А. Дубинский, Матем. сб., **90(132)**:1 (1973), 3–22. [5] А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов, Функц. анализ и его прил., **17**:2 (1983), 38–61. [6] А. Р. Алиев, Матем. заметки, **74**:6 (2003), 803–814. [7] М. Г. Гасымов, Докл. АН СССР, **199**:4 (1971), 747–750. [8] М. Г. Гасымов, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **6**:2–3 (1971), 131–147.

Бакинский государственный университет,
 Институт математики и механики НАН Азербайджана
 e-mail: alievaraz@yahoo.com

Поступило в редакцию
 15 апреля 2009 г.

Бакинский государственный университет
 e-mail: mirzoyevsaber@mail.ru

УДК 517.982.27

Об устойчиво $\mathcal{H}$ -монотонных банаховых парах

© 2010. С. В. Асташкин, К. Е. Тихомиров

1. Введение. Пусть $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ — банаховы пары. Банаховы пространства X и Y , $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$, называются C -интерполяционными относительно пар $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, если каждый линейный оператор T , ограниченный как оператор из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 , ограничен

как оператор из X в Y и $\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq C \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \rightarrow Y_i}$. Для произвольной банаховой пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$, $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ определим $\mathcal{H}$ -функционал Петре

$$\mathcal{H}(t, x; \vec{X}) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i \}.$$

Банаховы пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ называют (равномерно) относительно $\mathcal{H}$ -монотонными с константой $\lambda > 0$, если из того, что X и Y являются C -интерполяционными пространствами для некоторого $C > 0$ относительно пар $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, $x \in X$ и $\mathcal{H}(t, y; \vec{Y}) \leq \mathcal{H}(t, x; \vec{X})$ для всех $t > 0$ и некоторого $y \in Y_0 + Y_1$, следует, что $y \in Y$ и $\|y\|_Y \leq \lambda C \|x\|_X$. В частном случае, когда $\vec{X} = \vec{Y}$, говорят о (равномерно) $\mathcal{H}$ -монотонной паре. Важность класса $\mathcal{H}$ -монотонных пар обусловлена, в основном, возможностью описания всех пространств, интерполяционных относительно них. А именно, если X — пространство, интерполяционное относительно $\mathcal{H}$ -монотонной пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$, то $X = (X_0, X_1)_E^{\mathcal{H}}$, где $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{H}}$ — пространство вещественного $\mathcal{H}$ -метода интерполяции, построенное по некоторой банаховой решетке E двусторонних числовых последовательностей и состоящее из всех $x \in X_0 + X_1$, таких, что $(\mathcal{H}(2^k, x; \vec{X}))_{k=-\infty}^{\infty} \in E$, с нормой $\|x\| := \|(\mathcal{H}(2^k, x; \vec{X}))_k\|_E$ [1, теорема 4.4.5].

Далее речь будет идти, главным образом, о сепарабельных банаховых решетках E двусторонних числовых последовательностей, таких, что $\|e_n\| = 1$, где $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — стандартный базис в пространстве последовательностей. Каждая такая решетка порождает банахову пару $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$, где для любой фиксированной последовательности $v = (v_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, $v_k > 0$, через $E(v_k) (= E(v))$ обозначается весовое пространство, состоящее из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, таких, что $a \cdot v \in E$, с нормой $\|a\|_{E(v_k)} := \|a \cdot v\|_E$. $\mathcal{H}$ -монотонность такой пары связана с наличием у решетки, порождающей ее, следующих весьма специфических геометрических свойств [2].

Пусть $x = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ — числовая последовательность и $\text{supp } x = \{k \in \mathbb{Z} : x_k \neq 0\}$ — ее носитель. Неравенство $A < B$ (где $A \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Z}$) означает, что $a < b$ для произвольных $a \in A$, $b \in B$. Говорят, что банахова решетка последовательностей E обладает свойством (RSP), если существует такое $C > 0$, что для произвольных семейств $\{x^n\}_{n=1}^m$, $\{y^n\}_{n=1}^m$ числовых последовательностей x^n , y^n , таких, что их носители конечны,

$$\text{supp } x^n < \text{supp } y^n \quad (1 \leq n \leq m), \quad \text{supp } y^n < \text{supp } x^{n+1} \quad (1 \leq n \leq m-1)$$

и $\|y^n\|_E \leq \|x^n\|_E = 1$ ($1 \leq n \leq m$), а также любых $a_n \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\|\sum_{n=1}^m a_n y^n\|_E \leq C \|\sum_{n=1}^m a_n x^n\|_E$. Аналогично, E обладает свойством (LSP), если существует такое $C > 0$, что для произвольных $\{x^n\}_{n=1}^m$, $\{y^n\}_{n=1}^m$, носители которых удовлетворяют тем же условиям, что и выше, и $\|x^n\|_E \leq \|y^n\|_E = 1$ ($1 \leq n \leq m$), а также любых $a_n \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\|\sum_{n=1}^m a_n x^n\|_E \leq C \|\sum_{n=1}^m a_n y^n\|_E$. Как показал Калтон [2, теорема 4.5], пара $\vec{E}$ $\mathcal{H}$ -монотонна, если и только если E обладает свойствами (RSP) и (LSP).

Один из основных результатов этой заметки — характеристика пар вида $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$, $\mathcal{H}$ -монотонность которых обладает определенной устойчивостью относительно умножения «веса» на константу. Точнее, будет показано, что подобное свойство имеют лишь пары, порожденные банаховой решеткой, инвариантной относительно сдвига. Последний результат интересно сравнить с

известной теоремой Цвикеля–Нильсона [3], из которой, в частности, следует, что если $\mathcal{H}$ -монотонность пары $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$ устойчива, более того, относительно произвольной замены «веса», то E совпадает либо с l_p ($1 \leq p < \infty$), либо с c_0 . В то же время класс $\mathcal{H}$ -монотонных пар $\vec{E}$, порожденных сепарабельными инвариантными относительно сдвига банаховыми решетками, нетривиален. Будет приведен пример решетки F , обладающей, кроме перечисленных свойств, также свойствами (RSP), (LSP) и такой, что $F \neq l_p$ ($1 \leq p < \infty$), $F \neq c_0$. Заметим, что картина резко меняется, если рассматриваются лишь симметричные решетки. Как показал Калтон [2, теорема 4.6], при этих условиях пара $\vec{E}$ является $\mathcal{H}$ -монотонной тогда и только тогда, когда $E = l_p$ ($1 \leq p < \infty$) или $E = c_0$.

2. $\mathcal{H}_u$ -монотонные банаховы пары. Если X — банахова решетка измеримых функций, определенных на некотором пространстве с σ -конечной мерой, а $v(t) > 0$ измерима, то весовое пространство $X(v)$ определяется так же, как и в случае последовательностей. Из результатов Седаева [4] и Цвикеля и Нильсона [3] следует, что для сепарабельной банаховой решетки X следующие два условия эквивалентны:

- (i) для произвольных «весов» v_0, v_1, w_0, w_1 пары $(X(v_0), X(v_1))$ и $(X(w_0), X(w_1))$ относительно $\mathcal{H}$ -монотонны с константой $\lambda > 0$, не зависящей от v_0, v_1, w_0, w_1 ;
- (ii) $X = L_p(v)$ (нормы эквивалентны) для некоторого «веса» v и некоторого $p \in [1, \infty)$.

Здесь нас будут интересовать банаховы пары, $\mathcal{H}$ -монотонность которых устойчива относительно более слабого «возмущения» — умножения «веса» на константу. А именно, предположим, что (X_0, X_1) — пара банаховых решеток измеримых функций, определенных на некотором пространстве с σ -конечной мерой. Будут ли пары $(X_0, X_1(u))$ и (X_0, X_1) относительно $\mathcal{H}$ -монотонны с некоторой константой $\lambda > 0$, не зависящей от числа $u > 0$? Как известно (см., например, [5, п. 15] или [1]), ответ на поставленный вопрос положителен тогда и только тогда, когда для некоторого $\lambda > 0$ выполнено следующее условие: для произвольных $x, y \in X_0 + X_1$, $\lambda' > \lambda$ и $u > 0$ из неравенства $\mathcal{H}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{H}(ut, x; X_0, X_1)$ ($t > 0$) вытекает существование такого линейного оператора $T: X_i \rightarrow X_i$ ($i = 0, 1$), что $\|T\|_{X_0 \rightarrow X_0} \leq \lambda'$, $\|T\|_{X_1 \rightarrow X_1} \leq \lambda'u$ и $Tx = y$. В том случае, когда пара (X_0, X_1) удовлетворяет последнему условию, будем называть ее $\mathcal{H}_u$ -монотонной. Заметим, что это понятие имеет смысл и для общих банаховых пар. В частности, этим свойством обладают пары пространств классического метода интерполяции $(\vec{X}_{\theta_0, p_0}, \vec{X}_{\theta_1, p_1})$, порожденные l_p -пространствами со степенными весами (определения см. в [6]).

Предложение 1. Для произвольной банаховой пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и любых θ_j, p_j ($0 < \theta_j < 1$, $1 \leq p_j \leq \infty$, $j = 1, 2$) пара $(\vec{X}_{\theta_0, p_0}, \vec{X}_{\theta_1, p_1})$ является $\mathcal{H}_u$ -монотонной.

3. Пары, порожденные банаховой решеткой, инвариантной относительно сдвига. Предположим, что в банаховой решетке E двусторонних числовых последовательностей для любого $k \in \mathbb{Z}$ ограничен оператор сдвига $P_k((a_j)_{j=-\infty}^\infty) := (a_{k+j})_{j=-\infty}^\infty$. Будем называть решетку E инвариантной относительно сдвига, если $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|P_k\|_{E \rightarrow E} < \infty$. Пусть E_θ — банахова решетка $E(2^{-\theta k})$ ($0 < \theta < 1$).

Теорема 1. Для произвольной сепарабельной банаховой решетки E двусторонних числовых последовательностей, такой, что $\|e_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{Z}$), следующие условия эквивалентны:

(а) пара $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$ $\mathcal{H}_u$ -монотонна;

(б) пара $\vec{E}$ $\mathcal{H}$ -монотонна и существует константа $C > 0$ со следующим свойством: если $\theta \in (0, 1)$ и $a \in E_\theta$, $b \in E + E(2^{-k})$, $u > 0$ удовлетворяют неравенству

$$\mathcal{H}(t, b; \vec{E}) \leq \mathcal{H}(ut, a; \vec{E}) \quad (t > 0), \quad (1)$$

то $b \in E_\theta$ и

$$\|b\|_{E_\theta} \leq Cu^\theta \|a\|_{E_\theta}; \quad (2)$$

(с) пара $\vec{E}$ $\mathcal{H}$ -монотонна и существуют такие $C > 0$ и $\theta_0 \in (0, 1)$, что если $a \in E_{\theta_0}$, $b \in E + E(2^{-k})$, $u > 0$ удовлетворяют неравенству (1), то $b \in E_{\theta_0}$ и соотношение (2) выполнено для $\theta = \theta_0$;

(д) пара $\vec{E}$ $\mathcal{H}$ -монотонна и E инвариантна относительно сдвига.

Последний результат позволяет привести примеры $\mathcal{H}$ -монотонных, но не $\mathcal{H}_u$ -монотонных банаховых пар. Возьмем в качестве G любую банахову решетку последовательностей со следующими свойствами: а) G сепарабельна; б) $\|e^k\|_G = 1$; в) G обладает свойствами (LSP) и (RSP); д) G не инвариантна относительно сдвига. Тогда банахова пара $(G, G(2^{-k}))$ $\mathcal{H}$ -монотонна и не $\mathcal{H}_u$ -монотонна. Примерами решеток с перечисленным набором свойств являются прямая сумма $l_q(\mathbb{Z}_-) \oplus l_r(\mathbb{Z}_+)$ ($1 \leq q \neq r < \infty$) с естественной нормой, а также пространство Цирельсона T [7].

В связи с этим возникает естественный вопрос о существовании сепарабельной инвариантной относительно сдвига банаховой решетки, обладающей свойствами (RSP) и (LSP) и отличной от l_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0 . Ввиду результатов работы [2], а также теоремы 1 его можно переформулировать следующим образом: существует ли $\mathcal{H}_u$ -монотонная пара вида $(E, E(2^{-k}))$, где E — сепарабельная банахова решетка, $\|e_n\|_E = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $E \neq l_p$ ($1 \leq p < \infty$), $E \neq c_0$? Последний вопрос интересен также в связи с известным результатом Калтона [2, теорема 4.6] о том, что в случае, когда E — симметричная банахова решетка, такая пара $\mathcal{H}$ -монотонна, лишь если $E = l_p$ ($1 \leq p < \infty$) или $E = c_0$. В последнем разделе работы речь пойдет о таком примере, интересном, как мы надеемся, также и в других отношениях.

4. Банахова решетка, инвариантная относительно сдвига, со свойствами (RSP) и (LSP). В следующих построениях используются идеи конструкции пространства Цирельсона, предложенной Фигелем и Джонсоном (см. [7] или [8]). Одновременно имеются и существенные отличия нашего примера от упомянутого, связанные, прежде всего, с тем, что нам нужно было построить пространство, инвариантное относительно сдвига (пространство Цирельсона этим свойством не обладает).

Разбиением будем называть произвольный набор $c = \{c[j]\}_{j=1}^p$ отрезков $c[j] = \{k \in \mathbb{Z} : a_j \leq k \leq a_{j+1} - 1\}$, где $a_j \in \mathbb{Z}$, $a_{j+1} > a_j$ для всех $j = 1, \dots, p$. Разбиение c будем называть допустимым, если $\text{card}\{j : \text{card } c[j] \leq k\} \leq 14k$ для любого $k > 0$. Множество всех допустимых разбиений обозначим через $\mathcal{A}$.

Определим последовательность норм $\{\|\cdot\|_m\}_{m=0}^\infty$ на пространстве финитных векторов c_{00} . Если $x = \sum_n \alpha_n e_n \in c_{00}$, то

$$\|x\|_0 = \max_n |\alpha_n|, \quad \|x\|_{m+1} = \max \left(\|x\|_m, \frac{1}{2} \max_{c \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{\text{card } c} \|x \chi_{c[j]}\|_m \right), \quad m \geq 0,$$

где χ_E — характеристическая функция множества E . Тогда c_{00} с нормой $\|\cdot\|_m$ является нормированной решеткой, инвариантной относительно сдвига, и $\|x\|_{c_0} \leq \|x\|_m \leq \|x\|_{l_1}$ ($x \in c_{00}$). Поскольку $\|x\|_{m+1} \geq \|x\|_m$ для любого x , существует предел $\|x\|_{\mathcal{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x\|_m$. Пополнение пространства c_{00} по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ обозначим через F . Нетрудно показать, что для любого $x \in F$

$$\|x\|_{\mathcal{A}} = \max \left(\|x\|_{c_0}, \frac{1}{2} \sup_{c \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{\text{card } c} \|x \chi_{c[j]}\|_{\mathcal{A}} \right).$$

Теорема 2. *Банахова решетка F сепарабельна, инвариантна относительно сдвига, обладает свойствами (RSP), (LSP) и не совпадает с l_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0 .*

Следствие 1. *Банахова пара $(F, F(2^{-k}))$ $\mathcal{K}_u$ -монотонна, но не является равномерным частичным ретрактом никакой весовой L_p -пары.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, 1, North-Holland, Amsterdam, 1991. [2] N. J. Kalton, *Studia Math.*, **106**:3 (1993), 233–277. [3] M. Cwikel, P. Nilsson, in: *Interpolation Spaces and Allied Topics in Analysis* (Lund, 1984), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1070, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 54–65. [4] А. А. Седаев, Докл. АН СССР, **209**:4 (1973), 798–800. [5] В. И. Дмитриев, С. Г. Крейн, В. И. Овчинников, в кн.: *Геометрия линейных пространств и теория операторов*, Ярослав. гос. ун-т, Ярославль, 1977, 31–74. [6] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980. [7] P. G. Casazza, T. J. Shura, *Tsirelson's Space*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1363, Springer-Verlag, Berlin, 1989. [8] T. Figiel, W. B. Johnson, *Compositio Math.*, **29** (1974), 179–190.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
18 сентября 2008 г.

Самарский госуниверситет
e-mail: ktikhomirov@yandex.ru

УДК 517.988.63+517.988.521

О разрешимости уравнений с частично аддитивными операторами

© 2010. Н. А. ЕРЗАКОВА

1. Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем $\mu(\Omega) < \infty$, μ — непрерывная мера; u_0, u_{01} — измеримые функции с положительными значениями (единицы), θ — функция, равная нулю п. в., $P_D u$ — функция, совпадающая с u для всех $s \in D$