Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Паршин, О голоморфных представлениях дискретных групп Гейзенберга, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 2, 92–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2992>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 03:46:32

О голоморфных представлениях дискретных групп Гейзенберга*

© 2010. А. Н. ПАРИШИН

Пусть H, H', C — конечно порожденные абелевы группы, и пусть $\langle -, - \rangle: H \times H' \rightarrow C$ — билинейное отображение. Мы называем *дискретной группой Гейзенберга* G множество $H \times H' \times C$ с законом композиции $(n, p, c)(m, q, a) = (n + m, p + q, c + a + \langle n, q \rangle)$, где $n, m \in H, p, q \in H', c, a \in C$. Введем комплексные торы $\mathbb{T}_H = \text{Hom}(H, \mathbb{C}^*), \mathbb{T}_{H'} = \text{Hom}(H', \mathbb{C}^*), \mathbb{T}_C = \text{Hom}(C, \mathbb{C}^*)$ и $\mathbb{T}_G = \mathbb{T}_H \times \mathbb{T}_{H'} \times \mathbb{T}_C$. Группа H гомоморфно отображается в $\mathbb{T}_{H'}$ по формуле

$$h \in H \mapsto \{h' \mapsto \chi_C(\langle h, h' \rangle)\}, \quad \chi_C \in \mathbb{T}_C. \quad (1)$$

Обозначим через H_χ ядро этого отображения. Если $\chi \in \mathbb{T}_{H'}$, то пусть $h(\chi)$ — сдвиг характера χ на образ элемента h в $\mathbb{T}_{H'}$. Имеем $h(\chi_{H'})(p) = \chi_{H'}(p)\chi_C(\langle h, p \rangle)$ для всех $p \in H'$. Для любого $\chi \in \mathbb{T}_G, \chi = \chi_H \otimes \chi_{H'} \otimes \chi_C$, пусть G_χ — подмножество в G , определяемое условием

$$g \in G_\chi \iff \chi(gng^{-1}) = \chi(n) \text{ для всех } n \in H'C. \quad (2)$$

Тогда G_χ — нормальный делитель в G . Он зависит только от $\chi_C, G_\chi = H_\chi H'C, H_\chi = G_\chi \cap H$, и $\chi|_{G_\chi}$ является характером группы G_χ [7].

Определение 1. Пусть V_χ — пространство комплекснозначных функций f на G , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $f(gh) = \chi(h)f(g)$ для всех $h \in G_\chi$;
- 2) носитель $\text{Supp}(f)$ содержится в конечном числе левых классов смежности подгруппы G_χ .

Левые сдвиги определяют представление π_χ группы G в пространстве V_χ .

Предложение 1. Справедливы следующие утверждения:

- 1) пространства V_χ не содержат нетривиальных подпространств, инвариантных относительно группы G ;
- 2) линейные преобразования пространства V_χ , перестановочные с операторами представления π_χ , кратны тождественному преобразованию;
- 3) представления V_χ и $V_{\chi'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (a) $\chi_C = \chi'_C$,
- (b) существует такое $h \in H$, что $\chi'_{H'} = h(\chi_{H'})$,
- (c) $\chi'_H(h) = \chi_H(h)$ для всех $h \in H_\chi$ или, эквивалентно, существует такое $t \in \mathbb{T}_{H/H_\chi} = \text{Hom}(H/H_\chi, \mathbb{C}^*)$, что $\chi'_H = t(\chi_H)$.

Здесь тор $\mathbb{T}_{H/H_\chi}$ действует сдвигами на объемлющем торе $\mathbb{T}_H$. Таким образом, классы эквивалентности представлений V_χ отвечают орбитам групп $\mathbb{T}_{H/H_\chi} \times H/H_\chi$ на всех подмножествах $\mathbb{T}_H \times \mathbb{T}_{H'} \times \{\chi_C\}$ в торе $\mathbb{T}_G$.

* Автор поддержан грантами РФФИ 08-01-00095-а, ведущих научных школ 1987.2008.1, INTAS 05-1000008-8118.

Группа G является полупрямым произведением групп H и $H'C$, и доказательство утверждений 2 и 3 получается использованием формализма Макки ([4], [8]), описывающего категорию индуцированных представлений полупрямых произведений дискретных абелевых групп (см. [1, гл. 1], [9, гл. 1]). Будем говорить, что χ_C — *характер общего положения*, если форма $\chi_C(\langle h, h' \rangle)$, $h \in H$, $h' \in H'$, невырождена по обоим аргументам. Тогда $H_\chi = (0)$. Для доказательства утверждения 1 в случае характера χ_C общего положения нужно реализовать представление π_χ в пространстве регулярных функций на торе $\mathbb{T}_H$ и воспользоваться стандартным аргументом эргодичности (в топологии Зарисского). Для случая, когда G_χ — подгруппа конечного индекса, представление π_χ будет конечномерным. Общий случай сводится к этим двум.

Ограничение функций на группе G на подгруппу H определяет биекцию $V_\chi \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(H, H_\chi)$, где $\mathcal{D}(H, H_\chi)$ — пространство таких функций f на H , что $f(hh_1) = \chi(h_1)f(h)$ для всех $h_1 \in H_\chi$ и носитель $\text{Supp}(f)$ содержится в конечном числе классов смежности подгруппы H_χ . В пространстве $\mathcal{D}(H, H_\chi)$ имеется базис, состоящий из функций δ_n , $n \in H/H_\chi$, сосредоточенных на классе смежности nH_χ подгруппы H_χ . Такие функции, вообще говоря, нельзя выбрать однозначно, но если фиксировать множество $\bar{H} \subset H$, $0 \in \bar{H}$, представителей классов смежности, то условие $\delta_n(\bar{n}) = 1$ (где $\bar{n}$ — представитель класса n) определяет базис однозначно. Тогда характер представления π_χ можно определить как след матриц операторов $\pi_\chi(g)$ в этом базисе. Легко видеть, что если подгруппа G_χ имеет бесконечный индекс в G , то операторы представления π_χ могут не иметь следа (соответствующая сумма диагональных элементов будет расходиться). Простейший пример: $G = \text{Heis}(3, \mathbb{Z})$, $H = H' = C = \mathbb{Z}$, $\langle -, - \rangle$ — умножение в кольце $\mathbb{Z}$.

Чтобы определить, тем не менее, характер представления, нужно воспользоваться конструкцией, хорошо известной в теории групп петель [6, §14.1], и добавить к группе G «вращения петли». В нашей ситуации это означает, что группу G нужно расширить до полупрямого произведения $\hat{G} = G \rtimes A$, где $A \subset \text{Hom}(H, H')$ — нетривиальная подгруппа.

Определение 2. Пусть $k \in A$ и зафиксирован элемент $r \in H$. Пусть

$$k(m, p, c) = (m, p + k(m), c + \frac{1}{2}\langle m - r, k(m) \rangle), \quad \text{где } m \in H, p \in H', c \in C.$$

Предложение 2. Выражение для k определяет автоморфизм группы G , если выполнены следующие условия:

- 1) $\langle m, k(m') \rangle = \langle m', k(m) \rangle$ для всех $m, m' \in H$;
- 2) $\langle m - r, k(m) \rangle \in 2C$ для всех $m \in H$.

Предположим, кроме того, что

- 3) $k(H_\chi) \subset \text{Ker}(\chi_{H'})$.

Представление группы G в пространстве V_χ продолжается до представления $\hat{\pi}_\chi$ расширенной группы $\hat{G}$ в том же пространстве. В базисе δ_n , $n \in H/H_\chi$, операторы нового представления имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_\chi(m, p, c, k)\delta_n &= \chi_C(c)\chi_{H'}(p + k(n - m))\varrho(n, m) \\ &\times \chi_C(\langle n - m, p \rangle + \frac{1}{2}\langle n - m - r, k(n - m) \rangle)\delta_{n-m \bmod H_\chi}, \quad (3) \end{aligned}$$

где числа $\varrho(n, m) \in \mathbb{C}^*$ могут зависеть от выбора $\bar{H}$, но $\varrho(n, m) = \chi_H(m)$, если $m \in H_\chi$. Пусть

$$(\mathbb{T}_C \times A)_+ := \{(\chi, k) \in \mathbb{T}_C \times A : |\chi_C(\langle n, k(n) \rangle)| < 1 \text{ для всех } n \in H/H_\chi, n \neq 0\}$$

— соответствие в $\mathbb{T}_C \times A$ и $A(\chi)$ — проекция на A множества $(\mathbb{T}_C \times A)_+ \cap (\{\chi\} \times A)$.

Теорема 1. Если $\widehat{G}(\chi) = G \times A(\chi) \subset \widehat{G}$, то

1) след $\text{Tr } \hat{\pi}_\chi(g)$ существует для всех $g \in \widehat{G}(\chi)$;

2) если $g = (m, p, c, k)$, $k \in A(\chi)$, то $\text{Tr } \hat{\pi}_\chi(g) = 0$ для $m \notin H_\chi$, а для $m \in H_\chi$ имеем

$$\text{Tr } \hat{\pi}_\chi(g) = \chi_H(m) \chi_{H'}(p) \chi_C(c) \sum_{n \in H/H_\chi} \chi_{H'}(k(n)) \chi_C(\langle n, p \rangle + \tfrac{1}{2} \langle n - r, k(n) \rangle).$$

Пример. Пусть $C = \mathbb{Z}$, $\chi_C(c) = \lambda^c$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Тогда $A(\chi) = A_+ \amalg A_-$, где $A_\pm = \{k \in A : \text{форма } \langle m, k(m) \rangle \text{ положительно (отрицательно) определена на } H/H_\chi, \text{ если } |\lambda| \leq 1\}$.

Добавим еще одно условие на k :

4) $\chi_C(\tfrac{1}{2} \langle m - r, k(m) \rangle) = 1$ для всех $m \in H_\chi$.

В предыдущем примере это условие выполнено, если λ — элемент бесконечного порядка в $\mathbb{C}^*$. Заметим, что величина из условия 4) всегда равна ± 1 .

Пусть $\mathbb{T}_A = \text{Hom}(A, \mathbb{C}^*)$ и $\mathbb{T}_{\widehat{G}} = \mathbb{T}_G \times \mathbb{T}_A$. Если $\hat{\chi} = (\chi, \chi_A) \in \mathbb{T}_{\widehat{G}}$, то положим $\hat{\pi}_{\hat{\chi}} = \hat{\pi}_\chi \otimes \chi_A$. Тогда $\text{Tr } \hat{\pi}_{\hat{\chi}} = \text{Tr } \hat{\pi}_\chi \cdot \chi_A$. Для данного $g \in \widehat{G}(\chi)$ след $\text{Tr } \hat{\pi}_{\hat{\chi}}(g)$ определен как функция на области $T' = \mathbb{T}_H \times \mathbb{T}_{H'} \times \mathbb{T}_C(k) \times \mathbb{T}_A$ в торе $\mathbb{T}_{\widehat{G}}$, где $\mathbb{T}_C(k)$ — проекция на $\mathbb{T}_C$ множества $(\mathbb{T}_C \times A)_+ \cap (\mathbb{T}_C \times \{k\})$. Определим действие группы $\mathbb{T}_{H/H_\chi} \times H$ на множестве $\mathbb{T}_H \times \mathbb{T}_{H'} \times \{\chi_C\} \times \mathbb{T}_A \subset T'$ формулой

$$(t, h)(\chi_H, \chi_{H'}, \chi_C, \chi_A) = (t(\chi_H), h(\chi_{H'}), \chi_C, \chi'_A), \quad (4)$$

где

$$\chi'_A(k) = \chi_A(k) \chi_{H'}(k(h)) \chi_C(\tfrac{1}{2} \langle h - r, k(h) \rangle), \quad k \in A.$$

Определим $\mathcal{M}_G(k)$, $k \in A$, как факторпространство области T' по такому действию. Имеем диаграмму расслоений $\mathcal{M}_G(k) \rightarrow \mathcal{A}_G(k) \rightarrow \mathbb{T}_C(k)$, последнее со слоем $\mathbb{T}_{H'}/\text{Im } H$. Если $\overline{\mathcal{A}}_G(k)$ — универсальная накрывающая многообразия $\mathcal{A}_G(k)$, то положим $\overline{\mathcal{M}}_G(k) = \mathcal{M}_G(k) \times_{\mathcal{A}_G(k)} \overline{\mathcal{A}}_G(k)$. На накрытии $\varphi: \overline{\mathcal{M}}_G(k) \rightarrow \mathcal{M}_G(k)$ действует дискретная группа $\Gamma = \pi_1(\mathcal{A}_G(k))$.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

1) для данного $g = (m, p, c, k) \in \widehat{G}$ $\text{Tr } \hat{\pi}_{\hat{\chi}}(g)$ инвариантен относительно действия (4) и определяет голоморфную функцию $F_g = F_g(\hat{\chi})$ на $\mathcal{M}_G(k)$;

2) пусть $\hat{\chi}, \hat{\chi}' \in \mathbb{T}_{\widehat{G}}$; представления $\hat{\pi}_{\hat{\chi}}$ и $\hat{\pi}_{\hat{\chi}'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\widehat{G}(\chi) = \widehat{G}(\chi')$ и $F_g(\hat{\chi}) = F_g(\hat{\chi}')$ для всех $g \in \widehat{G}(\chi)$;

3) для данного $g = (m, p, c, k) \in \widehat{G}$ функция $\varphi^* F_g$ является автоморфной формой на многообразии $\overline{\mathcal{M}}_G(k)$ относительно группы Γ .

Последнее утверждение аналогично известному свойству характеров представлений аффинных алгебр Каца–Мути ([3], [6]).

Пример. Пусть $G = \text{Heis}(3, \mathbb{Z})$, $A = \mathbb{Z}$, $r = 1$, $\widehat{G} = G \rtimes \mathbb{Z}$, $\chi_C(c) = \lambda^c$, $\chi_C \in \mathbb{T}_C(k > 0) = \{0 < |\lambda| < 1\}$. Тогда $\mathbb{T}_{H'}/\text{Im } H =: E_\lambda$ — эллиптическая кривая, где $\mathbb{T}_{H'} = \mathbb{C}^*$, $\text{Im } H = \{\lambda^{\mathbb{Z}}\}$. Имеем [2]

$$\text{Pic}(E_\lambda) = H^1(E_\lambda, \mathcal{O}^*) = H^1(H, \mathcal{O}^*(\mathbb{T}_{H'})) \rightarrow \text{Hom}(H, H') = A \ni k,$$

$$\text{Pic}(E_\lambda) = \{\varphi(n, z) = a^{-n} z^{-kn} \lambda^{-\frac{1}{2}kn(n-1)} : a \in \mathbb{C}^*, k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{T}_{H'}\}.$$

Пусть линейное расслоение L отвечает коциклу φ . Тогда

$$H^0(E_\lambda, L) = \{f(z), z \in \mathbb{T}_{H'} : f(\lambda^n z) = \varphi(n, z)f(z)\}$$

и достаточно, чтобы $f(\lambda z) = a^{-1} z^{-k} f(z)$. Тета-ряды

$$\vartheta_{p,k,a}(z, \lambda) := z^p \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^n z^{kn} \lambda^{np + \frac{1}{2}kn(n-1)}$$

(это ряды Пуанкаре относительно φ) сходятся для всех $z \in \mathbb{C}^*$, $0 < |\lambda| < 1$, $k > 0$ и образуют для $0 \leq p < k$ базис в пространстве $H^0(E_\lambda, L)$. Наконец,

$$\text{Tr } \hat{\pi}_{\hat{\chi}}(0, p, c, k) = \lambda^c t^k \vartheta_{p,k,1}(z, \lambda), \quad (z, \lambda) \in \mathcal{A}_G(k), t \in \mathbb{T}_A.$$

В этой ситуации утверждение 3) теоремы 2 очевидно (тета-функции, поднятые на $\overline{\mathcal{A}}_G(k) = \mathbb{C} \times \{\text{верхняя полуплоскость}\}$, являются якобиевыми модулярными формами относительно действия подгруппы группы $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{Z})$). Утверждение 2) следует в одну сторону из прямого вычисления, а в обратную сторону из теоремы о вложении эллиптической кривой в проективную плоскость с помощью тета-функций.

В более общей ситуации, когда H, H' — группы без кручения, $C = \mathbb{Z}$, $k: H \rightarrow H'$ — мономорфизм с конечным коядром, $A = \mathbb{Z}k$ и форма $\langle -, k(-) \rangle$ положительно определена, мы имеем два двойственных абелевых многообразия, $E = \mathbb{T}_{H'}/\text{Im } H$ и $E' = \mathbb{T}_H/\text{Im } H'$. Расслоение Пуанкаре $\mathcal{P}$ над $E \times E'$ определяется как факторпространство тора $\mathbb{T}_H \times \mathbb{T}_{H'} \times \mathbb{C}^*$ по действию группы $H \times H'$, $(h, h')(\chi_H, \chi_{H'}, u) = (h'(\chi_H), h(\chi_{H'}), u\chi_H(h)\chi_{H'}(h')\chi_C(\langle h, h' \rangle))$, $h \in H$, $h' \in H'$, $u \in \mathbb{C}^*$. Морфизм k определяет изогению $\varphi_k: E \rightarrow E'$. Имеем точную последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{T}_{H'/H} \rightarrow \text{Ker } \varphi_k \rightarrow H'/H \rightarrow 1$$

и, согласно [5], конечную группу Гейзенберга $\widetilde{\text{Ker } \varphi_k}$, являющуюся центральным расширением группы $\text{Ker } \varphi_k$. Выбор инвариантной формы старшей степени на торе $\mathbb{T}_{H'} \times \mathbb{T}_C \times \mathbb{T}_A$ определяет интегрирование голоморфных функций на $\mathcal{M}_G(k)$ по некоторой мере $d\mu$.

Теорема 3. Пусть $L := (\text{Id} \times \varphi_k)^* \mathcal{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для всех $g = (t, p, c, k) \in \widehat{G}$ значения характеров $\text{Tr } \hat{\pi}_{\hat{\chi}}(g)\chi_C^{-1}(c)\chi_A^{-1}(k)$ являются тета-функциями для расслоения L ;

2) если $\hat{\chi} = 1 \otimes \chi_{H'} \otimes \chi_C \otimes 1$, то функции $\text{Tr } \hat{\pi}_{\hat{\chi}}(0, p, 0, k)$ для $p \in H' \bmod k(H)$ образуют базис в пространстве $H^0(E, L)$; он является стандартным базисом Мамфорда [5] для действия группы $\text{Ker } \varphi_k$ на пространстве $H^0(E, L)$;

3) если $g = (0, p, c, k)$, $g' = (0, p', c', k')$ не сопряжены в $\widehat{G}$, то

$$\int_{\mathcal{M}_G(k)} \mathrm{Tr} \hat{\pi}_{\chi}(g) \overline{\mathrm{Tr} \hat{\pi}_{\chi}(g')} d\mu = 0.$$

В условиях теоремы 3 можно получить утверждение 2 теоремы 2, используя теорему Лефшеца о проективном вложении абелевых многообразий с помощью тета-функций.

Исходный характер $\chi_H|_{H_{\chi}} \otimes \chi_{H'} \otimes \chi_C$ можно восстановить, зная $\mathrm{Tr} \hat{\pi}_{\chi}(g)$.

Предложение 3. $\chi_H(m)\chi_{H'}(p)\chi_C(c) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \mathrm{Tr} \hat{\pi}_{\chi}(m, p, c, lk)$, если $m \in H_{\chi}$, $k \in A(\chi)$, $l \in \mathbb{N}$.

Граница $\partial \mathbb{T}_C(k)$ области $\mathbb{T}_C(k)$ может содержать такие характеры $\chi \in \mathbb{T}_C$, что H_{χ} имеет конечный индекс в H . Значения этих характеров имеют конечный порядок в группе $\mathbb{C}^*$. Если группа H_{χ} тривиальна, то пространство V_{χ} не зависит от χ .

Предложение 4. Пусть $\chi_C \in \mathbb{T}_C(k)$ и группа H_{χ} , $\chi = \chi_H \otimes \chi_{H'} \otimes \chi_C$, тривиальна. Если $\chi' \in \partial \mathbb{T}_C(k)$ — характер конечного порядка, то пространство V_{χ} представления π_{χ} разлагается в бесконечную прямую сумму конечномерных представлений вида V_{μ} , где $\mu = \mu' \otimes \chi_{H'} \otimes \chi'$ и μ' пробегает все характеры группы $H_{\chi'}$.

Автор глубоко признателен М. Бургеру и А. М. Вершику за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. Н. Бернштейн, А. В. Зелевинский, УМН, **31:3** (1976), 5–70. [2] L. Gerritzen, Math. Ann., **196** (1972), 323–346. [3] V. Кас, D. Peterson, Adv. Math., **53:2** (1984), 125–264. [4] G. Mackey, Amer. J. Math., **73** (1951), 576–592. [5] D. Mumford, Invent. Math., **1** (1966), 287–354. [6] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990. [7] Т. Pytlik, Monatsh. Math., **93:4** (1982), 309–328. [8] Ж.-П. Серр, *Линейные представления конечных групп*, Мир, М., 1970. [9] M.-F. Vignéras, *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , Birkhäuser, Boston, MA, 1996.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: parshin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
28 декабря 2009 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 26.03.2010. Подписано к печати 26.04.2010. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 2,0 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 247 экз. Заказ 197.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6