Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, Фреймы в банаховом пространстве, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 50–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2994>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:42:29

Фреймы в банаховом пространстве*

© 2010. П. А. ТЕРЕХИН

Введено и изучено понятие фрейма в банаховом пространстве относительно модельного пространства последовательностей, отличное от понятий атомарного разложения и банахова фрейма по Грошенигу и (безусловного) фрейма Шаудера по Хану и Ларсону, а также от других известных определений фрейма в ситуации банахова пространства. Установлена универсальная роль таких фреймов в решении общей задачи о представлении функций рядами. Дано их проекционное описание. Получен критерий существования линейного алгоритма разложения по фрейму и аналог свойства экстремальности разложения по фрейму.

§1. Введение

Понятие фрейма введено в 1952 г. Даффином и Шеффером [1] и заключается в следующем. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов пространства H называется *фреймом*, если существуют постоянные A, B , $0 < A \leq B < \infty$, такие, что для любого вектора $h \in H$

$$A\|h\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|h\|_H^2. \quad (1)$$

Постоянные A и B называются *нижней* и *верхней границами* фрейма. Если $A = B$, то система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *жестким фреймом*. Если $A = B = 1$, т. е. выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 = \|h\|_H^2,$$

то говорят, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является *нормированным жестким фреймом*, или *фреймом Парсеваля*.

Очевидно, что если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $\pi: \mathcal{H} \rightarrow H$ — оператор ортогонального проектирования из $\mathcal{H}$ на подпространство $H \subset \mathcal{H}$, то система

$$\varphi_n = \pi e_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

после удаления нулевых векторов образует фрейм Парсеваля в гильбертовом пространстве H .

Классическая дилатационная теорема Наймарка [2] утверждает, в адаптированной к фреймам терминологии, что верно обратное:

*Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ для ведущих научных школ и молодых российских ученых, проекты НШ-4383.2010.1 и МК-346.2009.1, а также Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00097.

Всякий фрейм Парсеваля $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H является ортогональной проекцией полной ортонормированной системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ из объемлющего гильбертова пространства $\mathcal{H} \supset H$.

Аналогичное проекционное описание фреймов общего вида независимо получено в работах [3] и [4]:

Всякий фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H является ортогональной проекцией базиса Рисса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего гильбертова пространства $\mathcal{H} \supset H$.

Точнее, существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}$, включающее в себя исходное пространство H в качестве замкнутого подпространства, и базис Рисса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$, такие, что

$$\varphi_n = \pi\psi_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где по-прежнему $\pi: \mathcal{H} \rightarrow H$ — оператор ортогонального проектирования из $\mathcal{H}$ на H .

Фреймы Даффина–Шеффера находят многочисленные приложения в вопросах представления функций рядами по конкретным системам функций в различных функциональных пространствах благодаря следующим своим свойствам.

Во-первых, для фреймов имеет место теорема о представлении:

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в гильбертовом пространстве H . Тогда для любого вектора $h \in H$ найдется числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, такая, что

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n. \quad (2)$$

Во-вторых, разложение по фрейму (2) допускает линейный алгоритм вычисления коэффициентов, а именно:

Существует система $\{\varphi_n^*\} \subset H$, такая, что для любого вектора $h \in H$ числовая последовательность $\{\langle h, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству ℓ_2 и

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n^* \rangle \varphi_n. \quad (3)$$

В-третьих, для каждого фрейма $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ однозначно определен так называемый канонический дуальный фрейм $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, обладающий свойством экстремальности:

Среди всех числовых последовательностей $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих равенству (2), последовательность $\{\langle h, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ коэффициентов представления (3) имеет наименьшую ℓ_2 -норму,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n^* \rangle|^2. \quad (4)$$

Эти и другие свойства фреймов отражены в монографиях [5]–[8]. Обширная библиография как собственно по теории фреймов, так и по фреймам экспонент, фреймам сдвигов, фреймам всплесков, фреймам Габора и др. имеется в [7].

Распространение концепции фрейма на ситуацию банахова пространства, по-видимому, впервые осуществлено Грошенигом в 1991 г. А именно, в работе [9]

он предложил понятия атомарного разложения и банахова фрейма. Напомним соответствующие определения.

Пусть F — сепарабельное банахово пространство и F^* — его сопряженное пространство. Кроме того, пусть задано банахово пространство X , состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ и такое, что

координатные функционалы $l_n(x) = x_n$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны на X .

Упорядоченная пара (Φ, Φ^*) систем $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\Phi^* = \{\varphi_n^*\}_{n=1}^\infty$ ненулевых векторов банаховых пространств F и F^* соответственно называется *атомарным разложением* пространства F , если выполняются следующие условия:

(а) для всех $f \in F$ числовая последовательность $\{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty$ принадлежит пространству X ;

(б) существуют постоянные A, B , $0 < A \leq B < \infty$, такие, что для любого вектора $f \in F$

$$A\|f\|_F \leq \|\{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty\|_X \leq B\|f\|_F; \quad (5)$$

(с) для каждого вектора $f \in F$ имеет место представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n^* \rangle \varphi_n.$$

Далее, упорядоченная пара (Φ^*, S) , состоящая из системы $\Phi^* = \{\varphi_n^*\}_{n=1}^\infty \subset F^* \setminus \{0\}$ и ограниченного линейного оператора $S: X \rightarrow F$, называется *банаховым фреймом* в пространстве F относительно X , если выполняются указанные выше условия (а), (б) и следующее условие:

(с') для каждого вектора $f \in F$ имеет место представление

$$f = S(\{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty).$$

Формально понятие банахова фрейма является более общим по сравнению с понятием атомарного разложения. Однако, как показано в [3], эти понятия по существу совпадают в том случае, когда пространство X удовлетворяет следующему условию:

система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ образует базис в X .

Напомним, что i -й канонический орт ε_i есть $\{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty$, $i = 1, 2, \dots$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

А именно, в работе [3] установлено, что если (Φ^*, S) — банахов фрейм и $\Phi = \{S\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, то (Φ, Φ^*) — атомарное разложение.

Итак, в основу определений атомарного разложения и банахова фрейма по Грошенигу положены неравенства (5). Если $F = H$ — гильбертово пространство и $X = \ell_2$, то неравенства (5) переходят в неравенства (1) из определения фрейма Даффина–Шеффера.

Касацца, Хан и Ларсон [3] провели обстоятельный анализ понятия атомарного разложения по Грошенигу. В частности, они получили следующий проекционный результат:

Всякое атомарное разложение (Φ, Φ^) банахова пространства F является проекцией базиса $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ объемлющего банахова пространства $\mathcal{F} \supset F$.*

Точнее, существуют банахово пространство $\mathcal{F}$, содержащее исходное пространство F в качестве замкнутого подпространства, базис $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в $\mathcal{F}$ и непрерывный линейный проектор $P: \mathcal{F} \rightarrow F$ из $\mathcal{F}$ на F , такие, что

$$\varphi_n = P\psi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Проекционные характеристики фреймов, такие, как теорема Наймарка [2], результаты Касаццы, Хана и Ларсона [3] и Кашина и Куликовой [4], легли в основу определений фрейма Шаудера и безусловного фрейма Шаудера, данных Ханом и Ларсоном [10]. Ряд близких понятий (frame for Banach space, framing, framing model) введен и изучен в [3].

Касацца, Христенсен и Стоева [11] дали определение X -фрейма в банаховом пространстве F как системы $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^\infty$ элементов сопряженного пространства F^* , для которой выполняются указанные выше условия (а) и (б). В частном случае $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, соответствующее понятие p -фрейма дано в статье [12] и изучено в [13].

Сравнивая определения атомарного разложения, банахова фрейма и X -фрейма с классическим определением фрейма Даффина–Шеффера, отметим одно существенное обстоятельство. Тогда как для фреймов Даффина–Шеффера автоматически выполняется теорема о представлении произвольного вектора в форме (2) или (3), для атомарного разложения и банахова фрейма такое представление постулируется дополнительно, с помощью условий (с) и (с') соответственно, поскольку условия (а) и (б), вообще говоря, не обеспечивают справедливость теоремы о представлении (см. [11]).

Двойственное понятие фрейма в банаховом пространстве, отличное от известных определений из работ [3], [9]–[11] и основанное на исследованиях Бари [14]–[15] по биортогональным системам и базисам гильбертова пространства, предложено автором настоящей статьи в работах [16]–[18]. В §2 данной работы приводится это определение фрейма в банаховом пространстве и отмечается его универсальная роль в решении общей задачи о представлении функций рядами. В §3 изучаются проекционные характеристики этих фреймов. В §4 дается критерий существования линейного алгоритма разложения по фрейму. В §5 обсуждается аналог свойства экстремальности для коэффициентов разложения по фрейму.

§2. Теорема о представлении

Пусть (F, G) — стандартная дуальная пара, состоящая из сепарабельного банахова пространства F и его сопряженного $G = F^*$. Как обычно, $\langle f, g \rangle$ есть значение непрерывного линейного функционала $g \in G$ на векторе $f \in F$.

Пусть, далее, X — банахово пространство, элементами которого являются числовые последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что X удовлетворяет следующему основному требованию:

система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ образует базис в X .

Базис $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ будем называть *естественным*, а само пространство X — *модельным пространством*.

Примерами модельных пространств являются классические пространства c_0 и ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, пространства Орлича ℓ_M (в случае, когда порождающая функция $M(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию), пространства Лоренца $d(w, p)$, а также некоторые их весовые аналоги, пространства со смешанными нормами и многие другие (см., например, [19]).

Пространство ℓ_∞ не удовлетворяет основному требованию, поскольку оно не сепарабельно. Примером сепарабельного пространства последовательностей, не являющегося модельным, служит пространство c всех сходящихся числовых последовательностей.

Укажем общий способ получения модельных пространств. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$. Рассмотрим *пространство коэффициентов* X_Φ этой системы, т. е. пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n \varphi_n$, снабженное нормой

$$\|x\|_{X_\Phi} = \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_F. \quad (6)$$

Пространство X_Φ полно относительно нормы (6), и система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ образует в нем базис. Эти утверждения составляют часть доказательства теоремы Банаха о равномерной ограниченности частных сумм разложения по базису (см., например, [20]).

Понятно, что всякое модельное пространство может быть получено указанным способом. В самом деле, если X — модельное пространство и $E = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — его естественный базис, то $X_E = X$.

Теперь заметим, что каждый непрерывный линейный функционал l на модельном пространстве X однозначно определяется последовательностью своих значений $\{l(\varepsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ на элементах естественного базиса. Поэтому сопряженное пространство X^* изометрически изоморфно некоторому банахову пространству Y , элементами которого являются числовые последовательности $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$. При этом

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \quad (7)$$

— билинейная форма, приводящая в двойственность дуальную пару (X, Y) . Другими словами, (7) — общий вид непрерывного линейного функционала на модельном пространстве X .

Принадлежность числовой последовательности $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$ пространству Y равносильна тому, что конечна величина

$$\|y\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left| \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \right| < \infty.$$

Этот факт позволяет отождествить принадлежность $y \in Y$ с выполнением условия $\|y\|_Y < \infty$.

Определение 1. Скажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ является *фреймом* в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X (или, короче, *фреймом* в F относительно X), если существуют постоянные A, B , $0 < A \leq B < \infty$, такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \leq \|\{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^\infty\|_Y \leq B\|g\|_G. \quad (8)$$

Неравенства (8) будем называть *рамочными*. Оператор $R: G \rightarrow Y$, определенный формулой

$$Rg = \{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^\infty, \quad g \in G,$$

называется *оператором анализа*. Оператор $S: X \rightarrow F$, заданный равенством

$$Sx = \sum_{n=1}^\infty x_n \varphi_n, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in X,$$

называется *оператором синтеза*.

Нетрудно видеть, что R и S — ограниченные линейные операторы, причем оператор анализа является сопряженным к оператору синтеза: $S^* = R$.

Если $F = G = H$ — гильбертово пространство и $X = Y = \ell_2$, то рамочные неравенства (8), точно так же как и неравенства (5), совпадают с неравенствами (1) из определения фрейма Даффина–Шеффера.

Принципиальное различие между неравенствами (8) и (5) связано, во-первых, с тем, что скалярное произведение $\langle h, \varphi_n \rangle$ из неравенств (1) в ситуации банахова пространства может быть прочитано двумя разными способами:

- с одной стороны, можно говорить о *выборке значений* непрерывных линейных функционалов $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ на векторе h ;
- с другой стороны, можно говорить о *коэффициентах Фурье* непрерывного линейного функционала h по элементам системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$.

Эти два подхода приводят к неравенствам (5) и (8) соответственно.

Во-вторых, неравенства (8) автоматически обеспечивают справедливость следующей теоремы о представлении.

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — фрейм в F относительно X . Тогда для любого вектора $f \in F$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, такая, что

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n. \quad (9)$$

Сформулированная теорема доказана автором в [18]. Она означает, что оператор синтеза S отображает пространство X на пространство F , т. е. $S: X \rightarrow F$ — сюръекция. Другими словами, всякий фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в F относительно X является системой представления. Верно и в некотором смысле обратное утверждение.

Предложение 1. Всякая система представления $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ в F является фреймом в F относительно своего пространства коэффициентов X_Φ .

Доказательство. Равенством $Sx = \sum_{n=1}^\infty x_n \varphi_n$ корректно определен линейный оператор $S: X_\Phi \rightarrow F$. Так как Φ — система представления, то S отображает X_Φ на F . Покажем, что S — ограниченный оператор. Рассмотрим последовательность конечномерных операторов $S_n: X_\Phi \rightarrow F$, $S_n x = \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Это ограниченные операторы в силу непрерывности координатных функционалов $l_n(x) = x_n$ на пространстве X_Φ . Так как $Sx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n x$ для всех $x \in X_\Phi$, то, согласно принципу равномерной ограниченности Банаха–Штейнгауза, $B = \sup_{n \geq 1} \|S_n\|_{X_\Phi \rightarrow F} < \infty$ и вместе с тем $\|S\|_{X_\Phi \rightarrow F} \leq B$. Сопряженный оператор $S^*: G \rightarrow X_\Phi^*$ дается равенством $S^*g = \{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^\infty$ и является инъекцией. Следовательно, $A\|g\|_G \leq \|S^*g\|_{X_\Phi^*} \leq B\|g\|_G$, т. е. выполнены рамочные неравенства вида (8) при $Y = X_\Phi^*$. Таким образом, система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образует фрейм в F относительно X_Φ . $\square$

Теорема 1 и предложение 1 показывают, что фреймы в банаховом пространстве в смысле определения 1 играют универсальную роль в решении общей задачи о представлении функций рядами. Тот факт, что конкретная система функций $\{\varphi_n(t) : t \in E\}_{n=1}^\infty$ образует систему представления в некотором функциональном пространстве $F(E)$, эквивалентен выполнению неравенств (8) для

подходящего модельного пространства X . При этом такое модельное пространство определяется, вообще говоря, неоднозначно и влияет на тип сходимости рядов, представляющих функции $f(t)$ из $F(E)$.

Пример 1. Пусть $E = [0, 1]$ и $F(E) = L[0, 1]$ — пространство Лебега. Функцию $\varphi \in L[0, 1]$ продолжим нулем за пределы единичного отрезка. Для натурального числа n , используя представление $n = 2^j + k$, где $j = 0, 1, \dots$ и $k = 0, \dots, 2^j - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{j,k}(t) = 2^j \varphi(2^j t - k). \quad (10)$$

Система функций $\{\varphi_n(t) : t \in [0, 1]\}_{n=1}^\infty$, заданная равенствами (10), называется *аффинной системой* или *системой сжатий и сдвигов* функции $\varphi(t)$ на отрезке $[0, 1]$.

Обозначим через $L_\infty[0, 1]$ пространство всех существенно ограниченных измеримых на единичном отрезке функций $g(t)$, снабженное нормой

$$\|g\|_\infty = \text{vrai sup}_{0 \leq t \leq 1} |g(t)|.$$

Для любой функции $g \in L_\infty[0, 1]$ ее коэффициенты Фурье

$$\langle \varphi_n, g \rangle = \int_0^1 \varphi_n(t) g(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

по элементам аффинной системы (10) удовлетворяют неравенствам

$$A \|g\|_\infty \leq \sup_{n \geq 1} |\langle \varphi_n, g \rangle| \leq B \|g\|_\infty \quad (11)$$

с постоянными

$$A = \left| \int_0^1 \varphi(t) dt \right|, \quad B = \int_0^1 |\varphi(t)| dt,$$

см. [21]. Следовательно, если $\int_0^1 \varphi(t) dt \neq 0$, то аффинная система (10) образует фрейм в пространстве $L[0, 1]$ относительно модельного пространства ℓ , поскольку (11) — рамочные неравенства вида (8) при $G = L_\infty[0, 1]$ и $Y = \ell_\infty$.

§3. Проекционные фреймы

Определение 2. Фрейм $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в F относительно X назовем *проекционным*, если существуют объемлющее банахово пространство $\mathcal{F} \supset F$, в котором F содержится в качестве замкнутого подпространства, базис $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ пространства $\mathcal{F}$, пространство коэффициентов X_Ψ которого совпадает с модельным пространством X фрейма Φ , и непрерывный линейный проектор $P: \mathcal{F} \rightarrow F$ из $\mathcal{F}$ на F , такие, что

$$\varphi_n = P\psi_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Для того чтобы сформулировать критерий проекционности фрейма, нам потребуется следующее

Определение 3. *Пространством коэффициентов нуль-рядов* фрейма $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в F относительно X назовем замкнутое в X подпространство

$$N = \left\{ x \in X : \sum_{n=1}^\infty x_n \varphi_n = 0 \right\}.$$

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — фрейм в F относительно X . Тогда $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является проекционным фреймом в том и только том случае, когда N является дополняемым подпространством пространства X .

Доказательство. Необходимость. Пусть $S: X \rightarrow F$ — оператор синтеза, ассоциированный с проекционным фреймом $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. Зададим изоморфизм $J: X_\Psi = X \rightarrow F$ посредством равенств

$$J\varepsilon_n = \psi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти равенства вместе с соотношениями (12) дают равенство $S = PJ$. Требуется доказать, что $N = \text{Ker}(S)$ дополняемо в X . Положим $M = J^{-1}(F)$. Так как F — замкнутое подпространство в $\mathcal{F}$ и J — изоморфизм, то M — замкнутое подпространство в X . Покажем, что $X = N \oplus M$. Для этого рассмотрим произвольный вектор $x \in X$. Вектор $f = Sx$ принадлежит пространству F и тем более объемлющему пространству $\mathcal{F}$. Пусть $x' = J^{-1}f$. Тогда $x' \in M$. Для $x_0 = x - x'$ имеем $Sx_0 = Sx - Sx' = f - PJJ^{-1}f = f - Pf = 0$, откуда следует, что $x_0 \in N$. Итак, $x = x_0 + x'$, где $x_0 \in N$ и $x' \in M$. Осталось проверить, что $N \cap M = \{0\}$. Предположим, что $x \in N \cap M$. Это означает, что $Sx = 0$ и существует вектор $f \in F$, такой, что $x = J^{-1}f$. Отсюда получаем, что $f = Pf = PJJ^{-1}f = Sx = 0$ и поэтому $x = J^{-1}f = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $X = N \oplus M$ для некоторого замкнутого подпространства $M \subset X$. Положим $\mathcal{F} = N \oplus F$ и отождествим каждый вектор $f \in F$ с упорядоченной парой $(0, f) \in \mathcal{F}$. Пусть $P: \mathcal{F} \rightarrow F$ — каноническая проекция прямой суммы на второе слагаемое. Наконец, пусть $Q: X \rightarrow M$ — проекция пространства X на M вдоль N . Рассмотрим оператор $J: X \rightarrow \mathcal{F}$,

$$Jx = (x - Qx, Sx).$$

Очевидно, что это ограниченный линейный оператор. Докажем, что J — изоморфизм. Во-первых, $\text{Ker}(J) = 0$. В самом деле, если $Jx = 0$, то $x - Qx = 0$ и $Sx = 0$, т.е. $x \in M$ и $x \in N$, а значит, $x = 0$. Во-вторых, $J(X) = \mathcal{F}$. Действительно, пусть $(x_0, f) \in \mathcal{F}$, где $x_0 \in F$ и $f \in F$. Оператор синтеза $S: X \rightarrow F$ является сюръекцией, поэтому $S\xi = f$ для некоторого $\xi \in X$. Положим $x = x_0 + Q\xi$. Имеем $Qx = Qx_0 + Q^2\xi = Q\xi$. Значит, $x - Qx = x_0$. Далее, $Sx = S(x - x_0) = SQ\xi = S\xi = f$. Поэтому $Jx = (x - Qx, Sx) = (x_0, f)$. По теореме Банаха об обратном операторе заключаем, что оператор $J: X \rightarrow \mathcal{F}$ является изоморфизмом. Образом естественного базиса $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ пространства X при изоморфизме J будет базис $\{\psi_n = J\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ пространства $\mathcal{F}$. Ясно, что $X_\Psi = X$. Осталось проверить соотношения (12). По построению $S = PJ$. Следовательно, $\varphi_n = S\varepsilon_n = PJ\varepsilon_n = P\psi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Достаточность доказана. $\square$

Пусть $X = \ell_2$. Тогда каждое подпространство в ℓ_2 дополняемо и по теореме 2 всякий фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ относительно модельного пространства ℓ_2 будет проекцией базиса объемлющего гильбертова пространства (так как по построению $\mathcal{F}$ изоморфно X). Так как пространством коэффициентов этого базиса является ℓ_2 , то это базис Рисса. Тем самым мы приходим к проекционному результату Касаззы, Хана и Ларсона из [3] и Кашина и Куликовой из [4] для фреймов Даффина–Шеффера.

Понятно, что для фреймов в банаховом пространстве в смысле определения 1 непосредственный аналог упомянутого результата не имеет места. Основное препятствие возникает уже в геометрии банахова пространства F , содержащего фрейм, который является проекцией базиса объемлющего пространства.

А именно, такое пространство F будет дополняемым подпространством банахова пространства с базисом, что равносильно тому, что банахово пространство F обладает ограниченным аппроксимационным свойством (см. [22] и [23]). Существуют и другие препятствия геометрического характера.

Банахово пространство L называется *примарным*, если каждое его бесконечномерное дополняемое подпространство изоморфно L .

Предложение 2. Пусть модельное пространство X является примарным и пространство F не изоморфно X . Тогда ни один фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в F относительно X не является проекционным.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — проекционный фрейм. По теореме 2 пространство коэффициентов нуль-рядов N дополняемо в X . Тогда $X = N \oplus M$. Рассмотрим оператор синтеза $S: X \rightarrow F$, ассоциированный с фреймом $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. Так как S является сюръекцией и $N = \text{Ker}(S)$, то M изоморфно F . Так как X — примарное пространство, то M изоморфно X . Следовательно, F изоморфно X вопреки предположению. $\square$

Говорят, что банахово пространство L_1 обладает свойством Шрёдера–Бернштейна, если изоморфизм пространств L_1 и L_2 имеет место всякий раз, когда банахово пространство L_2 таково, что L_1 изоморфно дополняемому подпространству в L_2 , а L_2 изоморфно дополняемому подпространству в L_1 .

Предложение 3. Пусть по крайней мере одно из пространств X или F обладает свойством Шрёдера–Бернштейна. Пусть, далее, пространство X изоморфно дополняемому подпространству в F , но не изоморфно самому F . Тогда ни один фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве F относительно X не является проекционным.

Доказательство. В противном случае, как показано при доказательстве предложения 2, пространство F было бы изоморфно дополняемому подпространству M пространства X . По свойству Шрёдера–Бернштейна пространства F и X были бы изоморфны вопреки предположению.

Пример 1 из §2 доставляет конкретный пример фрейма, который не является проекционным. Это следует из предложения 2, поскольку пространство ℓ примарное и не изоморфно пространству $L[0, 1]$. $\square$

§4. Линейные алгоритмы разложения по фрейму

Определение 4. Скажем, что имеет место *линейный алгоритм* разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в F относительно X , если существует система $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^\infty$ непрерывных линейных функционалов на пространстве F , такая, что для любого вектора $f \in F$ числовая последовательность $\{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty$ принадлежит пространству X и

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n^* \rangle \varphi_n. \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — фрейм в F относительно X . Тогда для существования линейного алгоритма разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы этот фрейм являлся проекционным.

Доказательство. Необходимость. Определим оператор $T: F \rightarrow X$ равенством $Tf = \{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty$. В силу представления (13) имеем $ST = I$, где I —

тождественный оператор в пространстве F , т. е. оператор синтеза $S: X \rightarrow F$, ассоциированный с фреймом $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, является *ретракцией*. Здесь следует заметить, что оператор T ограничен. В самом деле, рассмотрим последовательность конечномерных ограниченных операторов $T_n f = \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k^* \rangle \varepsilon_k$, $n = 1, 2, \dots$. Так как $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — базис в X , то $Tf = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n f$ для любого вектора $f \in F$. По теореме Банаха–Штейнгауза $\|T\|_{F \rightarrow X} \leq \sup_{n \geq 1} \|T_n\|_{F \rightarrow X} < \infty$. Ядро $N = \text{Ker}(S)$ ретракции S дополняемо. Действительно, пусть $M = T(F)$. Для произвольного $x \in X$ положим $x_0 = x - TSx$ и $x' = TSx$. Тогда $Sx_0 = Sx - STSx = Sx - Sx = 0$. Поэтому $x_0 \in N$, $x' \in M$ и $x = x_0 + x'$. Кроме того, $N \cap M = \{0\}$, так как если $x \in N$ и $x \in M$, то $Sx = 0$ и существует вектор $f \in F$, такой, что $x = Tf$. Отсюда следует, что $f = STf = Sx = 0$ и $x = Tf = 0$. Таким образом, $X = N \oplus M$. По теореме 2 фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является проекционным. Необходимость доказана.

Достаточность. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и при доказательстве необходимости в теореме 2. Пусть, далее, $T: F \rightarrow X$ — сужение изоморфизма $J^{-1}: \mathcal{F} \rightarrow X$ на подпространство $F \subset \mathcal{F}$. Тогда $STf = PJJ^{-1}f = Pf = f$ для всех $f \in F$. Функционал φ_n^* определим как композицию координатного функционала $l_n(x) = x_n$ и оператора T , т. е. $\langle f, \varphi_n^* \rangle = l_n(Tf)$, $f \in F$. Ясно, что $\{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty = Tf \in X$ и справедливо представление (13), так как $f = STf = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \varphi_n^* \rangle \varphi_n$. Достаточность доказана. $\square$

Пример 2. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — система Шаудера. Заметим, что если классическую систему Шаудера нормировать в пространстве $L[0, 1]$, то получим рассмотренную в примере 1 систему сжатий и сдвигов функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1/2], \\ 2(1-t), & t \in [1/2, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Ульяновым [24], в частности, показано, что система Шаудера является системой представления в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$. Значит, по предложению 1 система Шаудера образует фрейм в $L_p[0, 1]$ относительно своего пространства коэффициентов X_Φ . Как показали Казарян и Зинк в работе [25], система Шаудера Φ , а также некоторые ее подсистемы допускают линейный алгоритм представления. По теореме 3 фрейм Φ в $L_p[0, 1]$ относительно своего пространства коэффициентов X_Φ (зависящего от показателя p) является проекционным.

Пример 3. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — орторекурсивная система разложения. Это понятие введено и изучено Лукашенко в работе [26], из результатов которой следует существование фрейма Парсеваля $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^\infty$, такого, что

$$h = \sum_{n=1}^\infty \langle h, \varphi_n^* \rangle \varphi_n$$

для любого вектора h из гильбертова пространства H . Таким образом, система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образует фрейм в H относительно своего пространства коэффициентов, который допускает линейный алгоритм разложения. По теореме 3 заключаем, что всякая орторекурсивная система разложения в гильбертовом пространстве является проекцией базиса объемлющего банахова пространства.

Следует отметить, что в приведенных примерах 2 и 3 проекционных фреймов соответствующие базисы, проекциями которых эти фреймы являются, могут быть получены на основе конструкций теорем 1–3. Однако явный вид этих базисов нам неизвестен.

§5. Свойство экстремальности разложения по фрейму

Теорема 4. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — фрейм в F относительно X и N — пространство коэффициентов нуль-рядов этого фрейма. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) существует проксимальный линейный оператор $P: X \rightarrow N$, т. е. такой, что $\|x - Px\|_X = \inf_{x_0 \in N} \|x - x_0\|_X$ для всех $x \in X$;
- 2) существует линейный алгоритм разложения (13), такой, что среди всех числовых последовательностей $\{c_n\}_{n=1}^\infty \in X$, для которых справедливо представление (9), последовательность $\{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty$ коэффициентов разложения (13) имеет наименьшую X -норму,

$$\|\{c_n\}_{n=1}^\infty\|_X \geq \|\{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty\|_X. \quad (14)$$

Доказательство. Сразу заметим, что проксимальный линейный оператор $P: X \rightarrow N$ является непрерывным линейным проектором из X на N вдоль $M = \text{Ker}(P)$. Кроме того, свойство проксимальности проектора P равносильно тому, что проектор $Q = I - P$ из X на M вдоль N имеет единичную норму [27, лемма 3.4.1]. Теперь установим импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Имеем $X = N \oplus M$. По теореме 2 фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является проекционным. По теореме 3 имеет место линейный алгоритм (13) разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. Вообще говоря, при этом система $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^\infty$ определена не однозначно. Выберем в качестве $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^\infty$ ту систему, которая построена при доказательстве достаточности в теореме 3. Итак, пусть $S: X \rightarrow F$ — оператор синтеза, $J: X \rightarrow \mathcal{F} = N \oplus F$ — изоморфизм, определенный равенством $Jx = (x - Qx, Sx)$, и, наконец, $T: F \rightarrow X$ — сужение J^{-1} на подпространство F . Напомним, что $Tf = \{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty$ и $T(F) = M$. Возьмем произвольную числовую последовательность $c = \{c_n\}_{n=1}^\infty \in X$, для которой справедливо представление (9). Это означает, что $Sc = f$. Далее, пусть $c = c_0 + c'$, где $c_0 = Pc \in N$ и $c' = Qc \in M$. Тогда $c' = Tf'$ для некоторого $f' \in F$. В самом деле, имеем $f' = STf' = Sc' = Sc = f$. Поэтому $c' = Tf = \{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty$. Получаем, что $\|\{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty\|_X = \|c'\|_X = \|Qc\|_X \leq \|c\|_X$, поскольку Q — проектор с единичной нормой. Неравенство (14) установлено. Осталось доказать импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что выполнено условие 2). Будем использовать те же обозначения, что и при доказательстве необходимости в теореме 3. По-прежнему $Tf = \{\langle f, \varphi_n^* \rangle\}_{n=1}^\infty$, так что $ST = I$ и $M = T(F)$. Имеем $X = N \oplus M$ и Q — проектор из X на M . Пусть $x \in X$. Тогда $x = x_0 + Qx$, где $x_0 \in N$ и $Qx \in M$. Отсюда $Qx = Tf$ для некоторого $f \in F$. Следовательно, $f = STf = SQx = Sx$, т. е. справедливы представление (9) и разложение (13). Неравенство (14) запишем в виде $\|x\|_X \geq \|Tf\|_X = \|Qx\|_X$. Таким образом, проектор Q имеет единичную норму. Значит, $P = I - Q$ — проксимальный проектор из X на N . $\square$

Пример 4. Пусть $E = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — естественный базис пространства ℓ^p , $1 \leq p < \infty$. Рассмотрим удвоенную систему

$$\Phi = \{\varepsilon_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_n, \dots\}.$$

Ясно, что Φ — фрейм в ℓ^p относительно модельного пространства ℓ^p . При этом пространство N коэффициентов нуль-рядов фрейма Φ состоит в точности из тех $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^p$, для которых $x_{2n-1} = -x_{2n}$, $n = 1, 2, \dots$. Далее, для $x \in \ell^p$ положим

$$Px = \left\{ \frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2}, \dots, \frac{x_{2n-1} - x_{2n}}{2}, \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2}, \dots \right\},$$

$$Qx = \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}, \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}, \dots \right\}.$$

Видим, что P — непрерывный линейный проектор из ℓ^p на N и $Q = I - P$. Кроме того,

$$\|Qx\|_p^p = 2 \sum_{n=1}^\infty \left| \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2} \right|^p \leq 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{|x_{2n-1}|^p + |x_{2n}|^p}{2} = \|x\|_p^p.$$

Поэтому $\|Q\| = 1$ и P — проксимальный проектор. По теореме 4 разложение по фрейму Φ обладает свойством экстремальности (14).

Замечание. Теоремы 1–3 и предложение 1 приведены без полных доказательств в кратком сообщении [17] и, как уже отмечалось, теорема 1 доказана в статье [18]. Теорема 4 и предложения 2–3 ранее не формулировались.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc., **72** (1952), 341–366.
- [2] М. А. Наймарк, *Спектральные функции симметрического оператора*, Изв. АН СССР, сер. матем., **4:3** (1940), 277–318.
- [3] P. G. Casazza, D. Han, D. R. Larson, *Frames for Banach spaces*, Contemp. Math., **247** (1999), 149–182.
- [4] Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова, *Замечание об описании фреймов общего вида*, Матем. заметки, **72:6** (2002), 941–945.
- [5] R. M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York, 1980.
- [6] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., vol. 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992; имеется перевод: И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, РХД, Ижевск, 2001.
- [7] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
- [8] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [9] K. Gröchenig, *Describing functions: atomic decompositions versus frames*, Monatsh. Math., **112:1** (1991), 1–41.
- [10] D. Han, D. R. Larson, *Frames, bases and group representations*, Memoirs Amer. Math. Soc., **147:697** (2000), 1–91.
- [11] P. G. Casazza, O. Christensen, D. T. Stoeva, *Frame expansions in separable Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **307:2** (2005), 710–723.
- [12] A. Aldroubi, Q. Sun, W.-S. Tang, *p-Frames and shift invariant subspaces of L^p* , J. Fourier Anal. Appl., **7:1** (2001), 1–22.
- [13] O. Christensen, D. T. Stoeva, *p-Frames in separable Banach spaces*, Adv. Comput. Math., **18:2** (2003), 117–126.

- [14] Н. К. Бари, *О базисах в гильбертовом пространстве*, ДАН СССР, **54** (1946), 383–386.
- [15] Н. К. Бари, *Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве*, Учен. зап. МГУ, Математика IV, **148** (1951), 69–107.
- [16] П. А. Терехин, *Фреймы в банаховом пространстве и их приложения к построению всплесков*, в кн.: Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Сб. науч. трудов, вып. 2, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2003, 65–81.
- [17] П. А. Терехин, *Системы представления и проекции базисов*, Матем. заметки, **75**:6 (2004), 944–947.
- [18] П. А. Терехин, *Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза*, Матем. сб., **200**:9 (2009), 127–146.
- [19] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
- [20] Б. С. Капшин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [21] П. А. Терехин, *Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов*, Изв. вузов, матем., 1999, № 8, 74–81.
- [22] A. Pelczynski, *Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis*, Studia Math., **40** (1971), 239–242.
- [23] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal, M. Zippin, *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structure in Banach spaces*, Israel J. Math., **9** (1971), 488–506.
- [24] П. Л. Ульянов, *Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$* , УМН, **27**:2 (1972), 3–52.
- [25] K. S. Kazarian, R. E. Zink, *Subsystems of the Schauder system that are quasibases for $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$* , Proc. Amer. Math. Soc., **126**:10 (1998), 2883–2893.
- [26] Т. П. Лукашенко, *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам*, Вестн. Моск. ун-та, сер. 1 матем. мех., 2001, № 1, 6–10.
- [27] В. П. Одинец, М. Я. Якубсон, *Проекторы и базисы в нормированных пространствах*, УРСС, М., 2004.