Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев,
Периодическая задача для нелинейного уравнения
Соболева, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44,
выпуск 3, 14–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2993>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:51:08

Периодическая задача для нелинейного уравнения типа Соболева

© 2010. Е. И. КАЙКИНА, П. И. НАУМКИН, И. А. ШИШМАРЁВ

Изучено асимптотическое поведение при больших временах решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева. Рассмотрен также случай не малых начальных возмущений. В последнем случае поведение решений при больших временах имеет альтернативный характер.

§1. Введение

В этой работе мы изучим асимптотическое поведение при больших временах решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева

$$\begin{cases} \partial_t(u(t, x) - \Delta u(t, x)) - \alpha \Delta u(t, x) = -\lambda |u(t, x)|^\sigma u(t, x), & x \in \mathbb{T}^n, t > 0, \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \mathbb{T}^n, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbb{T}^n$ есть n -мерный тор (т.е. куб $\Omega = ([-\pi, \pi])^n$ с естественными отождествлениями соответствующих граней), $\alpha, \lambda, \sigma > 0$.

Уравнения типа Соболева [12] описывают различные физические процессы, и их исследованию посвящено огромное количество работ. В связи с локальной разрешимостью для уравнений типа Соболева в операторно-дифференциальной форме отметим книгу [1]. В [3] установлены условия разрешимости задачи Коши и смешанных задач для дифференциальных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. Уравнения типа Соболева со знакопеременным или необратимым оператором при старшей производной по времени в абстрактной постановке изучались в работе [4]. Применение полугрупп операторов к общей теории сингулярных уравнений типа Соболева было развито в [11]. Вырожденные уравнения типа Соболева исследовались с абстрактной точки зрения в [20]. Иногда в литературе уравнения типа Соболева называются также псевдопараболическими. В [2] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа $\partial_t(u - c\Delta u) = \varphi(u)$ в классе растущих функций $\varphi(u)$. В [6] доказано разрушение за конечное время положительного решения нелинейного уравнения типа Соболева с источником $\partial_t(u - \Delta u) - \Delta \psi(u) + q(u) = 0$. Оптимальное управление в линейных задачах для уравнений псевдопараболического типа исследовалось в [8]. В [9] доказано существование обобщенных решений для линейных уравнений соболевского типа более высокого порядка. Исследованию псевдопараболических уравнений методами функций комплексного переменного посвящена работа [14]. Доказательству принципа максимума для уравнений псевдопараболического типа посвящена работа [17]. Псевдопараболические уравнения с монотонной нелинейностью изучались в [28]. В [10] дано всестороннее освещение современного состояния теории линейных и нелинейных уравнений соболевского типа, дан вывод модельных линейных уравнений соболевского типа,

получены условия разрушения за конечное время и глобальной разрешимости. В [7] доказано разрушение решений задачи Коши для уравнений соболевского типа. В случае глобальной по времени разрешимости исследовались вопросы асимптотического поведения решений рассматриваемых задач при больших временах, теория рассеяния и устойчивость решений типа уединенных волн как для одномерных, так и для многомерных уравнений типа Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса и Розенау–Бюргерса. В [5] исследовано асимптотическое поведение при больших временах решений задачи Коши с большими начальными данными для нелинейного уравнения типа Соболева с диссипацией в суперкритическом, критическом и субкритическом случаях.

Большая литература посвящена изучению периодических по пространственной переменной задач. Так, асимптотическая устойчивость стационарных периодических решений уравнения Фишера доказана в [21]. Периодическая задача для уравнения Хопфа рассмотрена в [24]. Асимптотика при больших временах решений периодической задачи для уравнения Бюргерса получена в [26]. В [15] доказано существование единственного глобального по времени решения периодической задачи для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса и получены оценки убывания решений по времени. Некоторые оценки убывания решений уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса с периодическими начальными данными, имеющими нулевое среднее значение, найдены в [15], где было показано также, что асимптотическое поведение определяется гармониками более высокого порядка. В [16] доказано существование единственного глобального по времени решения периодической задачи для уравнения Ландау–Гинзбурга, а также получены оценки убывания по времени в различных нормах. Явные периодические решения уравнения Ландау–Гинзбурга найдены в [27]. Глобальное существование и оценки убывания по времени решений периодической задачи для уравнения Курамото–Сивашинского получены в [22]. В случае уравнения Бенджамена–Бонь–Махони–Перегрина–Бюргерса существование глобальных решений и оценки убывания энергии по времени получены в [30]. Периодическая задача для уравнений Буссинеска изучена в [29]. Поведение при больших временах решений периодической задачи для системы законов сохранения изучено в [19]. В [18] рассмотрены вопросы существования и разрушения решений периодической задачи для уравнения Камассы–Хольма. Асимптотические формулы для решений периодических задач для ряда нелинейных уравнений получены в [25].

Насколько нам известно, поведение при больших временах решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева (1) не было рассмотрено до сих пор. Нашей целью является доказательство асимптотических формул для решений такой периодической задачи. При этом с помощью энергетических оценок мы откажемся от требования малости начальных возмущений. Обычно периодическим задачам свойственна экспоненциальная оценка убывания решений по времени, однако в настоящей работе мы докажем, что решения периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева (1) имеют степенной порядок убывания по времени. Также отметим, что характер асимптотики решений периодической задачи (1) оказывается одним и тем же для всего диапазона изменения параметра $\sigma > 0$, в отличие от соответствующей задачи Коши, где возникает критический показатель $\sigma = 2/n$ (см. [23]).

Приведем некоторые обозначения. Пространство Соболева 2π -периодических функций зададим следующим образом:

$$\mathbf{H}^s = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2 : \|\phi\|_{\mathbf{H}^s}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} |\hat{\phi}_k|^2 < \infty \right\}, \quad s \geq 0.$$

Здесь и ниже $\langle k \rangle = \sqrt{1 + |k|^2}$, а через $\hat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} e^{-i(k \cdot x)} \phi(x) dx$ обозначены коэффициенты Фурье 2π -периодической функции $\phi(x)$. Определим также две полунормы $\|\phi\|_{\mathbf{H}^s} \equiv \|\phi - \hat{\phi}_0\|_{\mathbf{H}^s}$ и $\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \equiv \|\phi - \hat{\phi}_0\|_{\mathbf{L}^p}$. Через $\mathbf{C}(I; B)$ будем обозначать пространство непрерывных функций, отображающих временной интервал I в банахово пространство B . Различные постоянные там, где это не вызовет недоразумений, будем обозначать одной и той же буквой C . Иногда для упрощения формул мы будем опускать аргументы у функций, причем в случае, когда функция $u(t, x)$ зависит от двух переменных t и x , мы будем избегать записи $u(x)$ (т.е. в первую очередь всегда будем опускать пространственную переменную x).

Теперь перейдем к формулировке основных утверждений работы.

Теорема 1. Пусть $\sigma > 0$. Предположим, что начальные данные $\phi \in \mathbf{L}^p$ при $p = \max(1 + \sigma, n\sigma/2)$ достаточно малы, $\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \leq \varepsilon^2$, и имеют среднее значение $\hat{\phi}_0 = \varepsilon > 0$. Тогда существует единственное решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^p)$ периодической задачи (1). Это решение имеет следующую асимптотику:

$$u(t, x) = At^{-1/\sigma} + O(t^{-1/\sigma-1})$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \Omega$, где $A = (\sigma\lambda)^{-1/\sigma}$.

В следующей теореме рассмотрим случай произвольных (не малых) начальных возмущений. Отметим, однако, что в этом случае поведение решения при больших временах имеет альтернативный характер.

Теорема 2. Пусть $\sigma > 0$ при $n = 1, 2, 3, 4$ и $0 < \sigma \leq 4/(n-4)$ при $n \geq 5$. Предположим, что начальные данные ϕ принадлежат $\mathbf{H}^2$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^2)$ периодической задачи (1). Для этого решения справедлива оценка

$$|u(t, x)| \leq Ce^{-\gamma t},$$

или оно имеет асимптотическое представление

$$u(t, x) = At^{-1/\sigma} + O(t^{-1/\sigma-1})$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \Omega$, где $\gamma \in (0, \alpha/(2 + 2\sigma))$, $A = \pm(\sigma\lambda)^{-1/\sigma}$.

Замечание. В случае не малых начальных возмущений мы не можем, вообще говоря, гарантировать только один из вариантов поведения решения при больших временах в теореме 2. Отметим, впрочем, частный случай, когда начальные данные нечетные: тогда среднее значение решения автоматически всегда равно нулю, и поэтому решение экспоненциально убывает по времени.

В следующем параграфе мы получим предварительные оценки для оператора Грина периодической задачи для линейного уравнения типа Соболева и докажем глобальное существование решений периодической задачи для нелинейного уравнения (1). Также мы изучим асимптотическое поведение решений обыкновенного дифференциального уравнения, которое возникает при анализе

поведения нулевой гармоники решения. Затем в последующих двух параграфах мы докажем теоремы 1 и 2 соответственно.

§2. Предварительные оценки

В этой работе мы изучим асимптотическое поведение при больших временах решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева

$$\begin{cases} \partial_t(u(t, x) - \Delta u(t, x)) - \alpha \Delta u(t, x) = f(t, x), & x \in \mathbb{T}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \mathbb{T}^n. \end{cases} \quad (2)$$

Пользуясь рядами Фурье, мы можем формально представить оператор Грина $\mathcal{G}(t)$ в виде

$$\mathcal{G}(t)\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\psi}_k e^{i(x \cdot k) - L_k t}$$

где символ L_k равен $\alpha|k|^2/(1 + |k|^2)$. Поэтому решение периодической задачи (2) можно записать формулой Дюамеля:

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)(1 - \Delta)^{-1} f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Сначала мы установим простые оценки решения задачи (2) в лебеговской $\mathbf{L}^p$ -норме и $\dot{\mathbf{L}}^p$ -полунорме, $1 \leq p \leq \infty$.

Лемма 1. Пусть $\phi \in \mathbf{L}^p$ и $f(t) \in \mathbf{L}^p$ при $1 \leq p \leq \infty$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C\|\phi\|_{\mathbf{L}^p}, & \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} &\leq Ce^{-\alpha t/2}\|\phi\|_{\dot{\mathbf{L}}^p}, \\ \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \int_0^t \|f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau, \\ \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)f(\tau) d\tau \right\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} &\leq C \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)/2} \|f(\tau)\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$.

Доказательство. Отметим асимптотическое разложение для символа L_k :

$$L_k = \alpha + \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\langle k \rangle^{2j}} + O(\langle k \rangle^{-2N-2})$$

при $|k| \rightarrow \infty$, где $\alpha > 0$ и $a_j \in \mathbb{R}$. Выпишем асимптотическое разложение для e^{-tL_k} при $|k| \rightarrow \infty$,

$$e^{-tL_k} = e^{-\alpha t|k|^2} + e^{-\alpha t} \sum_{j=0}^N \frac{b_j(t)}{\langle k \rangle^{2j}} + R_{k,N}(t),$$

где $b_j(t) = \alpha^j t^j / j!$ и остаточный символ

$$R_{k,N}(t) = -e^{-\alpha t|k|^2} + e^{-\alpha t} \left(e^{-\alpha t/(1+|k|^2)} - \sum_{j=0}^N \frac{b_j(t)}{\langle k \rangle^{2j}} \right)$$

удовлетворяет оценке

$$|R_{k,N}(t)| \leq C \frac{\langle t \rangle^{N+1} e^{-\alpha t/2}}{\langle k \rangle^{2N+2}}.$$

Введем операторы $\mathcal{B}_0 = \mathbf{1}$ и

$$\mathcal{B}_j \phi = \int_{\Omega} B_j(x-y) \phi(y) dy$$

с ядрами

$$B_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i(x \cdot k)} \langle k \rangle^{-2j}$$

для $j \geq 1$ и остаточный оператор

$$\mathcal{R}_N(t) \phi = \int_{\Omega} \tilde{R}(t, x-y) \phi(y) dy$$

с ядром

$$\tilde{R}(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i(x \cdot k)} R_{k,N}(t),$$

задаваемый своим символом $R_{k,N}(t)$. Имеем $B_j(x) \in \mathbf{C}^\infty(\Omega \setminus \{0\})$, и для всех $j \geq 1$, $x \in \Omega \setminus \{0\}$, справедливы оценки

$$|B_j(x)| \leq C_1 + C_2 |x|^{2j-n}$$

(см. [13]). Также имеем $|\tilde{R}(t, x)| \leq C e^{-\alpha t/2}$. Поэтому для всех $j \geq 0$

$$\|\mathcal{B}_j \phi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^p}, \quad (4)$$

$$\|\mathcal{R}_N(t) \phi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C e^{-\alpha t/2} \|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \quad (5)$$

при любом $1 \leq p \leq \infty$. Таким образом,

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0(t) + e^{-\alpha t} \sum_{j=0}^N b_j(t) \mathcal{B}_j + \mathcal{R}_N(t),$$

где оператор $\mathcal{G}_0(t) \psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i(x \cdot k)} e^{-\alpha t |k|^2} \hat{\psi}_k$ удовлетворяет оценкам $\|\mathcal{G}_0(t) \phi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^p}$ и $\|\mathcal{G}_0(t) \phi\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} \leq C e^{-\alpha t/2} \|\phi\|_{\dot{\mathbf{L}}^p}$ для всех $t > 0$. В силу (4)

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\alpha t} \sum_{j=0}^n b_j(t) \mathcal{B}_j \phi \right\|_{\mathbf{L}^p} &\leq e^{-\alpha t} \sum_{j=0}^n |b_j(t)| \|\mathcal{B}_j \phi\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C e^{-\alpha t} (1 + t^n) \|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C e^{-\alpha t/2} \|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$ при $1 \leq p \leq \infty$. Теперь ввиду (5) получаем первые две оценки леммы. Используя эти оценки, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \leq C \int_0^t \|f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau, \\ \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} &\leq C \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) f(\tau)\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} d\tau \leq C \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)/2} \|f(\tau)\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} d\tau. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана. $\square$

В следующей лемме мы установим локальное и глобальное по времени существование решений периодической задачи (1).

Лемма 2. Пусть $\sigma > 0$. Предположим, что $\phi \in \mathbf{L}^p$ при $p = \max(1 + \sigma, n\sigma/2)$. Тогда для некоторого $T > 0$ существует единственное решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^p)$ периодической задачи (1). Более того, если начальные данные $\phi \in \mathbf{L}^p$, $p = \max(1 + \sigma, n\sigma/2)$, достаточно малы, то существует единственное глобальное по времени решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^p)$ периодической задачи (1).

Доказательство. Положим $\mathcal{N}(u) = -\lambda|u|^\sigma u$. С помощью оператора Грина $\mathcal{G}(t)$ линейной периодической задачи (2) перепишем нелинейную периодическую задачу (1) в виде интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)(1 - \Delta)^{-1} \mathcal{N}(u)(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Будем решать уравнение (6) с помощью сжимающих отображений. Зададим отображение

$$\mathcal{A}v(t) = \mathcal{G}(t)\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)(1 - \Delta)^{-1} \mathcal{N}(v)(\tau) d\tau$$

в пространстве $\mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^p)$, где время $T > 0$ выберем позже. Ввиду неравенства

$$|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)| = \lambda||u|^\sigma u - |v|^\sigma v| \leq C(|u|^\sigma + |v|^\sigma)|u - v|,$$

пользуясь теоремой вложения Соболева $\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\|(1 - \delta)\phi\|_{\mathbf{L}^q}$ при $1/p = 1/q - 2/n$ (можем взять $q = p/(1 + \sigma) \geq 1$), получаем

$$\|(1 - \Delta)^{-1}(\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v))\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)\|_{\mathbf{L}^q} \leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^p}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{L}^p}^\sigma)\|u - v\|_{\mathbf{L}^p}$$

для любых $u, v \in \mathbf{L}^p$. Согласно лемме 1,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{A}v(t)\|_{\mathbf{L}^p} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^p} + \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)(1 - \Delta)^{-1} \mathcal{N}(v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} + CT \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{N}(v)(t)\|_{\mathbf{L}^q} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} + CT \sup_{t \in [0, T]} \|v\|_{\mathbf{L}^p}^{\sigma+1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что существует время T (зависящее от нормы начальных данных $\|\phi\|_{\mathbf{L}^p}$), такое, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{A}v(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq 2C\|\phi\|_{\mathbf{L}^p}.$$

Точно так же оценим разность:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}v(t)\|_{\mathbf{L}^p} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)(1 - \Delta)^{-1} (\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v))(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq CT \sup_{t \in [0, T]} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} (\|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p}^\sigma + \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^p}^\sigma) \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, T]} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathbf{L}^p}, \end{aligned}$$

если выбрать $T > 0$ достаточно малым. Значит, $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением замкнутого шара радиуса $2C\|\phi\|_{\mathbf{L}^p}$ в пространстве $\mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^p)$. Следовательно, существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^p)$ периодической

задачи (1). В случае малых начальных данных, $\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} = \varepsilon$, стандартным продолжением (см. [23, с. 18]) получаем существование единственного глобального по времени решения $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^p)$ задачи (1), которое также мало, $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Лемма 2 доказана. $\square$

Пользуясь энергетическими оценками, мы докажем в следующей лемме глобальное по времени существование решений периодической задачи (1) в случае не малых начальных данных.

Лемма 3. Пусть $\sigma > 0$ при $n = 1, 2, 3, 4$ и $0 < \sigma \leq 4/(n-4)$ при $n \geq 5$. Предположим, что $\phi \in \mathbf{H}^2$. Тогда существует единственное глобальное по времени решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^2)$ периодической задачи (1). Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется время $T \geq 0$, такое, что

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2} \leq \varepsilon$$

для всех $t \geq T$.

Доказательство. Пусть u — решение, построенное в лемме 2. Умножим уравнение (1) на $u - \Delta u$ и проинтегрируем по области Ω . Получим

$$0 = \int_{\Omega} (u - \Delta u)(\partial_t(u - \Delta u) - \alpha \Delta u + \lambda|u|^{\sigma}u) dx.$$

Отсюда, интегрируя по частям, с учетом периодичности, получаем

$$\frac{dE}{dt} + H = 0,$$

где энергия E равна $\int_{\Omega} (u - \Delta u)^2 dx$ и

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Omega} ((-u + \Delta u)\alpha \Delta u + \lambda|u|^{\sigma}u(u - \Delta u)) dx \\ &= \int_{\Omega} (\alpha(\nabla u)^2 + \alpha(\Delta u)^2 + \lambda|u|^{\sigma+2} + \lambda(\sigma+1)|u|^{\sigma}(\nabla u)^2) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство $dE/dt \leq 0$, интегрируя которое приходим к неравенству $E(t) \leq E(0)$. Это дает оценку решения

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2} \leq C$$

для всех $t > 0$. В силу этой априорной оценки, применяя лемму 2 и теорему вложения Соболева $\|u\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\|u\|_{\mathbf{H}^2}$ при $1/p = 1/2 - 2/n$, стандартной процедурой продолжения приходим к существованию единственного глобального по времени решения $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^2)$ периодической задачи (1). Также имеем оценку

$$\int_0^{\infty} H(t) dt \leq C,$$

в силу которой для любого $\varepsilon > 0$ найдется T , такое, что $\|u(T)\|_{\mathbf{H}^2} \leq \varepsilon^2$. Поскольку энергия $E(t)$ убывает по времени, получаем

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2} \leq \varepsilon$$

для всех $t \geq T$. Лемма 3 доказана. $\square$

Благодаря лемме 3 изучение асимптотики решений сводится к случаю малых начальных данных.

Теперь мы перейдем к исследованию асимптотического поведения решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = -\lambda|y|^\sigma y + \psi(t), \quad (7)$$

которое возникает при анализе поведения среднего значения решения исходной задачи.

Лемма 4. Пусть $\sigma > 0$. Предположим, что $\psi \in \mathbf{C}([0, \infty))$ и для всех $t > 0$ имеет место оценка $|\psi(t)| \leq \varepsilon^{2+\sigma} e^{-\Lambda t}$ с некоторым $\Lambda \in (0, \alpha/2)$. Допустим также, что $y(0) = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда решение уравнения (7) имеет следующую асимптотику:

$$y(t) = At^{-1/\sigma} + O(t^{-1/\sigma-1})$$

при $t \rightarrow \infty$, где $A = (\sigma\lambda)^{-1/\sigma}$.

Доказательство. Перепишем уравнение (7) в виде

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda|y|^\sigma y(1 - f(t)),$$

где $f(t) = \psi(t)/(\lambda|y(t)|^\sigma y(t))$, и проинтегрируем по времени:

$$y(t) = y(0) \left(1 + \sigma\lambda|y(0)|^\sigma \left(t - \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \right)^{-1/\sigma}. \quad (8)$$

Докажем неравенство

$$|f(t)| < C\varepsilon e^{-\mu t} \quad (9)$$

для всех $t \geq 0$, где $\mu \in (0, \Lambda)$. Заметим, что $|f(0)| = |\psi(0)|/(\lambda|y(0)|^{1+\sigma}) < C\varepsilon$. Тогда по непрерывности мы можем найти наибольший интервал времени $[0, T]$, на котором для всех $t \in [0, T]$ выполнена оценка $|f(t)| \leq C\varepsilon e^{-\mu t}$. Согласно (8),

$$|y(t)|^{1+\sigma} \geq |y(0)|^{1+\sigma} \left(1 + \frac{\sigma\lambda}{2}|y(0)|^\sigma t \right)^{-1-1/\sigma}$$

для всех $t \in [0, T]$, откуда

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq \frac{|\psi(t)|}{\lambda|y(0)|^{1+\sigma}} \left(1 + \frac{\sigma\lambda}{2}|y(0)|^\sigma t \right)^{1+1/\sigma} \\ &\leq \frac{\varepsilon^{2+\sigma} e^{-\Lambda t}}{\lambda\varepsilon^{1+\sigma}} \left(1 + \frac{\sigma\lambda}{2}\varepsilon^\sigma t \right)^{1+1/\sigma} < C\varepsilon e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (9) верна для всех $t \geq 0$. В частности, из (8) получаем асимптотику

$$y(t) = \varepsilon(1 + \sigma\lambda\varepsilon^\sigma t(1 + O(\varepsilon t^{-1})))^{-1/\sigma} = At^{-1/\sigma} + O(t^{-1/\sigma-1})$$

при $t \rightarrow \infty$. Лемма 4 доказана. $\square$

Теперь снова обратимся к уравнению (7) при несколько более общих предположениях. При этом, однако, поведение решений уравнения (7) при больших временах приобретает характер альтернативы.

Лемма 5. Пусть $\psi \in \mathbf{C}([0, \infty))$ и для всех $t > 0$ выполнена оценка $|\psi(t)| \leq C\varepsilon^{1+\sigma}e^{-\Lambda t}$ при некотором $\Lambda \in (0, \alpha/2)$. Предположим, что $|y(0)| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда для решения уравнения (7) справедлива оценка

$$|y(t)| \leq C\varepsilon e^{-\gamma t}$$

или оно имеет асимптотическое представление

$$|y(t)| = (\sigma\lambda t)^{-1/\sigma} + O(t^{-1/\sigma-1})$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\gamma \in (0, \Lambda/(1+\sigma))$.

Доказательство. Положим $\Psi(t) = \sup_{\tau \geq t} \langle \tau \rangle^2 |\psi(\tau)|$. Функция $\Psi(t)$ монотонно невозрастающая и подчиняется оценке $\Psi(t) \leq C\varepsilon^{1+\sigma} \langle t \rangle^2 e^{-\Lambda t}$ для всех $t \geq 0$. Возможны два случая. Если $|y(t)|^{1+\sigma} < (8/\lambda)\Psi(t)$ для всех $t \geq 0$, то мы приходим к первой оценке леммы: $|y(t)| < C(\Psi(t))^{1/(1+\sigma)} \leq C\varepsilon e^{-\gamma t}$ для всех $t \geq 0$, поскольку $\gamma \in (0, \Lambda/(1+\sigma))$. В противном случае существует первый момент времени $T \geq 0$, такой, что

$$|y(T)|^{1+\sigma} = \frac{8}{\lambda} \Psi(T).$$

Пусть $f(t) = \psi(t)/(\lambda|y(t)|^\sigma y(t))$. Докажем следующую оценку:

$$|f(t)| < \frac{1}{4} \langle t \rangle^{-2} \quad (10)$$

для всех $t \geq T$. Поскольку

$$\langle T \rangle^2 |f(T)| = \frac{\langle T \rangle^2 |\psi(T)|}{\lambda |y(T)|^{1+\sigma}} \leq \frac{\Psi(T)}{\lambda |y(T)|^{1+\sigma}} = \frac{1}{8},$$

по непрерывности мы можем найти наибольший момент времени $T_1 > T \geq 0$, такой, что

$$|f(t)| \leq \frac{1}{4} \langle t \rangle^{-2} \quad (11)$$

для всех $t \in [T, T_1]$. Тогда, интегрируя уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda |y|^\sigma y (1 - f(t))$$

по времени $t \geq T$, получим

$$y(t) = y(T) \left(1 + \sigma\lambda |y(T)|^\sigma \left(t - T - \int_T^t f(\tau) d\tau \right) \right)^{-1/\sigma} \quad (12)$$

для всех $t \in [T, T_1]$. Ввиду (11) из (12) следует, что

$$|y(t)|^{1+\sigma} \geq |y(T)|^{1+\sigma} \left(1 + \frac{\sigma\lambda}{2} |y(T)|^\sigma (t - T) \right)^{-1-1/\sigma}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq \frac{|\psi(t)|}{\lambda |y(t)|^{1+\sigma}} \left(1 + \frac{\sigma\lambda}{2} |y(T)|^\sigma (t - T) \right)^{1+1/\sigma} \\ &\leq \frac{\Psi(T)}{\lambda |y(T)|^{1+\sigma}} \langle t \rangle^{-2} + Ct^{1+1/\sigma} |\psi(t)| \leq \frac{1}{8} \langle t \rangle^{-2} + C\varepsilon^{1+\sigma} e^{-\gamma t} < \frac{1}{4} \langle t \rangle^{-2} \end{aligned}$$

для всех $t \in [T, T_1]$, так как $\varepsilon > 0$ мало. Значит, оценка (10) справедлива для всех $t \geq T$. В частности, из (12) получаем асимптотику

$$y(t) = \pm(\sigma\lambda t)^{-1/\sigma} + O(t^{-1/\sigma-1})$$

при $t \rightarrow \infty$. Лемма 5 доказана. $\square$

§3. Доказательство теоремы 1

Глобальное существование единственного решения $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^p)$ периодической задачи (1) вытекает из леммы 2. Также имеем оценку

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq \varepsilon \quad (13)$$

для всех $t \geq 0$. Чтобы доказать, что решение имеет указанную в теореме асимптотику, рассмотрим среднее значение $h(t) = \widehat{u}_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} u(t, x) dx$. Тогда имеем представление $u(t, x) = h(t) + r(t, x)$. Для нулевой гармоники $h(t)$ из уравнения (1) получаем

$$h' = \widehat{\mathcal{N}_0}(h + r), \quad h(0) = \widehat{\phi}_0,$$

где $\widehat{\mathcal{N}_0}(u) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{\Omega} |u(t, x)|^\sigma u(t, x) dx$. Отметим, что из оценки (13) вытекает неравенство $|h(t)| \leq \varepsilon$ для всех $t \geq 0$. Тогда, используя формулу (3), получим для функции $r(t, x)$ интегральное уравнение

$$r(t) = \mathcal{G}(t)(\phi - \widehat{\phi}_0) + \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)(1 - \Delta)^{-1}(\mathcal{N}(u)(\tau) - \widehat{\mathcal{N}_0}(u)(\tau)) d\tau. \quad (14)$$

Докажем следующую оценку:

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} < C\varepsilon^2 e^{-\Lambda t} \quad (15)$$

для всех $t \geq 0$, с некоторым $0 < \Lambda < \alpha/2$. От противного, предположим, что (15) нарушается в некоторый момент времени T . Тогда в силу непрерывности

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\varepsilon^2 e^{-\Lambda t} \quad (16)$$

для всех $t \in [0, T]$. Заметим, что $\widehat{\mathcal{N}_0}(h) = \mathcal{N}(h)$. Поэтому из (13) и (16) при $q = p/(1 + \sigma)$ получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(u)(t)\|_{\mathbf{L}^q} &= \|\mathcal{N}(u) - \widehat{\mathcal{N}_0}(u)\|_{\mathbf{L}^q} \leq C\|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(h)\|_{\mathbf{L}^q} + C|\widehat{\mathcal{N}_0}(h + r) - \widehat{\mathcal{N}_0}(h)| \\ &\leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^p}^\sigma + |h|^\sigma)\|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\varepsilon^{2+\sigma} e^{-\Lambda t} \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, T]$. Отсюда и из (14) в силу оценок леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} \|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C\varepsilon^2 e^{-\alpha t/2} + C \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)/2} \|\mathcal{N}(u)(\tau)\|_{\mathbf{L}^q} d\tau \\ &\leq C\varepsilon^2 e^{-\alpha t/2} + C\varepsilon^{2+\sigma} e^{-\alpha t/2} \int_0^t e^{(\alpha/2-\Lambda)\tau} d\tau < C\varepsilon^2 e^{-\Lambda t}, \end{aligned}$$

так как $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Таким образом, оценка (15) имеет место для всех $t \geq 0$. Теперь мы можем записать

$$\widehat{\mathcal{N}_0}(h + r) = \mathcal{N}(h) + \psi,$$

где $\psi(t) = \widehat{\mathcal{N}}_0(h+r) - \mathcal{N}(h)$. Ввиду (15) с помощью неравенства Гёльдера можем оценить $\psi(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &= |\lambda| \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (|u(t, x)|^\sigma u(t, x)) dx - |h(t)|^\sigma h(t) \right| \\ &\leq C \|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(h)\|_{L^1} \leq C \|(|r|^\sigma + |h|^\sigma)r\|_{L^1} \leq C (\|u\|_{L^{1+\sigma}}^\sigma + |h|^\sigma) \|r(t)\|_{\mathbf{L}^{1+\sigma}} \\ &\leq C\varepsilon^\sigma \|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\varepsilon^{2+\sigma} e^{-\Lambda t}. \end{aligned}$$

Следовательно, применяя лемму 4 к функции $h(t)$, получаем асимптотику

$$h(t) = At^{-1/\sigma} + O(t^{-1/\sigma-1})$$

при $t \rightarrow \infty$, где $A = (\sigma\lambda)^{-1/\sigma}$. Эта формула вместе с оценкой (15) дает результат теоремы. Теорема 1 доказана. $\square$

§4. Доказательство теоремы 2

Существование глобального по времени решения $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^2)$ периодической задачи (1) следует из леммы 3. Кроме того, с некоторого момента времени T , т. е. для всех $t \geq T$, имеем неравенство

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2} \leq \varepsilon. \quad (17)$$

Чтобы найти асимптотику решений, рассмотрим периодическую задачу (1) с начальным моментом в T . Сдвигом времени $t' = t - T$ мы всегда можем вернуться к периодической задаче (1) с начальным моментом в нуле и с некоторыми малыми начальными данными $\phi \in \mathbf{H}^2$. Как и выше, обозначим среднее значение решения через $h(t) = \widehat{u}_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} u(t, x) dx$. Отметим, что из (17) вытекает оценка $|h(t)| \leq \varepsilon$ для всех $t \geq 0$. Теперь докажем оценку

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} < C\varepsilon e^{-\Lambda t} \quad (18)$$

для всех $t \geq 0$, где $0 < \Lambda < \alpha/2$. Будем доказывать ее от противного. Предположим, что (18) нарушается в некоторый момент времени T_1 . Тогда по непрерывности имеем

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\varepsilon e^{-\Lambda t} \quad (19)$$

для всех $t \in [0, T_1]$. Поэтому из (17) и (19) получаем для всех $t \in [0, T_1]$ оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(u)(t)\|_{\mathbf{L}^q} &\leq C \|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(h)\|_{\mathbf{L}^q} + C |\widehat{\mathcal{N}}_0(h+r) - \widehat{\mathcal{N}}_0(h)| \\ &\leq C \|(|r|^\sigma + |h|^\sigma)r\|_{\mathbf{L}^q} + C \|(|r|^\sigma + |h|^\sigma)r\|_{L^1} \\ &\leq C (\|u\|_{\mathbf{L}^p}^\sigma + |h|^\sigma) \|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C (\|u\|_{\mathbf{H}^2}^\sigma + |h|^\sigma) \|r(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\varepsilon^{1+\sigma} e^{-\Lambda t} \end{aligned}$$

при $q = p/(1 + \sigma)$, $p = \max(1 + \sigma, n\sigma/2)$, так как по теореме вложения Соболева $\|u\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\|u\|_{\mathbf{H}^2}$, если $\sigma > 0$ при $n = 1, 2, 3, 4$ и $0 < \sigma \leq 4/(n - 4)$ при $n \geq 5$. Из

(14) в силу оценок леммы 1, пользуясь теоремой вложения Соболева, находим

$$\begin{aligned} \|r(t)\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} &\leq C e^{-\alpha t/2} \|\phi\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} + C \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)/2} \|(1-\Delta)^{-1} \mathcal{N}(u)(\tau)\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} d\tau \\ &\leq C e^{-\alpha t/2} \|\phi\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} + C \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)/2} \|\mathcal{N}(u)(\tau)\|_{\dot{\mathbf{L}}^q} d\tau \\ &\leq C \varepsilon e^{-\alpha t/2} + C \varepsilon^{1+\sigma} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)/2} e^{-\Lambda \tau} d\tau < C \varepsilon e^{-\Lambda t}, \end{aligned}$$

поскольку $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Таким образом, неравенство (18) справедливо для всех $t \geq 0$. Теперь благодаря (18) мы можем оценить $\psi(t) = \widehat{\mathcal{N}_0}(h+r) - \mathcal{N}(h)$ следующим образом:

$$|\psi(t)| \leq C(\|u\|_{\dot{\mathbf{L}}^p}^\sigma + |h|^\sigma) \|r(t)\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} \leq C \varepsilon^\sigma \|r(t)\|_{\dot{\mathbf{L}}^p} \leq C \varepsilon^{1+\sigma} e^{-\Lambda t}$$

для всех $t \geq 0$, где $\Lambda \in (0, \alpha/2)$. Таким образом, для функции $h(t)$ выполнены условия леммы 5, откуда получаем один и только один из следующих вариантов поведения:

$$|h(t)| \leq C \varepsilon e^{-\gamma t}$$

при всех $t \geq 0$ или

$$|h(t)| = (\sigma \lambda t)^{-1/\sigma} + O(t^{-1/\sigma-1})$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\gamma \in (0, \Lambda/(1+\sigma))$. Эти формулы вместе с оценкой (18) приводят к результату теоремы 2. Теорема 2 доказана. $\square$

Мы глубоко признательны рецензенту за весьма ценные замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
- [2] А. Л. Гладков, *Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений*, Матем. заметки, **60**:3 (1996), 356–362.
- [3] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998.
- [4] И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов, *Неклассические дифференциально-операторные уравнения*, Наука, Новосибирск, 2000.
- [5] Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв, *Асимптотика решений при больших временах для нелинейных уравнений типа Соболева*, УМН, **64**:3(387) (2009), 3–72.
- [6] А. И. Кожанов, *Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником*, Матем. заметки, **65**:1 (1999), 70–75.
- [7] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, *О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками*, Изв. РАН, сер. матем., **69**:4 (2005), 89–128.
- [8] С. И. Ляшко, *Обобщенное управление линейными системами*, Наукова думка, Киев, 1998.
- [9] Д. А. Номировский, *О гомеоморфизмах, осуществляемых некоторыми дифференциальными операторами с частными производными*, Укр. матем. ж., **12** (2004), 1243–1252.
- [10] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

- [11] Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров, *Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева*, Сиб. матем. ж., **36**:5 (1995), 1130–1145.
- [12] С. Л. Соболев, *Об одной новой задаче математической физики*, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**:1 (1954), 3–50.
- [13] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [14] H. Begehr, D. Q. Dai, *Initial boundary value problem for nonlinear pseudoparabolic equations*, Complex Variables, Theory Appl., **18**:1–2 (1992), 33–47.
- [15] P. Biler, *Large-time behavior of periodic solutions to dissipative equations of Korteweg–de Vries–Burgers type*, Bull. Polish Acad. Sci., Math., **32**:7–8 (1984), 401–405.
- [16] C. Bu, R. Shull, K. Zhao, *A periodic boundary value problem for a generalized 2D Ginzburg–Landau equation*, Hokkaido Math. J., **27**:1 (1998), 197–211.
- [17] E. Di Benedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [18] A. Constantin, J. Escher, *Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation*, Commun. Pure Appl. Math., **51**:5 (1998), 475–504.
- [19] C. M. Dafermos, *Large time behavior of periodic solutions of hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differential Equations, **121**:1 (1995), 183–202.
- [20] A. Favini, A. Yagi, *Degenerate differential equations in Banach spaces*, Marcel Dekker, New York, 1999.
- [21] P. C. Fife, *Asymptotic states for equations of reaction and diffusion*, Bull. Amer. Math. Soc., **84**:5 (1978), 693–726.
- [22] B. Guo, X. M. Xiang, *The large time convergence of spectral method for generalized Kuramoto–Sivashinsky equations*, J. Comput. Math., **15**:1 (1997), 1–13.
- [23] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations*, Lecture Notes in Math., vol. 1884, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [24] B. T. Hayes, *Stability of solutions to a destabilized Hopf equation*, Comm. Pure Appl. Math., **48**:2 (1995), 157–166.
- [25] E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Periodic problem for a model nonlinear evolution equation*, Adv. Differential Equations, **7**:5 (2002), 581–616.
- [26] W. Kirsch, A. Kutzelnigg, *Time asymptotics for solutions of the Burgers equation with a periodic force*, Math. Z., **232**:4 (1999), 691–705.
- [27] D. Lu, L. Tian, Z. Liu, *Wavelet basis analysis in perturbed periodic KdV equation*, Appl. Math. Mech., Engl. Ed., **19**:11 (1998), 1053–1058.
- [28] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [29] V. V. Varlamov, *On spatially periodic solutions of the damped Boussinesq equation*, Differential Integral Equations, **10**:6 (1997), 1197–1211.
- [30] J. Xing, *Global strong solution for a class of Burgers–BBM type equation*, Appl. Math., J. Chin. Univ., **6**:1 (1991), 31–37.

Государственный автономный университет Мексики
e-mail: ekaikina@matmor.unam.mx

Поступило в редакцию
20 апреля 2009 г.

Государственный автономный университет Мексики
e-mail: pavelni@matmor.unam.mx

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: shish@voxnet.ru