Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Забарило, А. Г. Завадский, Однопараметрические оснащенные частично упорядоченные множества и их представления, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 72–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 04:00:42

теорема Гиса в действительности является теоремой о четырех вершинах для временноподобных замкнутых кривых на $\Sigma \subset \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ с лоренцевой метрикой постоянной кривизны (4).

Мы благодарны Л. Гийо за неоценимую помощь на начальной стадии работы, а также С. Лаззарини за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Наука, 1979.
2. Duval C., Guieu L. J. Geom. Phys., **33**, 103–127 (2000).
3. Ghys E. Cercles osculateurs et géométrie lorentzienne. Colloquium talk, Journée inaugurale du CMI, Marseille (February 1995).
4. Hubbard J. In: Riemann surfaces and related topics. Proc. of the Stony Brook Conference 1978 (I. Kra and B. Maskit, eds.). Ann. of Math. Stud., **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 257–275.
5. Kostant B., Sternberg S. In: Quantum theories and geometry (M. Cahen and M. Flato, eds.). Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, pp. 113–125.
6. Kulkarni R. Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **401**, 117–130 (1985).
7. Ovsienko V. Yu., Tabachnikov S. Selecta Math. (N.S.), **2**, No. 2, 297–307 (1996).
8. Tabachnikov S. In: Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 180 (34), 1997, pp. 229–239.
9. Wolf J. A. Spaces of constant curvature. McGraw-Hill, New York, 1967.

Université de la Méditerranée and CPT-CNRS
e-mail: duval@cpt.univ-mrs.fr
CNRS, Centre de Physique Théorique
e-mail: ovsienco@cpt.univ-mrs.fr

Поступило в редакцию
1 сентября 1998 г.

УДК 512.552.8+512.6

Однопараметрические оснащенные частично упорядоченные множества и их представления

© 2000. А. В. ЗАБАРИЛЛО, А. Г. ЗАВАДСКИЙ

Хорошо известно, что представления частично упорядоченных множеств были введены в начале 70-х годов Л. А. Назаровой и А. В. Ройтером [1] в связи с изучением представлений конечномерных алгебр [2]. Особенность матричных задач, соответствующих представлениям частично упорядоченных множеств, состоит в том, что в категории, определяющей такую задачу (и называемой вектроидом¹), все объекты и их кольца эндоморфизмов одномерны над заданным полем (см. [3]).

В настоящей работе эта классическая ситуация получает развитие в направлении рассмотрения таких матричных задач над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, которые соответствуют вектроидам не только с одномерными, но и с двумерными объектами, причем кольцо эндоморфизмов любого двумерного объекта предполагается изоморфным полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. В этом случае вектроид задается частично упорядоченным множеством с некоторой простой дополнительной структурой, которое мы называем оснащенный. Цель работы — дать полную классификацию представлений однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств.

¹Вектроид — это спектроид [3], вложенный в категорию векторных пространств.

Перейдем к точным определениям и формулировке результатов.

Частично упорядоченное множество $\mathbf{P}$ назовем *оснащенным*, если выполняются три условия:

- 1) точки множества $\mathbf{P}$ делятся на *одинарные* и *двойные*;
- 2) отношения порядка между точками делятся на *слабые* и *сильные*;
- 3) если $x < y$ — слабое отношение, то точки x, y двойные, и если при этом $x < t < y$, то отношения $x < t$ и $t < y$ тоже слабые (и автоматически точка t двойная).

Условимся через $x \prec y$ ($x \triangleleft y$) обозначать слабое (сильное) отношение. Будем называть множество $\mathbf{P}$ *обычным*, если его оснащение тривиально (т. е. все точки являются одинарными).

Всякое оснащенное множество $\mathbf{P}$ определяет *матричную задачу* смешанного типа над парой $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. А именно, рассмотрим прямоугольную матрицу M , разделенную на вертикальные полосы M_x ($x \in \mathbf{P}$), где элементы полосы M_x принадлежат полю $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), если точка x одинарная (двойная). Над матрицей M разрешается осуществлять следующие преобразования:

- (а) элементарные преобразования строк всей матрицы M над $\mathbb{R}$;
- (б) элементарные преобразования столбцов полосы M_x над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$), если точка x одинарная (двойная);
- (с) прибавления столбцов полосы M_x к столбцам полосы M_y с коэффициентами из $\mathbb{C}$, если отношение $x < y$ слабое;
- (д) независимые прибавления действительных и мнимых частей столбцов полосы M_x к действительным и мнимым частям (в любых сочетаниях) столбцов полосы M_y с коэффициентами из $\mathbb{R}$, если отношение $x < y$ сильное.

Разделенные на полосы матрицы такого типа (называемые *матричными представлениями* множества $\mathbf{P}$) считаются *эквивалентными*, если они переводятся друг в друга указанными преобразованиями, и задача заключается в классификации неразложимых в естественном смысле матриц с точностью до эквивалентности.

Ясно, что при тривиальном оснащении мы получим обычную задачу о представлениях частично упорядоченного множества в смысле [1] над полем $\mathbb{R}$. Если же множество $\mathbf{P}$ является антицепью (т. е. состоит из попарно несравнимых элементов), то возникает задача того же типа, что и в [4].

Размерность представления M есть вектор $d = \underline{\dim} M = (d_0; d_x \mid x \in \mathbf{P})$, где d_0 — число строк матрицы M , а d_x — число столбцов полосы M_x .

Если вектор d не имеет нулевых координат, то его (и представление M) называют *точным*.

Представления оснащенного множества $\mathbf{P}$ над парой колец многочленов $(\mathbb{R}[t], \mathbb{C}[t])$ определяются аналогично случаю пары $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Говорят, что множество бесконечного типа (т. е. имеющее бесконечно много неэквивалентных неразложимых представлений над парой $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) является *однопараметрическим*, если существует его $(\mathbb{R}[t], \mathbb{C}[t])$ -представление, которое порождает в стандартном смысле¹ почти все неразложимые $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ -представления любой фиксированной размерности.

Отметим, что представления обычных множеств конечного типа описаны М. М. Клейнером [6, 7], а однопараметрических — В. В. Отрашевской [8, 9].

¹Путем подстановки вместо t любой квадратной матрицы A над $\mathbb{R}$, а вместо чисел λ — скалярных матриц λE того же порядка.

Полное решение вопроса о представлениях оснащенных множеств конечного типа следует из более общего результата Б. Клемп и Д. Симсона о шуровских вектроидах конечного типа [10].

Во всех упомянутых случаях получены списки точных множеств.

Каждому оснащеному множеству $\mathbf{P}$ сопоставляется квадратичная форма Титса f вида $f(d) = d_0^2 + \sum_x f_x d_x^2 + \sum_{x < y} p_{xy} f_x f_y d_x d_y - \sum_x f_x d_x d_0$, где $f_x = 1$ ($f_x = 2$), если точка x одинарная (двойная), и $p_{xy} = 1$ ($p_{xy} = 1/2$), если $x \triangleleft y$ ($x \prec y$). Как обычно, *корнями* формы f (множества $\mathbf{P}$) называются векторы, получаемые отражениями из простых корней (см. [5]), а *мнимыми корнями* — нули формы f (ясно, что если d — корень, то $f(d) = 1$ или $f(d) = 2$).

Назовем *весом* множества $\mathbf{P}$ наибольшую из сумм $\sum_{x \in X} f_x$, вычисленную для всевозможных антицепей $X \subset \mathbf{P}$.

Пусть $(m_1, \dots, m_n)$ обозначает кардинальную сумму n обычных цепей с числом точек $m_1, \dots, m_n$ соответственно, а (N, m) — кардинальную сумму (тоже неоснащенную) m -точечной цепи и множества $N = \{x < y > z < t\}$. Будем рассматривать также кардинальные суммы типа $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$, $(\tilde{m}_1, m_2)$, $(\tilde{m}_1, m_2, m_3)$, где $\tilde{m}$ обозначает цепь из двойных точек $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_m$, такую, что $x_1 \prec x_m$ при $m > 1$. Множества вида $K_1 = (1, 1, 1, 1)$, $K_2 = (2, 2, 2)$, $K_3 = (1, 3, 3)$, $K_4 = (N, 4)$, $K_5 = (1, 2, 5)$ и $M_1 = (\bar{1}, \bar{1})$, $M_2 = (\bar{3}, 1)$, $L_1 = (\bar{1}, 1, 1)$, $L_2 = (\bar{2}, 2)$ принято называть *критическими* [6, 10].

ТЕОРЕМА 1. *Оснащенное частично упорядоченное множество является однопараметрическим тогда и только тогда, когда оно имеет вес ≤ 4 и содержит ровно одно критическое подмножество.*

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы вектор $d > 0$, соответствующий оснащеному однопараметрическому множеству, был размерностью неразложимого представления, необходимо и достаточно, чтобы он был корнем, мнимым корнем или особым вектором (особые векторы перечислены в замечании ниже). При этом*

- (а) *если d — корень или особый вектор, то существует ровно одно (с точностью до изоморфизма) неразложимое представление размерности d ;*
- (б) *если d — мнимый корень, то существует бесконечно много неизоморфных неразложимых представлений размерности d .*

ТЕОРЕМА 3. *Нетривиально оснащенное однопараметрическое частично упорядоченное множество является точным тогда и только тогда, когда оно изоморфно или антиизоморфно одному из следующих 28 множеств (буквами a, b, p, q обозначены двойные точки, буквами x, y, u, v — одинарные): $M_1, M_2, M_3 = \{a < x, b\}$, $M_4 = \{a < x, b < y\}$, $M_5 = \{a < x < y, b\}$, $M_6 = \{x < a, b < y\}$, $M_7 = \{x < a < y, b\}$, $M_8 = \{a \prec p \succ b\}$, $M_9 = \{x > a \prec p \succ b\}$, $M_{10} = \{p \prec (a, b) \prec q\}$, где $p \prec q\}$, $M_{11} = \{(a, b) \prec p \prec q, \text{ где } (a, b) \prec q\}$, $M_{12} = \{a > x < y > b\}$, $M_{13} = \{p \prec (a, b) \prec q, \text{ где } p \triangleleft q\}$, $L_1, L_2, L_3 = \{a < x, u, v\}$, $L_4 = \{a, u < x > v\}$, $L_5 = \{a < x < y, u, v\}$, $L_6 = \{a < x, (u, v) < y\}$, $L_7 = \{a, (u, v) < x < y\}$, $L_8 = \{a < x, y < (u, v)\}$, $L_9 = \{x < a < y, u, v\}$, $L_{10} = \{a, x < (u, v) < y\}$, $L_{11} = \{a \prec p \succ u, v\}$, $L_{12} = \{p \prec a \prec q > u > p, v\}$, $L_{13} = \{u > p \prec a \prec q > v, \text{ где } p \prec q\}$, $L_{14} = \{a > x < y > (u, v)\}$, $L_{15} = \{u > p \prec a \prec q > v, \text{ где } p \triangleleft q\}$.*

[Здесь $(x, y) < z$ означает $x < z$ и $y < z$ (аналогично обозначение используется для символов $>, \prec, \succ$).]

ЗАМЕЧАНИЕ. Точный вектор d , соответствующий нетривиально оснащенному однопараметрическому множеству $\mathbf{P}$, является *особым* тогда и только тогда, когда множество $\mathbf{P}$ (рассматриваемое с точностью до антиизоморфизма) совпадает с одним из множеств M_{12} , M_{13} , L_{14} , L_{15} и $d = (d_0; d_a, d_b, d_x, d_y) = (2k + 1; k, k, 1, 1)$ при $\mathbf{P} = M_{12}$, $d = (d_0; d_a, d_b, d_p, d_q) = (2k + 2; k, k, 1, 1)$ при $\mathbf{P} = M_{13}$, $d = (d_0; d_a, d_u, d_v, d_x, d_y) = (2k + 1; k, k, k, 1, 1)$ при $\mathbf{P} = L_{14}$, $d = (d_0; d_a, d_u, d_v, d_p, d_q) = (4k + 2; 2k, 2k, 2k, 1, 1)$ при $\mathbf{P} = L_{15}$ ($k \geq 1$). При этом $f(d) = 2$ в случае $\mathbf{P} = M_{12}$, L_{14} и $f(d) = 4$ в случае $\mathbf{P} = M_{13}$, L_{15} (об особых векторах обычных однопараметрических множеств см., например, [11]).

В ходе работы получен также полный список неразложимых представлений всех перечисленных множеств (и им антиизоморфных) в матричной форме.

Доказательство основано на разработке и применении алгоритмов дифференцирования оснащенных множеств (развивающих алгоритмы, описанные в [1, 11]), использовании результатов работы [12] и непосредственных вычислениях.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **28**, 5–31 (1972).
2. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Препринт 73.9 ИМ АН УССР (1973).
3. Gabriel P., Roiter A. V. Representations of finite-dimensional algebras. Algebra VIII, Encycl. Math. Sci., vol. 73, Springer-Verlag, 1992.
4. Dlab V., Ringel C. M. Indecomposable representations of graphs and algebras. Mem. Amer. Math. Soc., **6**, No. 173 (1976).
5. Ройтер А. В. Труды МИАН, **148**, 201–210 (1978).
6. Клейнер М. М. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **28**, 32–41 (1972).
7. Клейнер М. М. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **28**, 42–59 (1972).
8. Отрашевская В. В. Укр. матем. ж., **28**, № 3, 334–341 (1976).
9. Отрашевская В. В. В сб.: Матричные задачи, Киев, 1977, с. 144–149.
10. Klemp B., Simson D. J. Algebra, **134**, No. 2, 390–468 (1990).
11. Завадский А. Г. Изв. АН СССР, сер. матем., **55**, № 5, 1007–1048 (1991).
12. Dlab V., Ringel C. M. Linear Algebra Appl., **17**, 107–124 (1977).

Киевский национальный университет
строительства и архитектуры

Поступило в редакцию
30 декабря 1997 г.

УДК 515.16+517.9

Слабые ККС и КАС и индуктивные пределы семейств групп и алгебр*

© 2000. Р. С. ИСМАГИЛОВ

1. Еще о канонических коммутационных и антикоммутационных соотношениях (кратко ККС и КАС). Пусть V — вещественное линейное пространство и τ — невырожденная кососимметрическая форма на V . Тогда ККС — это семейство унитарных операторов $\{U(x), x \in V\}$ (действующих в некотором гильбертовом пространстве), таких, что

$$U(x + y) = \exp(i\tau(x, y))U(x)U(y) \quad (x, y \in V) \quad (1)$$

*Исследование поддержано РФФИ, грант № 96-15-96249.