Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Огиевецкий, С. М. Хорошкин, Диагональная
редукционная алгебра полной линейной алгебры
Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, вы-
пуск 3, 27–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2995>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:37:31

УДК 514.12+517.986

Диагональная редукционная алгебра полной линейной алгебры $\mathfrak{Li}^*$

© 2010. О. В. Огиевецкий, С. М. Хорошкин

Исследованы общие свойства редукционных алгебр: алгоритмическая эффективность набора упорядочивающих соотношений и вопрос о том, над каким кольцом они определены. Сформулировано и доказано свойство стабилизации для редукционных алгебр, связанных с диагональным вложением алгебры $\mathfrak{Li}$ $\mathfrak{gl}_n$ в $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$. Выписан полный набор соотношений для этих редукционных алгебр.

§1. Введение

Редукционные алгебры были введены в работах [1], [7] для изучения представлений алгебры $\mathfrak{Li}$ с помощью ограничения представления на подалгебру.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра $\mathfrak{Li}$, а $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — ее редуктивная подалгебра $\mathfrak{Li}$, т. е. присоединенное действие $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ вполне приводимо (в частности, $\mathfrak{k}$ редуктивна). Предположим, что задано треугольное разложение

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+. \quad (1.1)$$

Обозначим через I_+ левый идеал алгебры $A := U(\mathfrak{g})$, порожденный элементами из $\mathfrak{n}_+$, $I_+ := A\mathfrak{n}_+$. Редукционная алгебра $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, соответствующая паре $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, определяется как факторпространство $\text{Norm}(I_+)/I_+$ нормализатора идеала I_+ по идеалу I_+ (следует иметь в виду, что обозначение $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ неполно: данные, необходимые для определения редукционной алгебры, включают в себя, помимо пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, треугольное разложение (1.1)). Пространство $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ обладает естественной структурой ассоциативной алгебры. По определению для всякого $\mathfrak{g}$ -модуля V пространство $V^{\mathfrak{n}_+}$ векторов, аннулируемых элементами из $\mathfrak{n}_+$, есть $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ -модуль. Если V разлагается как $\mathfrak{k}$ -модуль в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{k}$ -модулей V_i с конечными кратностями, то $\mathfrak{g}$ -модульная структура на V однозначно восстанавливается по $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ -модульной структуре на $V^{\mathfrak{n}_+}$.

Редукционная алгебра упрощается после локализации по мультипликативному множеству, порожденному элементами $h_\gamma + k$, где γ пробегает множество корней алгебры $\mathfrak{k}$, $k \in \mathbb{Z}$; здесь h_γ обозначает корень, соответствующий γ . Пусть $\bar{U}(\mathfrak{h})$ — локализация по упомянутому мультипликативному множеству универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{h})$ подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{Li}$ $\mathfrak{k}$. Локализованная редукционная алгебра $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ является алгеброй над коммутативным кольцом $\bar{U}(\mathfrak{h})$; главная часть определяющих соотношений квадратична, однако соотношения могут содержать как линейные члены, так и члены степени 0, см. [8], [4]. Редукционная алгебра $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ также может быть описана как (локализованное) пространство $A/(A\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{n}_- A)$ двойных смежных классов,

*Работа второго автора была поддержана грантом РФФИ 08-01-00667, совместным грантом CNRS-РФФИ 09-01-93106 и грантом 3036-2008-2 поддержки научных школ. Работа обоих авторов была поддержана ANR проектом GIMP No. ANR-05-BLAN-0029-01.

снабженное умножением [4], определяемым при помощи экстремального проектора Ашеровой–Смирнова–Толстого [2].

Согласно общей теории редукционных алгебр [8], естественные образующие редукционной алгебры $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ удовлетворяют неоднородным квадратичным упорядочивающим соотношениям над полем частных $\mathscr{D}(\mathfrak{h})$ кольца $U(\mathfrak{h})$. При этом возникают два естественных вопроса: во-первых, определены ли эти упорядочивающие соотношения над меньшим кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$; во-вторых, можно ли использовать их для алгоритмического упорядочивания полиномиальных выражений в редукционной алгебре? В первой части работы мы даем положительные ответы на оба вопроса для любой редукционной алгебры $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

Вторая часть работы посвящена специальной редукционной задаче, в которой $\mathfrak{g}$ равна прямой сумме двух копий алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$, а $\mathfrak{k}$ представляет собой диагонально вложенную алгебру Ли $\mathfrak{gl}_n$. Соответствующую редукционную алгебру мы называем *диагональной редукционной алгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ и обозначаем через Z_n . Всякий конечномерный неприводимый модуль над $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ изоморфен тензорному произведению двух неприводимых $\mathfrak{gl}_n$ -модулей; ограничивая этот $\mathfrak{g}$ -модуль на $\mathfrak{k}$, мы получаем разложение тензорного произведения в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{gl}_n$ -модулей. Один из главных результатов работы состоит в детальном описании редукционной алгебры Z_n . Некоторые другие примеры и приложения диагональных редукционных алгебр приведены в работе [6].

Мы предъявляем полный список определяющих соотношений для естественных образующих алгебры Z_n . Вывод этих соотношений, многократно использующий автоморфизмы Желобенко [4] редукционных алгебр, подробно представлен в работе [5]. В настоящей работе мы формулируем и доказываем для алгебр Z_n свойство стабилизации. Это свойство позволяет естественным образом продолжать соотношения с алгебры Z_n на алгебру Z_{n+1} (Z_n не есть подалгебра в Z_{n+1}). Принцип стабилизации служит вторым важным ингредиентом для вывода определяющих соотношений в Z_n .

Мы доказываем также, что наш список определяющих соотношений эквивалентен над $\overline{U}(\mathfrak{h})$ списку канонических упорядочивающих соотношений. Доказательство несложно и сводится к анализу некоторых асимптотик, если ограничиться рассмотрением алгебр над полем $\mathscr{D}(\mathfrak{h})$. Доказательство эквивалентности над $\overline{U}(\mathfrak{h})$ более тонко, оно использует стабилизацию и вычисление некоторых определителей Коши.

§2. Редукционные алгебры, отвечающие редуктивной паре

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли и $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — ее редуктивная подалгебра. Предположим, что вложение $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ также редуктивно, иными словами, присоединенное действие $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ вполне приводимо. Пусть $\mathfrak{p}$ есть $\text{ad}_{\mathfrak{k}}$ -инвариантное дополнение к $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$. Фиксируем треугольное разложение (1.1) алгебры Ли $\mathfrak{k}$; здесь $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, а $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ — нильрадикалы двух противоположных борелевских подалгебр $\mathfrak{b}_{\pm} \subset \mathfrak{k}$. Пусть $\Delta \in \mathfrak{h}^*$ — система корней алгебры Ли $\mathfrak{k}$. Подмножества множества Δ , состоящие из положительных и отрицательных корней, обозначим через Δ_+ и Δ_- соответственно. Пусть Q —

решетка весов, $Q := \{\gamma \in \mathfrak{h}^* \mid \gamma = \sum_{\alpha \in \Delta_+, n_\alpha \in \mathbb{Z}} n_\alpha \alpha\}$. Она содержит положительный конус

$$Q_+ := \left\{ \gamma \in \mathfrak{h}^* \mid \gamma = \sum_{\alpha \in \Delta_+, n_\alpha \in \mathbb{Z}, n_\alpha \geq 0} n_\alpha \alpha \right\}. \quad (2.1)$$

Для элементов $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ запись

$$\lambda > \mu \quad (2.2)$$

означает, что $\lambda - \mu \in Q_+$. Это частичный порядок в $\mathfrak{h}^*$.

Пусть W — группа Вейля системы корней Δ . Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in W$ — отражения в $\mathfrak{h}^*$, соответствующие простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Мы используем также индуцированное действие группы Вейля W на векторном пространстве $\mathfrak{h}$. Оно определяется соотношением $\lambda(\sigma(H)) = \sigma^{-1}(\lambda)(H)$ для любых $\sigma \in W$, $H \in \mathfrak{h}$ и $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Мы предполагаем, что это действие продолжено до действия автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ некоторой группы, накрывающей группу W . Точнее, заданы автоморфизмы $\sigma_i: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, удовлетворяющие тем же соотношениям кос, что и σ_i ; предполагается также, что эти автоморфизмы переводят подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ в себя и ограничения автоморфизмов σ_i и σ_i на $\mathfrak{h}$ совпадают. Мы обозначаем теми же символами канонические продолжения отображений σ_i до автоморфизмов алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Пусть ρ — полусумма положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{k}$. *Сдвинутое действие* $\circ$ группы W в векторном пространстве $\mathfrak{h}^*$ задается формулой

$$\sigma \circ \lambda = \sigma(\lambda + \rho) - \rho. \quad (2.3)$$

Рассматривая элементы коммутативной алгебры $U(\mathfrak{h})$ как полиномиальные функции на $\mathfrak{h}^*$, мы определяем с помощью формулы (2.3) действие $\circ$ группы W и на этой алгебре. В частности, $(\sigma \circ H)(\lambda) = H(\sigma^{-1} \circ \lambda)$ для $H \in \mathfrak{h}$.

Для всякого $i = 1, \dots, r$ обозначим через $h_{\alpha_i} = \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$ кокорень, соответствующий простому корню α_i , так что значение $\alpha_j(H_i)$ равно (i, j) -элементу a_{ij} матрицы Картана a алгебры Ли $\mathfrak{k}$. Здесь h_{α_i} принадлежит полупростой части алгебры $\mathfrak{k}$. Пусть $e_{\alpha_i} \in \mathfrak{n}_+$ и $e_{-\alpha_i} \in \mathfrak{n}_-$ — образующие Шевалле алгебры $\mathfrak{k}$, соответствующие корням α_i и $-\alpha_i$, так что

$$[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = \delta_{ij} h_{\alpha_i}, \quad [h_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}] = a_{ij} e_{\alpha_j}, \quad [h_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = -a_{ij} e_{-\alpha_j}.$$

Для каждого $\alpha \in \Delta$ пусть $h_\alpha = \alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ — соответствующий кокорень. Обозначим через $\bar{U}(\mathfrak{h})$ кольцо частных коммутативной алгебры $U(\mathfrak{h})$ по отношению к мультипликативному множеству знаменателей, порожденному элементами

$$\{h_\alpha + l \mid \alpha \in \Delta, l \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.4)$$

Элементы этого кольца можно также рассматривать как рациональные функции на векторном пространстве $\mathfrak{h}^*$. Элементы из $U(\mathfrak{h}) \subset \bar{U}(\mathfrak{h})$ тогда соответствуют полиномиальным функциям на $\mathfrak{h}^*$. Пусть $\bar{U}(\mathfrak{k}) \subset \bar{A} = \bar{U}(\mathfrak{g})$ — кольца частных алгебр $U(\mathfrak{k})$ и $A = U(\mathfrak{g})$ по отношению к множеству знаменателей (2.4). Эти кольца корректно определены, так как оба кольца $U(\mathfrak{k})$ и $U(\mathfrak{g})$ удовлетворяют условию Оре по отношению к (2.4). Поскольку отображения σ_i сохраняют множество знаменателей (2.4), автоморфизмы σ_i естественно продолжаются до автоморфизмов алгебры $\bar{A}$.

Определим $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ как пространство двойных смежных классов алгебры $\bar{A}$ по ее левому идеалу $\bar{I}_+ := \bar{A}\mathfrak{n}_+$, порожденному элементами множества $\mathfrak{n}_+$, и ее

правому идеалу $\bar{I}_- := \mathfrak{n}_- \bar{A}$, порожденному элементами множества $\mathfrak{n}_-$, $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) := \bar{A}/(\bar{I}_+ + \bar{I}_-)$. Операция умножения

$$a \diamond b := aPb \quad (2.5)$$

превращает $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ в ассоциативную алгебру. Здесь P — экстремальный проектор [2] алгебры Ли $\mathfrak{k}$, соответствующий треугольному разложению (1.1). Мы называем $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ *редукционной* алгеброй пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Соответствие $x \mapsto x \bmod \bar{I}_+ + \bar{I}_-$ устанавливает гомоморфное вложение алгебры $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ (определение дано во введении) в $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Более того, локализация образа алгебры $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ по отношению к $\bar{U}(\mathfrak{h})$ совпадает с $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Отметим, что здесь мы используем определение алгебры $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, отличное от приведенного во введении. Эквивалентность этих определений установлена в [4].

В алгебре $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ можно задать действие автоморфизмов Желобенко [4]. Пусть $\check{q}_i: Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \rightarrow Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ — автоморфизм Желобенко, соответствующий простому корню α_i , $i = 1, \dots, r$. Он определяется следующим образом [4]. Сначала определим отображение $\check{q}_i: A \rightarrow \bar{A}/\bar{I}_+$ формулой

$$\check{q}_i(x) := \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \hat{e}_{\alpha_i}^k(\sigma_i(x)) e_{-\alpha_i}^k \prod_{j=1}^k (h_{\alpha_i} - j + 1)^{-1} \bmod \bar{I}_+. \quad (2.6)$$

Здесь $\hat{x}$ обозначает присоединенное действие элемента x , так что $\hat{x}(y) = xy - yx$ для $x \in \mathfrak{k}$ и $y \in \bar{A}$. Оператор $\check{q}_i$ обладает следующим свойством:

$$\check{q}_i(hx) = (\sigma_i \circ h) \check{q}_i(x) \quad (2.7)$$

для всякого $x \in A$ и $h \in \mathfrak{h}$; операция $\sigma \circ h$ определена в (2.3). Используя (2.7), мы можем продолжить $\check{q}_i$ до отображения (обозначаемого тем же символом) $\check{q}_i: \bar{A} \rightarrow \bar{A}/\bar{I}_+$. А именно, для всякого $x \in A$ и $\phi \in \bar{U}(\mathfrak{h})$ полагаем $\check{q}_i(\phi x) = (\sigma_i \circ \phi) \check{q}_i(x)$. Можно показать, что $\check{q}_i(\bar{I}_+) = 0$ и $\check{q}_i(\bar{I}_-) \subset (\bar{I}_- + \bar{I}_+)/\bar{I}_+$, так что $\check{q}_i$ можно интерпретировать как линейный оператор $\check{q}_i: Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \rightarrow Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Согласно [4], это отображение есть автоморфизм алгебр, удовлетворяющий (2.7). Операторы $\check{q}_i$ удовлетворяют тем же соотношениям кос, что и σ_i . Имеет место следующая формула обращения [4]:

$$\check{q}_i^2(x) = (h_{\alpha_i} + 1)^{-1} \hat{\sigma}_i^2(x) (h_{\alpha_i} + 1), \quad x \in Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}). \quad (2.8)$$

Пусть, как и ранее, $\mathfrak{p}$ обозначает $\text{ad}_{\mathfrak{k}}$ -инвариантное дополнение к $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$. Выберем линейный базис $\{p_K\}$ пространства $\mathfrak{p}$ и снабдим его некоторым линейным порядком $\prec$. Для всякого $a \in \bar{A}$ обозначим через $\tilde{a}$ образ элемента a в редукционной алгебре; в частности, $\tilde{p}_K$ — это образ в $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ базисного вектора $p_K \in \mathfrak{p}$.

В общей теории редукционных алгебр имеют место следующие утверждения (по поводу утверждений (а)–(с) см. [8]):

(а) Поскольку $\mathfrak{h}$ нормализует как $\mathfrak{n}_+$, так и $\mathfrak{n}_-$, алгебра $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ есть $\bar{U}(\mathfrak{h})$ -би-модуль по отношению к умножению на элементы из $\bar{U}(\mathfrak{h})$. Она свободна и как левый, и как правый $\bar{U}(\mathfrak{h})$ -модуль. В качестве порождающего (над $\bar{U}(\mathfrak{h})$) подпространства можно взять проекцию на $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ пространства $S(\mathfrak{p})$ симметрических тензоров в пространстве $\mathfrak{p}$, т.е. подпространство пространства $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, образованное линейными комбинациями образов степеней p^ν , где $p \in \mathfrak{p}$ и $\nu \geq 0$.

(b) Полагая $\deg(\tilde{X}) = l$ для образа всякого произведения $X = p_{K_1} \cdots p_{K_l}$ l элементов множества $\mathfrak{p}$ и $\deg(Y) = 0$ для $Y \in \overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$, мы задаем на $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ структуру фильтрованной алгебры. Подпространство $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k)}$ элементов степени не более чем k — свободный левый и свободный правый $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$ -модуль с порождающим пространством, образованным линейными комбинациями образцов степеней p^ν , где $p \in \mathfrak{p}$ и $k \geq \nu \geq 0$.

(c) В дальнейшем мы будем использовать весовые упорядоченные базисы $\{p_K\}$, в которых каждый базисный элемент p_K имеет определенный вес μ_K ,

$$[h, p_K] = \mu_K(h)p_K \quad (2.9)$$

для всех $h \in \mathfrak{h}$. При этом линейный порядок $\prec$ предполагается согласованным с частичным порядком $<$ на пространстве $\mathfrak{h}^*$, см. (2.2); согласованность означает импликацию $\mu_K < \mu_L \implies p_K \prec p_L$. В этом случае образы $\tilde{p}_L$ мономов ($\tilde{L}$ понимается как мультииндекс)

$$p_{\tilde{L}} := p_{L_1}^{n_1} \cdots p_{L_m}^{n_m}, \quad p_{L_1} \prec \cdots \prec p_{L_m}, \quad k = n_1 + \cdots + n_m, \quad (2.10)$$

в $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k)}$ линейно независимы над $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$ и их проекции на факторпространство $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k)}/Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k-1)}$ образуют базис левого $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$ -модуля $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k)}/Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k-1)}$. Структурные константы алгебры $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ в базисе $\{\tilde{p}_L\}$ лежат в кольце $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$.

Рассмотрим упорядоченный базис пространства $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, начинающийся с базисных векторов пространства $\mathfrak{n}_-$ и оканчивающийся базисными векторами пространства $\mathfrak{n}_+$. Алгебра A допускает базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта (PBW), состоящий из упорядоченных мономов от элементов этого базиса. Из этого следует, что свойства мономов (2.10) в п. (c) имеют место без дополнительных ограничений на порядок $\prec$. Однако связь порядка $\prec$ с частичным порядком $<$ в $\mathfrak{h}^*$ будет существенной для большинства дальнейших утверждений.

(d) Алгебра $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ — ассоциативная алгебра с единицей, порожденная подалгеброй $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$ и элементами $\tilde{p}_L$, которые подчиняются весовым соотношениям (2.9) и упорядочивающим соотношениям

$$\tilde{p}_I \diamond \tilde{p}_J = \sum_{K, L: p_K \preceq p_L} B_{IJKL} \tilde{p}_K \diamond \tilde{p}_L + \sum_L C_{IJL} \tilde{p}_L + D_{IJ}, \quad p_I \succ p_J, \quad (2.11)$$

где B_{IJKL} , C_{IJL} и D_{IJ} — некоторые элементы алгебры $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$.

Пусть $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ — поле частных кольца $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$. В работе [8, §§ 4.2.3–4.2.4 и 6.1.5] доказано, что редукционная алгебра порождена элементами $\tilde{p}_L$ с определяющими упорядочивающими соотношениями (2.11) как алгебра над полем $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$. Мы докажем, что утверждение (d) верно над меньшим кольцом $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$; иными словами, соотношения (2.11) определены над кольцом $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$ и элементы $\tilde{p}_L$ порождают над $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$ алгебру $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

Для этого покажем сначала, что структурные константы B_{IJKL} , C_{IJL} и D_{IJ} на самом деле принадлежат кольцу $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$. Это следует из факторизованной формулы для экстремального проектора P , см. [2]. В самом деле, разлагая произведение и упорядочивая слагаемые, мы представляем проектор P в виде суммы слагаемых вида $\xi e_{-\gamma_1} \cdots e_{-\gamma_m} e_{\gamma'_1} \cdots e_{\gamma'_{m'}}$, где $\xi \in \overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$, а $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ и $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{m'}$ — положительные корни алгебры Ли $\mathfrak{k}$; при этом знаменатель элемента ξ — произведение линейных сомножителей вида $h_\gamma + \rho(h_\gamma) + \ell$, где γ — положительный корень алгебры Ли $\mathfrak{k}$ и $\ell > 0$ — положительное число. Далее мы вычисляем

произведение $a \diamond b$ следующим образом. В слагаемом $a\xi e_{-\gamma_1} \cdots e_{-\gamma_m} e_{\gamma'_1} \cdots e_{\gamma'_m} b$ произведения $a \diamond b$ мы перемещаем ξ и все множители вида $e_{-\gamma}$ налево через a , добавляя возникающие многократные коммутаторы с a ; аналогично перемещаем все $e_{\gamma'}$ направо через b . В результате получим равенство (напомним, что $\tilde{a}$ означает образ элемента $a \in A$ в редукционной алгебре)

$$\tilde{p}_I \diamond \tilde{p}_J = \sum_{K, L} M_{IJKL} \widetilde{p_K p_L}, \quad (2.12)$$

где матрица M (однозначно определенная описанным выше способом вычисления) с элементами из $\overline{U}(\mathfrak{h})$ имеет структуру треугольной матрицы с единицами на диагонали (верно даже более сильное утверждение: $M_{IJKL} \neq 0 \implies p_I \succeq p_K$); знаменатели же элементов матрицы M имеют вид $h_\gamma + \rho(h_\gamma) + \pi(h_\gamma) + \ell$, где π — вес по отношению к $\mathfrak{h}$, соответствующий p_I , а ℓ — положительное целое число. Слагаемое $\pi(h_\gamma)$ появляется в начале вычисления $\tilde{p}_I \diamond \tilde{p}_J$, когда мы перемещаем $\xi \in \overline{U}(\mathfrak{h})$ налево через $\tilde{p}_I$; в процессе вычисления дальнейших многократных коммутаторов знаменатели более не меняются. Обратим формально соотношение (2.12), не обращая внимания на возможные алгебраические зависимости между $\widetilde{p_I p_J}$ или между $\tilde{p}_K \diamond \tilde{p}_L$: $\widetilde{p_I p_J} = M_{IJKL}^{-1} \tilde{p}_K \diamond \tilde{p}_L$; при этом обратная матрица M^{-1} также треугольная с элементами из $\overline{U}(\mathfrak{h})$ и единицами на диагонали. Поскольку определитель матрицы M равен единице, структура знаменателей элементов матрицы M^{-1} такая же, как и у элементов матрицы M . Коммутационные соотношения в $U(\mathfrak{g})$, $p_I p_J = p_J p_I + \Upsilon$, $p_I \succ p_J$, $\Upsilon \in \mathfrak{g}$, принимают вид $\widetilde{p_I p_J} = \widetilde{p_J p_I} + \widetilde{\Upsilon}$, $\widetilde{\Upsilon} \in \mathfrak{p} + \mathfrak{h}$, в редукционной алгебре. Перепишем эти соотношения в виде правил упорядочивания для произведения $\diamond$, выражая проекции $\widetilde{p\bar{p}}$ в терминах произведений $\tilde{p} \diamond \tilde{p}$ при помощи матрицы M^{-1} в обеих частях соотношений. При этом правая часть, будучи переписана в терминах умножения $\diamond$, будет содержать только упорядоченные слагаемые, левая же часть имеет вид $\tilde{p}_I \diamond \tilde{p}_J + \dots$, где точками заменены слагаемые, содержащие произведения $\tilde{p}_{I'} \diamond \tilde{p}_{J'}$, $p_I \succ p_{I'}$. Каждое такое слагаемое либо уже упорядочено, либо приводится к упорядоченной форме вида (2.11) (здесь мы используем индукцию по I). Коэффициент при $\tilde{p}_{I'} \diamond \tilde{p}_{J'}$ принадлежит кольцу $\overline{U}(\mathfrak{h})$; таким образом, упорядочивание произведений $\tilde{p}_{I'} \diamond \tilde{p}_{J'}$ может привести к появлению в (2.11) членов степени 1 или нуля с коэффициентами из $\overline{U}(\mathfrak{h})$.

Аналогичным образом индукцией по степени фильтрации (она описана в п. (b)) доказывается, что алгебра $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ порождена над $\overline{U}(\mathfrak{h})$ элементами $\tilde{p}_L$. Для этого рассмотрим весовой базис, описанный в утверждении (c), т. е. базис $\{\tilde{p}_{\overline{L}}\}$ (здесь $\overline{L}$ — мультииндекс) свободного $\overline{U}(\mathfrak{h})$ -модуля $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k)}/Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k-1)}$, образованного образами в $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ произведений $p_{L_1}^{n_1} \cdots p_{L_m}^{n_m}$, где $p_{L_1} \prec \cdots \prec p_{L_m}$ и $k = n_1 + \cdots + n_m$. Зададим на множестве базисных элементов линейный порядок $\prec$, согласованный с частичным порядком $<$ на $\mathfrak{h}^*$; согласованность понимается так же, как и для элементов $\tilde{p}_L$: [вес элемента $\tilde{p}_{\overline{K}}$] $<$ [вес элемента $\tilde{p}_{\overline{L}}$] $\implies \tilde{p}_{\overline{K}} \prec \tilde{p}_{\overline{L}}$. Теми же, что и выше, аргументами, основанными на структуре проектора P , мы доказываем следующее обобщение формулы (2.12):

$$\tilde{p}_I \diamond \tilde{p}_{\overline{J}} = \sum_{K, \overline{L}} M_{I\overline{J}K\overline{L}} \widetilde{p_K p_{\overline{L}}}, \quad (2.13)$$

где матрица M с элементами из $\overline{U}(\mathfrak{h})$ опять имеет структуру треугольной матрицы с единицами на главной диагонали. Поэтому матрица M обратима и элементы обратной к ней матрицы M^{-1} принадлежат $\overline{U}(\mathfrak{h})$. Из формулы $\widetilde{p_I p_J} = M_{IJKL}^{-1} \widetilde{p_K} \diamond \widetilde{p_L}$ вытекает шаг индукции: подпространство $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k+1)}$ порождено произведениями в $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ элементов множества $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(1)}$. $\square$

Отметим, что до локализации алгебра $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \text{Norm}(\text{An}_+)/\text{An}_+$ не порождается элементами степени 1. Подалгебра в $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, порожденная элементами степени 1 («step algebra»), была исходным объектом исследований Микельссона [7].

(е) Следующие мономы образуют базис левого $\overline{U}(\mathfrak{h})$ -модуля $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$:

$$\widetilde{p}_{I_1} \diamond \cdots \diamond \widetilde{p}_{I_a}, \quad p_{I_1} \preceq \cdots \preceq p_{I_a}. \quad (2.14)$$

Докажем сначала несколько более тонкое утверждение.

Предложение 1. *Всякое выражение в $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ может быть записано в упорядоченной форме посредством многократного применения формулы (2.11) в виде инструкции «замените левую часть правой».*

Доказательство. Для экономии места в процессе доказательства этого предложения мы будем иногда употреблять обозначение $I \prec J$ вместо $p_I \prec p_J$ (аналогичное соглашение используется для знаков $\preceq$, $\succ$ и $\succeq$).

Рассмотрим однородную квадратичную часть соотношений (2.11):

$$\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2} = \sum_{I'_1, I'_2: I'_1 \preceq I'_2} \cdots \widetilde{p}_{I'_1} \diamond \widetilde{p}_{I'_2}, \quad I_1 \succ I_2, \quad (2.15)$$

где точки заменяют коэффициенты из $\overline{U}(\mathfrak{h})$. Обозначим через $\mathcal{S}(\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2})$ правую часть равенства (2.15). Будем трактовать (2.15) как множество инструкций $\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2} \rightsquigarrow \mathcal{S}(\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2})$ ($\rightsquigarrow$ означает «заменить») в свободной алгебре с весовыми образующими $\widetilde{p}_I$.

Докажем утверждение для кубического монома $\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2} \diamond \widetilde{p}_{I_3}$. Для такого монома мы можем применить инструкции (2.15) к $\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2}$, если $I_1 \succ I_2$, и к $\widetilde{p}_{I_2} \diamond \widetilde{p}_{I_3}$, если $I_2 \succ I_3$. Обозначим результаты через $\mathcal{S}_{12}(\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2} \diamond \widetilde{p}_{I_3})$ и $\mathcal{S}_{23}(\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2} \diamond \widetilde{p}_{I_3})$ соответственно.

Для всякого элемента $\psi \in \mathfrak{h}^*$, $\psi = \sum l_i \alpha_i$, где α_i — простые корни, положим $d(\psi) := \sum l_i$. Функция d согласована с частичным порядком $<$ на $\mathfrak{h}^*$, т.е. $d(\alpha) < d(\beta)$, если $\alpha < \beta$. Обозначим тем же символом d функцию на множестве индексов, нумерующих весовой базис пространства $\mathfrak{p}$, определенную равенством $d(I) := d(\mu_I)$, где μ_I — вес элемента $\widetilde{p}_I$.

Имеем равенство $d(I'_1) + d(I'_2) = d(I_1) + d(I_2)$ для всякого монома $\widetilde{p}_{I'_1} \diamond \widetilde{p}_{I'_2}$, появляющегося в правой части равенства (2.15) (заметим, что при этом разность $d(I_1) - d(I'_1)$ есть целое число). Поскольку $I_1 \succ I_2$ и $I'_1 \preceq I'_2$, имеем неравенства $d(I_1) \geq d(I_2)$ и $d(I'_1) \leq d(I'_2)$; таким образом, $d(I'_1) \leq d(I_1)$ и $d(I'_2) \geq d(I_2)$.

Каждому моному $\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2} \diamond \widetilde{p}_{I_3}$, т.е. упорядоченной тройке индексов (I_1, I_2, I_3) , сопоставим число $\mathfrak{d}(I_1, I_2, I_3) := 2d(I_1) + d(I_2)$. Применение инструкций упорядочивания $\mathcal{S}_{12}$ или $\mathcal{S}_{23}$ к $\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2} \diamond \widetilde{p}_{I_3}$ не увеличивает значений функции $\mathfrak{d}$, иными словами, значение функции $\mathfrak{d}$ на каждом появившемся мономе не больше, чем $\mathfrak{d}(I_1, I_2, I_3)$. В самом деле, при замене $\widetilde{p}_{I_1} \diamond \widetilde{p}_{I_2}$ на $\widetilde{p}_{I'_1} \diamond \widetilde{p}_{I'_2}$ имеем $2d(I'_1) + d(I'_2) =$

$d(I'_1) + (d(I'_1) + d(I'_2)) = d(I'_1) + (d(I_1) + d(I_2)) \leq d(I_1) + (d(I_1) + d(I_2)) = 2d(I_1) + d(I_2)$; при замене $\tilde{p}_{I_2} \diamond \tilde{p}_{I_3}$ на $\tilde{p}_{I'_2} \diamond \tilde{p}_{I'_3}$ верны соотношения $d(I'_2) \leq d(I_2)$ и $d(I'_1) = d(I_1)$.

Для всякой линейной комбинации $X = \sum c_{I_1 I_2 I_3} \tilde{p}_{I_1} \diamond \tilde{p}_{I_2} \diamond \tilde{p}_{I_3}$ кубических мономов с коэффициентами $c_{I_1 I_2 I_3} \in \overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$ обозначим тем же символом $\mathfrak{d}$ максимальное значение функции $\mathfrak{d}$ на мономах, встречающихся в X , т. е. $\mathfrak{d}(X) := \max_{(I_1, I_2, I_3): c_{I_1 I_2 I_3} \neq 0} \mathfrak{d}(I_1, I_2, I_3)$.

Предположим, что утверждение неверно и существует кубический моном, который невозможно упорядочить, пользуясь инструкциями (2.15). Поскольку пространство $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ конечномерно, множество значений функции $\mathfrak{d}$ на кубических мономах ограничено снизу. Поэтому минимальное значение $\mathfrak{d}_{\min}$ функции $\mathfrak{d}$ на множестве неупорядочиваемых кубических мономов конечно, $\mathfrak{d}_{\min} > -\infty$. Пусть $\tilde{p}_{I_1} \diamond \tilde{p}_{I_2} \diamond \tilde{p}_{I_3}$ — моном, который нельзя упорядочить, причем $\mathfrak{d}(I_1, I_2, I_3) = \mathfrak{d}_{\min}$. Применение инструкций упорядочивания (2.15) не может строго уменьшить значение функции $\mathfrak{d}$, ибо это противоречит минимальности значения $\mathfrak{d}(I_1, I_2, I_3)$. Поэтому среди появившихся мономов обязательно есть хотя бы один моном $\tilde{p}_{I'_1} \diamond \tilde{p}_{I'_2} \diamond \tilde{p}_{I'_3}$ с тем же значением функции $\mathfrak{d}$. Если моном $\tilde{p}_{I'_1} \diamond \tilde{p}_{I'_2} \diamond \tilde{p}_{I'_3}$ появился в инструкции $\mathcal{S}_{12}(\tilde{p}_{I_1} \diamond \tilde{p}_{I_2} \diamond \tilde{p}_{I_3})$, то $2d(I'_1) + d(I'_2) = 2d(I_1) + d(I_2)$, $d(I_1) \geq d(I_2)$, $d(I'_1) \leq d(I'_2)$ и $I'_3 = I_3$; общий вес при этом сохраняется, поэтому $d(I'_1) = d(I_1)$ и $d(I'_2) = d(I_2)$, откуда $d(I_1) = d(I_2) = d(I'_1) = d(I'_2)$. Если же моном $\tilde{p}_{I'_1} \diamond \tilde{p}_{I'_2} \diamond \tilde{p}_{I'_3}$ появился в инструкции $\mathcal{S}_{23}(\tilde{p}_{I_1} \diamond \tilde{p}_{I_2} \diamond \tilde{p}_{I_3})$, то $d(I_2) \geq d(I_3)$, $d(I'_2) \leq d(I'_3)$, $d(I'_2) = d(I_2)$ и $I'_1 = I_1$; аналогичные соображения приводят к равенствам $d(I_2) = d(I_3) = d(I'_2) = d(I'_3)$. Структура матрицы M , определенной формулой (2.12), а также аргументы, использованные в доказательстве утверждения (d), говорят о том, что при $d(I) = d(J)$ выражение $\mathcal{S}(\tilde{p}_I \diamond \tilde{p}_J)$ содержит в точности один моном $\tilde{p}_{I'} \diamond \tilde{p}_{J'}$ с условием $d(I') = d(I)$ и этот моном есть $\tilde{p}_J \diamond \tilde{p}_I$. Таким образом, с точностью до мономов, для которых значение функции $\mathfrak{d}$ меньше чем $\mathfrak{d}_{\min}$ (они могут быть упорядочены по нашему предположению), и коэффициентов из $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$, операция $\mathcal{S}_{12}$, $I_1 \succ I_2$, совпадает с операцией $\tilde{p}_{I_1} \diamond \tilde{p}_{I_2} \rightsquigarrow \tilde{p}_{I_2} \diamond \tilde{p}_{I_1}$, а операция $\mathcal{S}_{23}$, $I_2 \succ I_3$, совпадает с операцией $\tilde{p}_{I_2} \diamond \tilde{p}_{I_3} \rightsquigarrow \tilde{p}_{I_3} \diamond \tilde{p}_{I_2}$. Перестановки (1, 2) и (2, 3) соседей порождают все перестановки трех букв. Орбита $\tilde{p}_{I_1} \diamond \tilde{p}_{I_2} \diamond \tilde{p}_{I_3}$ действия группы перестановок трех элементов I_1, I_2 и I_3 содержит упорядоченный моном, что приводит к противоречию.

Наличие в полных инструкциях (2.11) членов нулевой и первой степени приводит лишь к возникновению в процессе упорядочивания линейных или квадратичных членов. Поэтому всякий кубический полином может быть упорядочен и с помощью инструкций (2.11).

Более общо, сопоставим моному $X = \tilde{p}_{I_1} \diamond \dots \diamond \tilde{p}_{I_k}$ произвольной степени k число $\mathfrak{d}(I_1, \dots, I_k) := (k-1)d(I_1) + (k-2)d(I_2) + \dots + d(I_{k-1})$ и в ситуации, когда значение этой величины минимально, заключим, что, с точностью до членов, в соответствующем смысле меньших X , инструкции по существу сводятся к перестановкам $(i, i+1)$ соседних индексов, порождающих всю группу перестановок множества из k букв, так что упорядоченное выражение лежит в орбите элемента X этой группы. $\square$

Доказательство утверждения (е). Согласно доказанному выше утверждению (d), алгебра $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ порождена элементами $\tilde{p}_I$ и, благодаря форме (2.11) соотношений, допускает фильтрацию по степени относительно умножения $\diamond$.

Пусть $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(\diamond k)}$ — подпространство элементов степени не более k по отношению к произведению $\diamond$. Из равенства $\tilde{p}_{I_1} \diamond \dots \diamond \tilde{p}_{I_k} = \tilde{p}_{I_1} P \tilde{p}_{I_2} P \dots P \tilde{p}_{I_k}$ следует включение $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(\diamond k)} \subset Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(k)}$. Обратное включение также справедливо, поскольку алгебра $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ порождена элементами $\tilde{p}_I$. Значит, эти две фильтрации совпадают.

Поэтому выражение $\widetilde{p_{I_1} \dots p_{I_k}}$, $I_1 \preceq \dots \preceq I_k$, есть элемент пространства $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(\diamond k)}$ и, согласно только что доказанному предложению, может быть упорядочен. Мощности множеств $\{\widetilde{p_{I_1} \dots p_{I_k}} \mid I_1 \preceq \dots \preceq I_k\}$ и $\{\tilde{p}_{I_1} \diamond \dots \diamond \tilde{p}_{I_k} \mid I_1 \preceq \dots \preceq I_k\}$ равны, так что, согласно (2.10), множество $\{\tilde{p}_{I_1} \diamond \dots \diamond \tilde{p}_{I_k} \mid I_1 \preceq \dots \preceq I_k\}$ есть базис пространства $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(\diamond k)} / Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{(\diamond(k-1))}$. $\square$

Заметим, что для порядка, не согласованного с частичным порядком $< \text{ в } \mathfrak{h}^*$, упорядочивающие соотношения вида (2.11) могут существовать, однако утверждение (е) не обязательно верно. Например, упорядочивающие соотношения (2.11) могут быть выписаны для лексикографического порядка на образующих z_{ij} и t_i (считая, что $z_{ii} = t_i$) алгебры Z_n , определенной в следующем параграфе, но при упорядочивании кубических мономов возникают циклы уже для $n = 2$ (мы не приводим деталей; это результат явных вычислений).

§3. Диагональная редукционная алгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$

Пусть $\mathfrak{gl}_n$ — алгебра Ли полной линейной группы n -мерного комплексного линейного пространства. Рассмотрим редуктивную пару $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ и $\mathfrak{k} = \mathfrak{gl}_n$ диагонально вложена в $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$. Соответствующую редукционную алгебру мы называем *диагональной редукционной алгеброй* и обозначаем символом Z_n .

Фиксируем следующие обозначения для образующих так определенных алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$. Пусть $E_{ij}^{(1)}$ и $E_{ij}^{(2)}$, $i, j = 1, \dots, n$, — стандартные образующие двух копий алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ внутри $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$,

$$[E_{ij}^{(p)}, E_{kl}^{(q)}] = \delta_{pq}(\delta_{jk}E_{il}^{(p)} - \delta_{il}E_{kj}^{(p)}),$$

где δ_{st} — символ Кронекера. Положим

$$e_{ij} := \frac{1}{2}(E_{ij}^{(1)} + E_{ij}^{(2)}), \quad E_{ij} := \frac{1}{2}(E_{ij}^{(1)} - E_{ij}^{(2)}). \quad (3.1)$$

Элементы e_{ij} линейно порождают диагонально вложенную алгебру Ли $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{gl}_n$, а элементы E_{ij} линейно порождают присоединенный $\mathfrak{k}$ -модуль $\mathfrak{p}$. Алгебра Ли $\mathfrak{k}$ и пространство $\mathfrak{p}$ составляют симметрическую пару, т. е. $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ и $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}, \quad [e_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}, \quad [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}. \quad (3.2)$$

В дальнейшем мы обозначаем через h_a элемент e_{aa} подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{k} \in \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$, а через h_{ab} — элемент $e_{aa} - e_{bb}$.

Пусть $\{\varepsilon_a\}$ — базис пространства $\mathfrak{h}^*$, двойственный к базису $\{h_a\}$ пространства $\mathfrak{h}$, $\varepsilon_a(h_b) = \delta_{ab}$. Мы также будем использовать корневые обозначения h_α , e_α , $e_{-\alpha}$ для элементов алгебры Ли $\mathfrak{k}$ и H_α , E_α , $E_{-\alpha}$ для элементов пространства $\mathfrak{p}$. Подалгебра Ли $\mathfrak{n}_+$ в треугольном разложении (1.1) порождена корне-

выми векторами e_{ij} с $i < j$; подалгебра Ли $\mathfrak{n}_-$ порождена корневыми векторами e_{ij} с $i > j$. Пусть $\mathfrak{b}_+$ и $\mathfrak{b}_-$ — соответствующие борелевские подалгебры, $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$. Система Δ_+ положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{k}$ состоит из корней $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $i < j$, а система Δ_- — из корней $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $i > j$.

Фиксируем следующее действие группы, накрывающей симметрическую группу S_n (группу Вейля диагональной подалгебры Ли $\mathfrak{k}$), автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$:

$$\sigma_i(x) := \text{Ad}_{\exp(e_{i,i+1})} \text{Ad}_{\exp(-e_{i+1,i})} \text{Ad}_{\exp(e_{i,i+1})}(x), \quad (3.3)$$

так что $\sigma_i(e_{kl}) = (-1)^{\delta_{ik}+\delta_{il}} e_{\sigma_i(k)\sigma_i(l)}$ и $\sigma_i(E_{kl}) = (-1)^{\delta_{ik}+\delta_{il}} E_{\sigma_i(k)\sigma_i(l)}$. Здесь $\sigma_i = (i, i+1)$ — элементарная транспозиция в симметрической группе. Описанное действие группы, накрывающей группу S_n , естественно продолжается до действия этой же группы автоморфизмами ассоциативной алгебры $A \equiv A_n := U(\mathfrak{gl}_n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$. Ограничение этого действия на пространство $\mathfrak{h}$ совпадает с естественным действием $\sigma(h_k) = h_{\sigma(k)}$, $\sigma \in S_n$, группы Вейля на подалгебре Картана.

Сдвинутое действие (2.3) группы Вейля на $\mathfrak{h}$ выглядит следующим образом:

$$\sigma \circ h_k := h_{\sigma(k)} + k - \sigma(k), \quad k = 1, \dots, n, \quad \sigma \in S_n. \quad (3.4)$$

Оно превращается в обычное при переходе к переменным

$$\check{h}_k := h_k - k, \quad \check{h}_{ij} := \check{h}_i - \check{h}_j; \quad (3.5)$$

т. е. $\sigma \circ \check{h}_k = \check{h}_{\sigma(k)}$ и $\sigma \circ \check{h}_{ij} = \check{h}_{\sigma(i)\sigma(j)}$ для всякого $\sigma \in S_n$. Множество знаменателей, определяющих локализации $\bar{U}(\mathfrak{h})$ и $\bar{A}$, состоит из элементов

$$h_{ij} + l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (3.6)$$

Мы выбираем множество векторов E_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, в качестве базиса пространства $\mathfrak{p}$. Вес элемента E_{ij} равен $\varepsilon_i - \varepsilon_j$. Согласованность линейного порядка $\prec$ с частичным порядком $<$ на $\mathfrak{h}^*$ означает условие

$$E_{ij} \prec E_{kl}, \quad \text{если } i - j > k - l. \quad (3.7)$$

Порядок в каждом подмножестве $\{E_{ij} \mid i - j = a\}$, где a фиксировано, может быть выбран произвольным. Например, можем считать, что

$$E_{ij} \prec E_{kl}, \quad \text{если } i - j > k - l \quad \text{или} \quad i - j = k - l \quad \text{и} \quad i > k. \quad (3.8)$$

Обозначим через z_{ij} образ в Z_n элемента E_{ij} . Мы также будем использовать обозначения t_i для элементов z_{ii} и $t_{ij} := t_i - t_j$ для элементов $z_{ii} - z_{jj}$. Порядок (3.8) индуцирует порядок на образующих z_{ij} алгебры Z_n :

$$z_{ij} \prec z_{kl} \iff E_{ij} \prec E_{kl}. \quad (3.9)$$

По утверждению (d) из §2 существуют структурные константы $B_{(ab),(cd),(ij),(kl)} \in \bar{U}(\mathfrak{h})$ и $D_{(ab),(cd)} \in \bar{U}(\mathfrak{h})$, такие, что для всех $a, b, c, d = 1, \dots, n$

$$z_{ab} \diamond z_{cd} = \sum_{i,j,k,l: z_{ij} \preceq z_{kl}} B_{(ab),(cd),(ij),(kl)} z_{ij} \diamond z_{kl} + D_{(ab),(cd)}. \quad (3.10)$$

Линейные члены в правой части равенства (3.10) отсутствуют, поскольку пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ симметрическая. Соотношения (3.10) вместе с весовыми условиями

$$[h, z_{ab}] = (\varepsilon_a - \varepsilon_b)(h)z_{ab} \quad (3.11)$$

образуют полный набор определяющих соотношений алгебры Z_n .

Структура знаменателей элементов матриц M и M^{-1} , упомянутая выше в доказательстве соотношений (2.11), показывает, что для алгебры Z_n знаменатели структурных констант $B_{(ab),(cd),(ij),(kl)}$ и $D_{(ab),(cd)}$ суть произведения линейных множителей вида $\hbar_{ij} + \ell$, $i < j$, где ℓ — целое число, $\ell \geq -1$. Это следует из того факта, что в нашей ситуации $\mathfrak{sl}_2$ -подалгебра (диагональной алгебры $\mathfrak{gl}_n$), соответствующая произвольному положительному корню $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $i < j$, имеет в $\mathfrak{p}$ неприводимые представления размерности не выше 3, так что числа ℓ в знаменателях проектора могут уменьшиться благодаря присутствию члена (π, γ) не более чем на 2.

Антиинволюция Шевалле ϵ в $U(\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n)$, $\epsilon(e_{ij}) := e_{ji}$, $\epsilon(E_{ij}) := E_{ji}$, индуцирует антиинволюцию ϵ в алгебре Z_n :

$$\epsilon(z_{ij}) = z_{ji}, \quad \epsilon(h_k) = h_k. \quad (3.12)$$

Кроме того, внешний автоморфизм диаграммы Дынкина алгебры $\mathfrak{gl}_n$ определяет инволютивный автоморфизм ω алгебры Z_n ,

$$\omega(z_{ij}) = (-1)^{i+j+1} z_{j'i'}, \quad \omega(h_k) = -h_{k'}, \quad (3.13)$$

где $i' = n + 1 - i$. Операции ϵ и ω коммутируют, $\epsilon\omega = \omega\epsilon$.

Центральные элементы подалгебры $U(\mathfrak{gl}_n) \otimes 1 \subset A$, порожденные n элементами Казимира степеней $1, \dots, n$, а также центральные элементы подалгебры $1 \otimes U(\mathfrak{gl}_n) \subset A$ проектируются в центральные элементы алгебры Z_n . В частности, центральные элементы степени 1 проектируются в центральные элементы

$$h_1 + \dots + h_n \quad \text{и} \quad t_1 + \dots + t_n \quad (3.14)$$

алгебры Z_n . Разность центральных элементов степени два проектируется в центральный элемент

$$\sum_{i=1}^n (h_i - 2i)t_i \quad (3.15)$$

алгебры Z_n . Образы остальных операторов Казимира более сложны.

3.1. Замена переменных. Мы будем использовать следующие элементы алгебры $\overline{U}(\mathfrak{h})$:

$$A_{ij} := \frac{\hbar_{ij}}{\hbar_{ij} - 1}, \quad A'_{ij} := \frac{\hbar_{ij} - 1}{\hbar_{ij}}, \quad B_{ij} := \frac{\hbar_{ij} - 1}{\hbar_{ij} - 2}, \quad B'_{ij} := \frac{\hbar_{ij} - 2}{\hbar_{ij} - 1}, \quad C'_{ij} := \frac{\hbar_{ij} - 3}{\hbar_{ij} - 2},$$

где переменные $\hbar_{ij}$ определены равенствами (3.5). Заметим, что $A_{ij}A'_{ij} = B_{ij}B'_{ij} = 1$.

Определим элементы $\check{t}_1, \dots, \check{t}_n \in Z_n$ следующими соотношениями:

$$\check{t}_1 := t_1, \quad \check{t}_2 := \check{q}_1(t_1), \quad \check{t}_3 := \check{q}_2\check{q}_1(t_1), \quad \dots, \quad \check{t}_n := \check{q}_{n-1} \cdots \check{q}_2\check{q}_1(t_1). \quad (3.16)$$

Используя (2.6), получаем соотношения

$$\begin{aligned}\check{q}_i(t_i) &= -\frac{1}{\check{h}_{i,i+1}-1} t_i + \frac{\check{h}_{i,i+1}}{\check{h}_{i,i+1}-1} t_{i+1}, \\ \check{q}_i(t_{i+1}) &= \frac{\check{h}_{i,i+1}}{\check{h}_{i,i+1}-1} t_i - \frac{1}{\check{h}_{i,i+1}-1} t_{i+1}, \\ \check{q}_i(t_k) &= t_k, \quad k \neq i, i+1,\end{aligned}\tag{3.17}$$

с помощью которых можно превратить соотношения (3.16) в линейную над кольцом $\overline{U}(\hbar)$ замену переменных:

$$\check{t}_l = t_l \prod_{j=1}^{l-1} A_{jl} - \sum_{k=1}^{l-1} t_k \frac{1}{\check{h}_{kl}-1} \prod_{j=1}^{k-1} A_{jl}, \quad t_l = \check{t}_l \prod_{j=1}^{l-1} A'_{jl} + \sum_{k=1}^{l-1} \check{t}_k \frac{1}{\check{h}_{kl}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{l-1} A'_{jk}.\tag{3.18}$$

В терминах новых переменных $\check{t}_i$ второй из центральных элементов (3.14) выглядит так:

$$\sum t_i = \sum \check{t}_i \prod_{a:a \neq i} \frac{\check{h}_{ia}+1}{\check{h}_{ia}}.$$

В дальнейшем мы используем понятие формул с *коэффициентами ограниченного роста*. Это означает следующее. Пусть для каждого n имеется набор формул (выражающих некоторое действие, соотношения etc.) с коэффициентами из $\overline{U}(\hbar)$. Мы говорим, что эти формулы имеют коэффициенты ограниченного роста, если степени числителей и знаменателей коэффициентов (в приведенной форме, после сокращения на общие множители) не растут с ростом n .

Например, приведенное ниже множество соотношений для Z_n имеет коэффициенты ограниченного роста, будучи записано в некотором специальном наборе образующих. В этом же смысле действие (3.17) имеет коэффициенты ограниченного роста, в то время как замена переменных (3.18) этим свойством не обладает.

3.2. Действие группы кос. Поскольку $\check{q}_i^2(x) = x$ для всякого элемента x нулевого веса, на пространстве нулевого веса действие группы кос сводится к действию ее факторгруппы — симметрической группы. Хотя коэффициенты в замене переменных (3.18) имеют неограниченный рост в смысле разд. 3.1, действие преобразований $\check{q}_i$ на новые переменные $\check{t}_i$ имеет коэффициенты ограниченного роста. В самом деле, из определения (3.16) и соотношения $\check{q}_i(t_1) = t_1$ для всех $i > 1$ следует, что

$$\check{q}_\sigma(\check{t}_i) = \check{t}_{\sigma(i)} \quad \text{для любого } \sigma \in S_n.\tag{3.19}$$

Действие автоморфизмов Желобенко на образующие z_{kl} выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\check{q}_i(z_{ik}) &= -z_{i+1,k} A_{i,i+1}, & \check{q}_i(z_{ki}) &= -z_{k,i+1}, & k \neq i, i+1, \\ \check{q}_i(z_{i+1,k}) &= z_{i,k}, & \check{q}_i(z_{k,i+1}) &= z_{k,i} A_{i,i+1}, & k \neq i, i+1, \\ \check{q}_i(z_{i,i+1}) &= -z_{i+1,i} A_{i,i+1} B_{i,i+1}, & \check{q}_i(z_{i+1,i}) &= -z_{i,i+1}, \\ \check{q}_i(z_{j,k}) &= z_{j,k}, & j, k &\neq i, i+1.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Положим, как и раньше, $i' = n+1-i$. Действие группы кос (3.20) согласовано с антиинволюцией ϵ и инволюцией ω (заметим, что $\omega(\check{h}_{ij}) = \check{h}_{j'i'}$), см. (3.12) и (3.13), в следующем смысле:

$$\epsilon\check{q}_i = \check{q}_i^{-1}\epsilon, \quad \omega\check{q}_i = \check{q}_{i'-1}\omega. \quad (3.21)$$

Пусть w_0 — элемент наибольшей длины группы Вейля алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$, т.е. симметрической группы S_n . Отображение $\check{q}_{w_0}^2$, подобно квадратам преобразований, соответствующих простым корням, см. (2.8), сводится к сопряжению некоторым элементом алгебры $\overline{U}(\mathfrak{h})$. Прямая проверка показывает также, что

$$\check{q}_{w_0}(z_{ij}) = (-1)^{i+j} z_{i'j'} \prod_{a:i < i'} A_{ai'} \prod_{b:b > j'} A_{j'b}, \quad \check{q}_{w_0}(\check{t}_i) = \check{t}_{i'}. \quad (3.22)$$

Из формулы (3.22) следует существование упорядочивающих соотношений на образующие z_{ij} для порядка, обратного к порядку (3.8)–(3.9).

Следствие 2. *Существуют такие $B'_{(ab),(cd),(ij),(kl)}$, $D'_{(ab),(cd)} \in \overline{U}(\mathfrak{h})$, что для всех z_{ab} и z_{cd} верны соотношения*

$$z_{ab} \diamond z_{cd} = \sum_{i,j,k,l: z_{kl} \preceq z_{ij}} B'_{(ab),(cd),(ij),(kl)} z_{ij} \diamond z_{kl} + D'_{(ab),(cd)}. \quad (3.23)$$

В самом деле, применим преобразование $\check{q}_{w_0}$ к равенствам (3.10), воспользовавшись формулой (3.22). Это приведет к соотношениям (3.23), поскольку подстановка $(i, j) \mapsto (i', j')$ обращает порядок $\prec$.

3.3. Определяющие соотношения. Для упрощения формул мы опускаем в этом разделе символ $\diamond$ для умножения в алгебре Z_n . Это не должно привести к недоразумениям, поскольку в этом разделе мы не используем никаких других операций умножения в редукционной алгебре.

Каждое из выводимых нами соотношений имеет определенный вес, равный сумме двух корней. Из общих соображений верхняя оценка для числа членов в квадратичном соотношении веса $\lambda = \alpha + \beta$ есть число $|\lambda|$ квадратичных комбинаций $z_{\alpha'} z_{\beta'}$ с $\alpha' + \beta' = \lambda$. Имеется несколько типов весов соотношений, помимо тривиального $\lambda = 2(\epsilon_i - \epsilon_j)$, $|\lambda| = 1$:

1. $\lambda = \pm(2\epsilon_i - \epsilon_j - \epsilon_k)$, где i, j и k попарно различны. В этом случае $|\lambda| = 2$.
2. $\lambda = \epsilon_i - \epsilon_j + \epsilon_k - \epsilon_l$ с попарно различными i, j, k и l . В этом случае $|\lambda| = 4$.
3. $\lambda = \epsilon_i - \epsilon_j$, $i \neq j$. Для монома $z_{\alpha'} z_{\beta'}$ имеется $2(n-2)$ возможностей (подтип 3a) с $\alpha' = \epsilon_i - \epsilon_k$, $\beta' = \epsilon_k - \epsilon_j$ или $\alpha' = \epsilon_k - \epsilon_j$, $\beta' = \epsilon_i - \epsilon_k$, где $k \neq i, j$, и $2n$ возможностей (подтип 3b) с $\alpha' = 0$, $\beta' = \epsilon_i - \epsilon_j$ или $\alpha' = \epsilon_i - \epsilon_j$, $\beta' = 0$. Таким образом, $|\lambda| = 4(n-1)$.
4. $\lambda = 0$. Здесь имеется n^2 возможностей (подтип 4a) с $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$ и $n(n-1)$ возможностей (подтип 4b) с $\alpha' = \epsilon_i - \epsilon_j$, $\beta' = \epsilon_j - \epsilon_i$, $i \neq j$. Таким образом, $|\lambda| = n(2n-1)$.

Далее мы отдельно выписываем соотношения каждого типа и подтипа. Соотношения 1-го и 2-го типа имеют простой вид в исходных образующих z_{ij} . Для записи соотношений 3-го и 4-го типов удобно перенормировать образующие z_{ij} с $i \neq j$. А именно, положим

$$\check{z}_{ij} = z_{ij} \prod_{k=1}^{i-1} A_{ki}. \quad (3.24)$$

В терминах образующих $\check{z}_{ij}$ формулы (3.20) для действия автоморфизмов $\check{q}_i$ приобретают вид

$$\begin{aligned}\check{q}_i(\check{z}_{ik}) &= -\check{z}_{i+1,k}, & \check{q}_i(\check{z}_{i+1,k}) &= \check{z}_{i,k}A_{i+1,i}, & k &\neq i, i+1, \\ \check{q}_i(\check{z}_{ki}) &= -\check{z}_{k,i+1}, & \check{q}_i(\check{z}_{k,i+1}) &= \check{z}_{k,i}A_{i,i+1} = A'_{i+1,i}\check{z}_{k,i}, & k &\neq i, i+1, \\ \check{q}_i(\check{z}_{i,i+1}) &= -A'_{i+1,i}\check{z}_{i+1,i}, & \check{q}_i(\check{z}_{i+1,i}) &= -\check{z}_{i,i+1}A_{i+1,i}, \\ \check{q}_i(\check{z}_{j,k}) &= \check{z}_{j,k}, & j, k &\neq i, i+1.\end{aligned}$$

Хотя в перенормировке (3.24) рост коэффициентов неограничен, действие группы кос по-прежнему имеет коэффициенты ограниченного роста.

1. Соотношения типа 1 имеют вид

$$z_{ij}z_{ik} = z_{ik}z_{ij}A_{kj}, \quad z_{ji}z_{ki} = z_{ki}z_{ji}A'_{kj} \quad \text{для } j < k, i \neq j, k. \quad (3.25)$$

2. Введем обозначение $D_{ijkl} := \check{h}_{ik}^{-1} - \check{h}_{jl}^{-1}$. Тогда для всяких четырех попарно различных индексов i, j, k и l выполнено следующее соотношение типа 2:

$$\begin{aligned}[z_{ij}, z_{kl}] &= z_{kj}z_{il}D_{ijkl}, & i < k, j < l, \\ z_{ij}z_{kl} - z_{kl}z_{ij}A'_{jl}A'_{lj} &= z_{kj}z_{il}D_{ijkl}, & i < k, j > l.\end{aligned} \quad (3.26)$$

3а. Пусть $i \neq k \neq l \neq i$. Положим

$$\check{E}_{ikl} := -\left((\check{t}_i - \check{t}_k)\frac{\check{h}_{il} + 1}{\check{h}_{ik}\check{h}_{il}} + (\check{t}_k - \check{t}_l)\frac{\check{h}_{il} - 1}{\check{h}_{kl}\check{h}_{il}}\right)\check{z}_{il} + \sum_{a:a \neq i,k,l} \check{z}_{al}\check{z}_{ia}\frac{B_{ai}}{\check{h}_{ka} + 1}.$$

В этих обозначениях первая группа соотношений типа 3 имеет вид

$$\begin{aligned}\check{z}_{ik}\check{z}_{kl}A'_{ik} - \check{z}_{kl}\check{z}_{ik}B_{ki} &= \check{E}_{ikl}, & i < k < l, \\ \check{z}_{ik}\check{z}_{kl}A'_{ik}A'_{lk}B_{lk} - \check{z}_{kl}\check{z}_{ik}B_{ki} &= \check{E}_{ikl}, & i < l < k, \\ \check{z}_{ik}\check{z}_{kl}A_{ki} - \check{z}_{kl}\check{z}_{ik}B_{ki} &= \check{E}_{ikl}, & k < i < l, \\ \check{z}_{ik}\check{z}_{kl}A_{ki}A_{li}B'_{li} - \check{z}_{kl}\check{z}_{ik}B_{ki} &= \check{E}_{ikl}, & k < l < i, \\ \check{z}_{ik}\check{z}_{kl}A'_{ik}A'_{lk}B_{lk}A_{li}B'_{li} - \check{z}_{kl}\check{z}_{ik}B_{ki} &= \check{E}_{ikl}, & l < i < k, \\ \check{z}_{ik}\check{z}_{kl}A_{ki}A'_{lk}B_{lk}A_{li}B'_{li} - \check{z}_{kl}\check{z}_{ik}B_{ki} &= \check{E}_{ikl}, & l < k < i.\end{aligned} \quad (3.27)$$

Соотношения (3.27) можно переписать в более компактной форме с использованием обеих систем, z_{ij} и $\check{z}_{ij}$, образующих алгебры. Пусть теперь

$$E_{ikl} := -\left((\check{t}_i - \check{t}_k)\frac{\check{h}_{il} + 1}{\check{h}_{ik}\check{h}_{il}} + (\check{t}_k - \check{t}_l)\frac{\check{h}_{il} - 1}{\check{h}_{kl}\check{h}_{il}}\right)z_{il} + \sum_{a:a \neq i,k,l} \check{z}_{al}z_{ia}\frac{B_{ai}}{\check{h}_{ka} + 1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}z_{ik}\check{z}_{kl}A'_{ik} - \check{z}_{kl}z_{ik}B_{ki} &= E_{ikl}, & k < l, \\ z_{ik}\check{z}_{kl}A'_{ik}A'_{lk}B_{lk} - \check{z}_{kl}z_{ik}B_{ki} &= E_{ikl}, & l < k.\end{aligned} \quad (3.28)$$

Более того, дополнительная перенормировка $\check{z}_{kl} = \check{z}_{kl}B_{lk}$ при $k > l$ приводит к тому, что левая часть второй из формул (3.28) с точностью до общего множителя становится такой же, как левая часть первой строки этих же формул, а именно, равной $(z_{ik}\check{z}_{kl}A'_{ik} - \check{z}_{kl}z_{ik}B_{ki})A'_{lk}$.

3b. Пусть $l \neq j$. Вторая группа соотношений типа 3 такова:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{ij}\dot{t}_i &= \dot{t}_i\dot{z}_{ij}C'_{ji} - \dot{t}_j\dot{z}_{ij}\frac{1}{\dot{h}_{ij}+2} - \sum_{a:a \neq i,j} \dot{z}_{aj}\dot{z}_{ia}\frac{1}{\dot{h}_{ia}+2}, \\ \dot{z}_{ij}\dot{t}_j &= -\dot{t}_i\dot{z}_{ij}\frac{C'_{ji}}{\dot{h}_{ij}-1} + \dot{t}_j\dot{z}_{ij}A_{ij}A'_{ji}B_{ji} + \sum_{a:a \neq i,j} \dot{z}_{aj}\dot{z}_{ia}A_{ij}A'_{ji}\frac{B_{ai}}{\dot{h}_{ja}+1}, \\ \dot{z}_{ij}\dot{t}_k &= \dot{t}_i\dot{z}_{ij}\frac{(\dot{h}_{ij}+3)B_{ji}}{(\dot{h}_{ik}^2-1)(\dot{h}_{jk}-1)} + \dot{t}_j\dot{z}_{ij}\frac{(\dot{h}_{ij}+1)B_{ji}}{(\dot{h}_{ik}-1)(\dot{h}_{jk}-1)^2} + \dot{t}_k\dot{z}_{ij}A_{ik}A_{ki}A_{jk}B'_{jk} \\ &\quad - \dot{z}_{kj}\dot{z}_{ik}\frac{(\dot{h}_{ij}+1)B_{ki}}{(\dot{h}_{ik}-1)(\dot{h}_{jk}-1)} - \sum_{a:a \neq i,j,k} \dot{z}_{aj}\dot{z}_{ia}\frac{\dot{h}_{ij}+1}{(\dot{h}_{ik}-1)(\dot{h}_{jk}-1)} \cdot \frac{B_{ai}}{\dot{h}_{ka}+1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

4a. Соотношения нулевого веса (тип 4) также разделяются на две группы. Соотношения из первой группы имеют вид

$$[\dot{t}_i, \dot{t}_j] = 0 \quad (3.30)$$

Отметим, что соотношения (3.30) справедливы для диагональной редукционной алгебры произвольной редуктивной алгебры Ли: образы образующих, соответствующих картановской подалгебре, коммутируют между собой.

4b. Соотношения второй группы типа 4 имеют вид (здесь $i \neq j$)

$$[\dot{z}_{ij}, \dot{z}_{ji}] = \dot{h}_{ij} - \frac{1}{\dot{h}_{ij}}(\dot{t}_i - \dot{t}_j)^2 + \sum_{a:a \neq i,j} \left(\frac{1}{\dot{h}_{ja}+1} \dot{z}_{ai}\dot{z}_{ia} - \frac{1}{\dot{h}_{ia}+1} \dot{z}_{aj}\dot{z}_{ja} \right). \quad (3.31)$$

На этом список соотношений заканчивается.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ систему соотношений (3.25)–(3.27) и (3.29)–(3.31).

Теорема 3. *Соотношения $\mathfrak{R}$ — определяющие соотношения для весовых образующих z_{ij} и t_i алгебры Z_n . В частности, множество (3.10) упорядочивающих соотношений выводится над кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$ из соотношений $\mathfrak{R}$ (и эквивалентно им).*

Вывод соотношений приведен в работе [5]; доказательство теоремы дано в § 4.

Соотношения (3.25)–(3.27) и (3.29)–(3.31) имеют коэффициенты ограниченного роста по отношению к образующим $\dot{z}_{ij}$ и $\dot{t}_i$; по отношению же к исходным образующим z_{ij} и t_i рост коэффициентов соотношений не ограничен. Мы склонны предполагать, что коэффициенты упорядочивающих соотношений (3.10) имеют неограниченный рост.

3.4. Стабилизация. Рассмотрим вложение алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ в алгебру Ли $\mathfrak{gl}_{n+1}$, заданное соответствием $e_{ij} \mapsto e_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, где элементы e_{ij} в прообразе — это образующие алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$; в образе теми же символами e_{ij} обозначены элементы алгебры $\mathfrak{gl}_{n+1}$. Аналогичное правило $E_{ij} \mapsto E_{ij}$ определяет вложение алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ в алгебру $\mathfrak{gl}_{n+1} \oplus \mathfrak{gl}_{n+1}$ и обертывающей алгебры $A_n = U(\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n)$ в $A_{n+1} = U(\mathfrak{gl}_{n+1} \oplus \mathfrak{gl}_{n+1})$. При этом вложении нильпотентные подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ отображаются в соответствующие нильпотентные подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{n+1}$, так что определено вложение $\iota_n: Z_n \rightarrow Z_{n+1}$ соответствующих пространств двойных смежных классов. Однако отображение

ι_n — не гомоморфизм алгебр, поскольку отображения умножения определены при помощи проекторов, которые различны для алгебр Ли $\mathfrak{gl}_n$ и $\mathfrak{gl}_{n+1}$.

Тем не менее между двумя умножениями имеется важная связь. А именно, пусть V_{n+1} — левый идеал алгебры Z_{n+1} , порожденный элементами $z_{i,n+1}$, $i = 1, \dots, n$, а V'_{n+1} — ее правый идеал, порожденный элементами $z_{n+1,i}$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим временно через $\diamond_{(n)}: Z_n \otimes Z_n \rightarrow Z_n$ и $\diamond_{(n+1)}: Z_{n+1} \otimes Z_{n+1} \rightarrow Z_{n+1}$ операции умножения в Z_n и в Z_{n+1} (вместо используемого в других местах обозначения $\diamond$, см. (2.5)).

Пусть $\pi_{n+1}: Z_{n+1} \rightarrow Z_{n+1}$ — произвольный линейный оператор в Z_{n+1} , проектирующий пространство Z_{n+1} на $\iota_n(Z_n)$; предположим также, что либо идеал V_{n+1} , либо идеал V'_{n+1} лежит в ядре оператора π_{n+1} ,

$$\pi_{n+1}(x) = x, \quad x \in \iota_n(Z_n), \quad \text{и} \quad \pi_{n+1}(V_{n+1}) = 0 \quad \text{или} \quad \pi_{n+1}(V'_{n+1}) = 0.$$

Определим отображение $\tilde{\diamond}_{(n)}: \iota_n(Z_n) \otimes \iota_n(Z_n) \rightarrow \iota_n(Z_n)$ как композицию,

$$\tilde{\diamond}_{(n)} = \pi_{n+1} \diamond_{(n+1)}.$$

Предложение 4. *Имеет место следующее соотношение коммутативности:*

$$\iota_n \diamond_{(n)} = \tilde{\diamond}_{(n)}(\iota_n \otimes \iota_n). \quad (3.32)$$

Это утверждение можно уточнить: из его доказательства видно, что для всяких $i, j, k, l \leq n$ разность $\iota_n(z_{ij} \diamond_{(n)} z_{kl}) - z_{ij} \diamond_{(n+1)} z_{kl}$ в Z_{n+1} может быть представлена в виде $\sum_{a=1}^n z_{n+1,a} \diamond_{(n+1)} z_{i+k-j-l+a,n+1} \xi^{(a)}$, где $\xi^{(a)} \in \bar{U}(\mathfrak{h})$.

Для доказательства предложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5. *Левый идеал алгебры Z_n , порожденный всеми элементами z_{in} , где $i = 1, \dots, n-1$, состоит из образов в Z_n сумм $\sum_i X_i E_{in}$, где $X_i \in \bar{A}$, $i = 1, \dots, n-1$.*

Правый идеал алгебры Z_n , порожденный элементами z_{ni} , $i = 1, \dots, n-1$, состоит из образов в Z_n сумм $\sum_i E_{ni} Y_i$, где $Y_i \in \bar{A}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Доказательство. Мы следуем аргументам, использованным при доказательстве соотношений (2.11). Представим проектор P в виде суммы слагаемых вида $\xi e_{-\gamma_1} \cdots e_{-\gamma_m} e_{\gamma'_1} \cdots e_{\gamma'_{m'}}$, где $\xi \in \bar{U}(\mathfrak{h})$, а $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ и $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{m'}$ — положительные корни алгебры $\mathfrak{k}$. Для всякого $\lambda \in Q_+$ обозначим через P_λ сумму описанных выше слагаемых с условием $\gamma_1 + \cdots + \gamma_m = \gamma'_1 + \cdots + \gamma'_{m'} = \lambda$. Тогда $P = \sum_{\lambda \in Q_+} P_\lambda$. Для любых $X, Y \in \bar{A}$ определим элемент $X \diamond_\lambda Y$ как образ элемента $X P_\lambda Y$ в редукционной алгебре, так что $X \diamond Y = \sum_{\lambda \in Q_+} X \diamond_\lambda Y$.

Для всякого $X \in \bar{A}$ и $i < n$ рассмотрим произведение $X \diamond_\lambda z_{in}$. Пусть $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varepsilon_k$. Произведение $X \diamond_\lambda z_{in}$ равно нулю, если $\lambda_n \neq 0$. В самом деле, в этом случае в каждом слагаемом элемента P_λ один из множителей $e_{\gamma'_k}$ равен некоторому элементу e_{jn} . Мы можем упорядочить мономы в алгебре $U(\mathfrak{n}_+)$ таким образом, чтобы все элементы e_{jn} стояли справа. Поскольку $[e_{jn}, E_{in}] = 0$, произведение $e_{jn} E_{in}$ принадлежит левому идеалу $\bar{I}_+$, так что $X \diamond_\lambda z_{in} = 0$ в алгебре Z_n . Если же $\lambda_n = 0$, то, используя PBW-аргументы, мы можем переписать элемент P_λ в виде суммы мономов, составленных из образующих e_{ij} , $1 \leq i < j < n$, так что их присоединенное действие оставляет инвариантным пространство, порожденное всеми E_{in} с $i < n$. Таким образом, мы представили произведение $X \diamond_\lambda z_{in}$ как образ суммы $\sum_j X_j E_{jn}$ с $X_j \in \bar{A}$, где $j < n$. Значит,

левый идеал, порожденный элементами z_{in} , содержится в векторном пространстве образов в алгебре Z_n сумм $\sum_i X_i E_{in}$. Более того, произведение $X \diamond z_{in}$ есть образ элемента $X E_{in} + \sum_{m < i} X^{(m)} E_{mn}$ для некоторых $X^{(m)}$. Теперь индукцией по i мы доказываем обратное включение.

Вторая часть леммы доказывается аналогично. $\square$

Доказательство предложения 4. Достаточно доказать следующее утверждение. Пусть X и Y — (некоммутативные) полиномы от элементов E_{ij} с $i, j \leq n$. Тогда произведение элементов $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ в алгебре Z_{n+1} совпадает с образом в алгебре Z_{n+1} элемента $X P_n Y$, где P_n — проектор для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$, по модулю левого идеала в алгебре Z_{n+1} , порожденного всеми элементами $z_{i,n+1}$, где $i \leq n$. Мы снова замечаем, что, благодаря структуре проектора, для любого веса $\lambda = \sum_k \lambda_k \varepsilon_k$ с $\lambda_{n+1} = 0$ произведение $X \diamond_\lambda Y$, связанное с алгеброй $\mathfrak{gl}_n$, совпадает с произведением $X \diamond_\lambda Y$, связанным с алгеброй $\mathfrak{gl}_{n+1}$. Остается доказать, что для любых определенных выше полиномов X и Y элемент $\tilde{X} \diamond_\lambda \tilde{Y}$ принадлежит идеалу алгебры Z_{n+1} , порожденному всеми элементами $z_{i,n+1}$ с $i \leq n$, при условии, что $\lambda_{n+1} \neq 0$. Однако из весовых соображений следует, что для всякого веса λ с $\lambda_{n+1} \neq 0$ элемент $\tilde{X} \diamond_\lambda \tilde{Y}$ может быть представлен как образ в алгебре Z_{n+1} суммы $\sum X_i Y_i$, в которой $(n+1)$ -я компонента веса каждого из сомножителей Y_i не равна нулю. Следовательно, каждый элемент Y_i должен принадлежать левому идеалу, порожденному элементами $E_{j,n+1}$, $j = 1, \dots, n$. Для окончания доказательства предложения применяем лемму 5.

Часть предложения 4, относящаяся к идеалу V'_{n+1} , доказывается аналогично. $\square$

Следствие 6. Коэффициенты в соотношениях (3.25)–(3.27), (3.29)–(3.31) стабильны по отношению к определенным выше вложениям алгебр $Z_n \rightarrow Z_{n+1}$.

Стабильность коэффициентов понимается в следующем смысле. Пусть $\mathcal{R}$ — соотношение в алгебре Z_{n+1} из нашего определяющего списка $\mathfrak{R}$, см. разд. 3.3. Предположим, что $\mathcal{R}$ не содержит членов с образующими $z_{i,n+1}$, $i = 1, \dots, n$, в качестве левого сомножителя. Тогда, если мы вычеркнем из $\mathcal{R}$ слагаемые, содержащие образующие $z_{i,n+1}$, $i = 1, \dots, n$, как правые сомножители (такое слагаемое обязательно содержит некоторую образующую $z_{n+1,j}$, $j = 1, \dots, n$, как левый сомножитель), мы получим соотношение в алгебре Z_n .

Назовем обрезанием результат этой процедуры получения соотношений в алгебре Z_n из соотношений в алгебре Z_{n+1} (при сформулированных выше условиях). Тогда все соотношения в алгебре Z_n могут быть получены обрезанием подходящих соотношений в алгебре Z_{n+1} .

Более того, каждое соотношение в алгебре Z_n единственным образом продолжается до соотношения в алгебре Z_{n+1} , из которого оно же может быть получено процедурой обрезания; другими словами, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством соотношений в алгебре Z_n и множеством тех соотношений в алгебре Z_{n+1} , которые не содержат слагаемых, имеющих $z_{i,n+1}$, $i = 1, \dots, n$, в качестве левого сомножителя.

Правило стабилизации не есть изолированный феномен для алгебры $\mathfrak{gl}$; оно может быть обобщено на некоторые другие четверки алгебр, заменяющих представленные в следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathfrak{gl}_n & & \mathfrak{gl}_{n+1} \oplus \mathfrak{gl}_{n+1} \\ \searrow & & \nearrow \\ & \mathfrak{gl}_{n+1} & \end{array}$$

§ 4. Полнота соотношений

4.1. Приведем вначале общие аргументы, доказывающие более слабую версию теоремы 3, в которой кольцо $\overline{\mathcal{U}}(\mathfrak{h})$ расширено до поля $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$.

Как и выше, символом $\mathfrak{R}$ мы обозначаем систему соотношений (3.25)–(3.27), (3.29)–(3.31). Символом $\mathfrak{R}^<$ обозначим множество (3.10). Мы увидим, что система $\mathfrak{R}$ эквивалентна системе $\mathfrak{R}^<$. Система $\mathfrak{R}$ получается из соотношений (3.10), поскольку последние составляют множество определяющих соотношений для весовых образующих; остается вывести обратную импликацию. Обозначим временно образующие из множества $\{\dot{z}_{ij}, \dot{t}_i\}$ символами $\tilde{p}_L$, занумерованными лишь одним индексом L , $L = 1, \dots, n^2$. Число правил упорядочивания для n^2 переменных $\tilde{p}_L$ равно $n^2(n^2 - 1)/2$. Поэтому для доказательства полноты достаточно показать, что размерность (над $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$) подпространства, порожденного элементами системы $\mathfrak{R}$, не меньше $n^2(n^2 - 1)/2$. Всякое соотношение из множества $\mathfrak{R}$ есть сумма произведений $\tilde{p}_L \diamond \tilde{p}_M$ с коэффициентами из $\overline{\mathcal{U}}(\mathfrak{h})$ плюс, быть может, слагаемое нулевой по элементам из $\tilde{p}$ степени. Обозначим через $\mathfrak{R}_0$ систему $\mathfrak{R}$ с опущенными слагаемыми нулевой по элементам из $\tilde{p}$ степени. Достаточно показать, что

$$\begin{aligned} &\text{система } \mathfrak{R}_0 \text{ содержит } n^2(n^2 - 1)/2 \\ &\text{линейно независимых над } \mathcal{D}(\mathfrak{h}) \text{ соотношений.} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Переставив все коэффициенты из $\overline{\mathcal{U}}(\mathfrak{h})$ во всех соотношениях из $\mathfrak{R}_0$ в одну (скажем, правую) сторону от мономов $\tilde{p}_L \diamond \tilde{p}_M$, можно придать переменным $\dot{h}_{ij}$ произвольные численные значения (учитывая соотношения линейной зависимости между ними). Для проверки утверждения (4.1) достаточно найти такое множество значений переменных $\dot{h}_{ij}$, для которого соответствующая система с числовыми коэффициентами содержит $n^2(n^2 - 1)/2$ линейно независимых соотношений. Однако при $\dot{h}_{ij}$, стремящихся к ∞ (следующим образом: $\dot{h}_{i,i+1} = c_{i,i+1}h$, $h \rightarrow \infty$, где $c_{i,i+1}$ — ненулевые постоянные), непосредственное наблюдение показывает, что система $\mathfrak{R}_0$ превращается в систему $\tilde{p}_L \diamond \tilde{p}_M = \tilde{p}_M \diamond \tilde{p}_L$, $M > L$. Это доказывает полноту системы над полем $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$. $\square$

Отметим, что приведенные выше аргументы не использовали согласованность порядка $<$ с частичным порядком $<$ на пространстве $\mathfrak{h}^*$.

4.2. Для заданного порядка пусть X обозначает формальный вектор всех неупорядоченных произведений вида $\tilde{p}_L \diamond \tilde{p}_K$, а Y — формальный вектор всех упорядоченных произведений. Для того чтобы переписать систему $\mathfrak{R}$ в форме упорядочивающих соотношений, необходимо разрешить для вектора X систему линейных уравнений

$$\mathcal{A}X = \mathcal{B}Y + C, \quad (4.2)$$

где C — вектор слагаемых степени 0, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — некоторые матрицы с коэффициентами из $\overline{U}(\mathfrak{h})$ (согласно приведенному выше доказательству, $\mathcal{A}$ — квадратная матрица). Решение этой системы может привести к возникновению коэффициентов из $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ (а не из $\overline{U}(\mathfrak{h})$) в упорядочивающих соотношениях. Такое случается, например, для лексикографического порядка для образующих z_{ij} и t_i (здесь $z_{ii} = t_i$) алгебры Z_n при $n > 2$ (мы не приводим деталей; это результат прямых вычислений). Из формулы (2.11) (и утверждения (е) §2) следует, что для порядка (3.8)–(3.9) решение системы (4.2) определено над кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$. Однако это говорит лишь о том, что для этого порядка возможные члены из $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ в определителе матрицы $\mathcal{A}$ сокращаются в комбинациях $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}^{-1}C$; системы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^<$ могут, тем не менее, не быть эквивалентными над $\overline{U}(\mathfrak{h})$ в том смысле, что элементы матрицы $\mathcal{A}^{-1}$ могут не лежать в кольце $\overline{U}(\mathfrak{h})$ и мы не можем перейти от системы $\mathfrak{X}$ к системе $\mathfrak{X}^<$, составляя линейные над $\overline{U}(\mathfrak{h})$ комбинации соотношений из $\mathfrak{X}$.

4.3. Перейдем теперь к доказательству теоремы 3. Пусть $\mathcal{F}$ — свободная алгебра над кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$ с весовыми образующими z_{ij} и t_i . Обе системы, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^<$, определены над кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$, и имеет место гомоморфизм $\varpi: \mathcal{F}/\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{F}/\mathfrak{X}^<$. Согласно слабой форме теоремы 3, см. разд. 4.1, гомоморфизм ϖ становится изоморфизмом после тензорного умножения на поле $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ (над кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$). Докажем, что и само отображение ϖ есть изоморфизм.

Доказательство использует индукцию по n , закон стабилизации и вычисление некоторых определителей. При этом на каждом шагу исследуется структура появляющихся знаменателей. Индукция начинается с $n = 1$ и алгебры Z_1 , для которой доказывать нечего.

В общем случае нам необходимо показать, что числитель определителя матрицы $\mathcal{A}$, фигурирующей в равенстве (4.2), есть произведение линейных сомножителей вида (3.6). Поскольку соотношения весовые, матрица $\mathcal{A}$ имеет блочную структуру, ее блоки $\mathcal{A}_\lambda$ занумерованы весами соотношений. Определитель матрицы $\mathcal{A}$ есть произведение определителей блоков $\mathcal{A}_\lambda$.

Так же, как и в разд. 3.4, рассмотрим алгебру Z_{n-1} как подпространство пространства Z_n . Фиксируем вес λ для алгебры Z_{n-1} . Обозначим через $\mathcal{L}_\lambda^{(n)}$ линейную подсистему $\mathcal{A}_\lambda X_\lambda = \mathcal{B}_\lambda Y_\lambda + C_\lambda$ системы (4.2), соответствующую весу λ алгебры Z_n . Система $\mathcal{L}_\lambda^{(n)}$ содержит подсистему ${}^{(n)}\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$, соответствующую образующим из Z_{n-1} (структура предельных соотношений, построенных в разд. 4.1, показывает, что соотношения пронумерованы парами образующих, так что подсистема ${}^{(n)}\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ корректно определена). Сравним ${}^{(n)}\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ с соответствующей системой $\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ для алгебры Z_{n-1} . Согласно принципу стабилизации, система $\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ получается из системы ${}^{(n)}\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ процедурой обрезания в смысле разд. 3.4: между двумя системами имеется взаимно однозначное соответствие, при этом соотношения из системы ${}^{(n)}\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ содержат дополнительные по сравнению с системой $\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ члены, в которые входят произведения $z_{ni} \diamond z_{jn}$ для некоторых $i, j < n$. В силу предположения индукции можно считать, что система $\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ эквивалентна над своим собственным кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$ системе упорядочивающих соотношений. Применение этих же преобразований

к системе $^{(n)}\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$ также приводит к упорядочивающим соотношениям, поскольку слагаемые $z_{ni} \diamond z_{jn}$ уже упорядочены. Эти рассуждения показывают, что достаточно рассмотреть только подмножество соотношений, занумерованных образующими $(\tilde{p}_L, \tilde{p}_M)$, для которых

$$\tilde{p}_L \notin Z_{n-1} \quad \text{или} \quad \tilde{p}_M \notin Z_{n-1}. \quad (4.3)$$

Применяя построенные правила упорядочивания (эквивалентные системе $^{(n)}\mathcal{L}_\lambda^{(n-1)}$) к этим оставшимся соотношениям, мы оставим в них из произведений $\tilde{p}_U \tilde{p}_V$, где $\tilde{p}_U$ и $\tilde{p}_V \in Z_{n-1}$, только упорядоченные члены $\tilde{p}_{L'} \tilde{p}_{M'}$, $L' < M'$, с $\tilde{p}_{L'}, \tilde{p}_{M'} \in Z_{n-1}$.

Нам осталось проследить за тем, что происходит с членами (весовых) соотношений, содержащими базисные элементы, не принадлежащие Z_{n-1} . Рассмотрим отдельно каждый тип весовых соотношений, следуя нумерации, описанной в начале разд. 3.3. Соотношения типов 1 и 2 не доставляют трудностей.

Количество соотношений типов 3 и 4 увеличивается с ростом n . Замена переменных (3.18), а также перенормировка (3.24) и обратная к ней имеют допустимые знаменатели; поэтому мы можем работать с образующими $\mathring{t}_i$ и $\mathring{z}_{ij}$ вместо t_i и z_{ij} .

4.4. Соотношения типа 4. Для соотношений (3.30) и (3.31) условие (4.3) означает, что в рассмотрении нуждается только подсистема соотношений (3.31), соответствующих парам (z_{ni}, z_{in}) , $i < n$. Следуя аргументам предыдущего раздела, мы предполагаем, что неупорядоченные мономы в этой подсистеме суть произведения $\mathring{z}_{in} \diamond \mathring{z}_{ni}$, $i < n$. Перепишем подсистему в виде (4.2):

$$\mathring{z}_{in} \diamond \mathring{z}_{ni} + \sum_{a: a < n, a \neq i} \frac{1}{\mathring{h}_{ia} + 1} \mathring{z}_{an} \diamond \mathring{z}_{na} = \dots, \quad (4.4)$$

где точками обозначены упорядоченные члены. Мы видим, что элементы матрицы $\mathring{\mathfrak{A}}$, определитель которой мы ищем, суть

$$\mathring{\mathfrak{A}}_{ij} := \frac{1}{\mathring{h}_{ij} + 1}, \quad (4.5)$$

где, напомним, $\mathring{h}_{ij} = \mathring{h}_i - \mathring{h}_j$; в частности, $\mathring{h}_{ii} = 0$. Определитель этой матрицы хорошо известен. Матрица $\mathring{\mathfrak{A}}$ есть специализация матрицы $\mathfrak{A}$ с элементами

$$\mathfrak{A}_{ij} := \frac{1}{x_i + y_j} \quad (4.6)$$

в точках $x_i = \mathring{h}_i$ и $y_j = -\mathring{h}_j + 1$. Определитель матрицы $\mathfrak{A}$ вычислен в работе [3]: $\det \mathfrak{A} = \prod_{i,j: i < j} ((x_i - x_j)(y_i - y_j)) / \prod_{i,j} (x_i + y_j)$. Поэтому $\det \mathring{\mathfrak{A}} = \prod_{i,j: i < j} \mathring{h}_{ij}^2 / (\mathring{h}_{ij}^2 - 1)$. Таким образом, матрица, обратная к $\mathring{\mathfrak{A}}$, имеет допустимые знаменатели.

4.5. Соотношения типа 3. Для соотношений (3.27) и (3.29) типа 3 условие (4.3) означает, что достаточно исследовать лишь соотношения с весами $\varepsilon_i - \varepsilon_n$ и $\varepsilon_n - \varepsilon_i$, $i < n$.

Начнем с веса $\varepsilon_i - \varepsilon_n$ при фиксированном i , $i < n$. Неупорядоченные квадратичные мономы веса $\varepsilon_i - \varepsilon_n$ суть

$$\dot{z}_{an} \diamond \dot{z}_{ia}, \quad \text{где } a \text{ таково, что } 2a < i + n, a \neq i, \quad (4.7)$$

$$\dot{z}_{ij} \diamond \dot{z}_{jn}, \quad \text{где } j \text{ таково, что } i + n \leq 2j, \quad (4.8)$$

$$\dot{z}_{in} \diamond \dot{t}_b. \quad (4.9)$$

В нашей системе участвуют все соотношения (3.27) и (3.29). Однако система имеет блочно-треугольную структуру, поддающуюся анализу.

Обозначим через $\mathbf{r}_{ikl}$ то соотношение из списка (3.27), у которого левая часть начинается с произведения $\dot{z}_{ik} \diamond \dot{z}_{kl}$. Пусть κ_{ikl} — коэффициент при произведении $\dot{z}_{ik} \diamond \dot{z}_{kl}$ в соотношении $\mathbf{r}_{ikl}$. Соотношение $\mathbf{r}_{ijn}$ можно записать в форме

$$\dot{z}_{ij} \diamond \dot{z}_{jn} \kappa_{ijn} = \sum_{a: a \neq i, a < n} \dot{z}_{an} \diamond \dot{z}_{ia} \frac{B_{ai}}{\dot{h}_{ja} + 1} + \dots \quad (4.10)$$

(поскольку $\dot{h}_{jj} = 0$). Здесь многоточие означает упорядоченные члены вида $\dot{t}_b \diamond \dot{z}_{in}$ (слагаемое $\dot{z}_{jn} \diamond \dot{z}_{ij}$ включено в сумму перед многоточием). Среди неупорядоченных мономов (4.7)–(4.9) только мономы (4.7) встречаются в соотношениях $\mathbf{r}_{ijn}$. При этом соответствующий индекс j таков, что $2j < i + n$ и $j \neq i$. Таким образом, подсистема $\{\mathbf{r}_{ijn} \mid 2j < i + n, j \neq i\}$ содержит столько же соотношений, сколько и неупорядоченных мономов. Элементы матрицы, определитель которой необходимо при этом вычислить в процессе выражения неупорядоченных мономов через упорядоченные — это $\dot{\mathfrak{A}}'_{aj} := B_{ai}/(\dot{h}_{ja} + 1)$; ее a -й столбец содержит элемент B_{ai} в качестве общего сомножителя, так что определитель матрицы $\dot{\mathfrak{A}}'$ есть произведение элементов B_{ai} (по a , таким, что $2a < i + n$ и $a \neq i$), умноженное на определитель матрицы того же вида (4.5), что и выше. Таким образом, определитель матрицы $\dot{\mathfrak{A}}'$ обратим в кольце $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$. Мы используем указанную подсистему для упорядочивания мономов (4.7).

После упорядочивания мономов (4.7) оставшиеся соотношения $\mathbf{r}_{ijn}$ (где j таково, что $i + n \leq 2j$) превращаются в множество упорядочивающих соотношений для мономов (4.8); каждое соотношение содержит теперь в точности один неупорядоченный моном вида (4.8) с коэффициентом κ_{ijn} , обратный к которому имеет допустимые знаменатели.

Множество соотношений (3.29) дает правила упорядочивания для мономов $\dot{z}_{in} \diamond \dot{t}_k$ при условии, что упорядоченные выражения для всех мономов $\dot{z}_{an} \diamond \dot{z}_{ia}$ уже известны.

4.6. Соотношения типа 3 веса $\varepsilon_n - \varepsilon_i$. Рассмотрения разд. 4.2 показывают, что упорядочивающие соотношения (2.11) для любых двух порядков на весовом базисе пространства $\mathfrak{p}$, согласованных с частичным порядком $<$ на пространстве $\mathfrak{h}^*$, эквивалентны над $\overline{\mathbf{U}}(\mathfrak{h})$. Определим вместо порядка (3.8)–(3.9) порядок $\succsim$ следующим образом:

$$z_{ij} \succsim z_{kl}, \quad \text{если } i - j > k - l \quad \text{или} \quad \begin{cases} i > k, & \text{если } i - j = k - l > 0, \\ i < k, & \text{если } i - j = k - l < 0, \\ \text{как угодно,} & \text{если } i - j = k - l = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Особенность порядка $\succsim$ состоит в том, что антиинволюция ϵ , см. (3.12), переводит множество упорядоченных квадратичных мономов произвольного ненулевого веса λ в множество упорядоченных квадратичных мономов веса $-\lambda$.

В работе [5] доказано, что система $\mathfrak{R}$ замкнута относительно антиинволюции ϵ (т.е. системы $\mathfrak{R}$ и $\epsilon(\mathfrak{R})$ эквивалентны над $\overline{U}(\mathfrak{h})$). Для порядка $\succsim$ применение антиинволюции ϵ сводит вопрос об эквивалентности над кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$ множества соотношений $\mathfrak{R}$ и множества (3.10) правил упорядочивания веса $\varepsilon_n - \varepsilon_i$ к тому же вопросу для веса $\varepsilon_i - \varepsilon_n$. Из результатов предыдущего раздела следует утверждение об эквивалентности этих систем соотношений для порядка $\succsim$ и, значит, для любого другого порядка, согласованного с частичным порядком $<$ на множестве $\mathfrak{h}^*$, например, для порядка $\prec$.

Доказательство теоремы 3 завершено. $\square$

Множество $\mathfrak{R}^\prec$ упорядочивающих соотношений (3.10) по своей конструкции замкнуто над $\overline{U}(\mathfrak{h})$ относительно инволюции ω , см. формулу (3.13). В качестве приложения эквивалентности систем соотношений $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^\prec$ над кольцом $\overline{U}(\mathfrak{h})$ мы получаем утверждение о замкнутости над $\overline{U}(\mathfrak{h})$ системы $\mathfrak{R}$ относительно инволюции ω .

Отметим также, что все знаменатели, появляющиеся в доказательстве, имеют вид $\mathring{h}_{ij} \pm \varsigma$, $i < j$, где $\varsigma = 0, 1$ или 2 .

4.7. Как показывает доказательство, по существу единственная матрица, которую необходимо обращать — это матрица $\mathfrak{A}$ с элементами вида (4.5). Элементы обратной к ней матрицы имеют вид

$$(\mathfrak{A}^{-1})_{ij} = -\frac{1}{\mathring{h}_{ij} - 1} \prod_{a:a \neq i} \frac{\mathring{h}_{ia} - 1}{\mathring{h}_{ia}} \prod_{b:b \neq j} \frac{\mathring{h}_{jb} + 1}{\mathring{h}_{jb}}. \quad (4.12)$$

Проверка формулы (4.12) в форме равенства $\sum_j (\mathfrak{A}^{-1})_{ij} \mathfrak{A}_{jk} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера, сводится к тождеству

$$\frac{1}{\mathring{h}_{ik} + 1} \prod_{b:b \neq i} \frac{\mathring{h}_{ib} + 1}{\mathring{h}_{ib}} - \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\mathring{h}_{ij}(\mathring{h}_{jk} + 1)} \prod_{b:b \neq i,j} \frac{\mathring{h}_{jb} + 1}{\mathring{h}_{jb}} = \delta_{ik} \prod_{b:b \neq i} \frac{\mathring{h}_{ib}}{\mathring{h}_{ib} - 1}, \quad (4.13)$$

которое проверяется подсчетом вычетов и значения в бесконечности обеих частей равенства как функций переменной $\mathring{h}_i$.

Обратная к более общей матрице $\mathfrak{A}$ с элементами (4.6) имеет элементы вида

$$(\mathfrak{A}^{-1})_{ij} = (x_j + y_i) \prod_{a:a \neq j} \frac{x_a + y_i}{x_a - x_j} \prod_{b:b \neq i} \frac{y_b + x_j}{y_b - y_i}. \quad (4.14)$$

Эта формула проверяется аналогично формуле (4.12) при помощи вычисления подходящих вычетов и значений в бесконечности.

Формула (4.12) эквивалентна специализации формулы (4.14) при $x_i = \mathring{h}_i$ и $y_j = -\mathring{h}_j + 1$ (но не совпадает с ней буквально).

Формула (4.12) предоставляет рекурсивную процедуру преобразования системы $\mathfrak{R}$ в систему упорядочивающих соотношений.

Благодарности. Мы благодарим Лоика Пулэна д'Андеси за независимое подтверждение корректности соотношений разд. 3.3 посредством проверки

(с использованием компьютера) теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебры Z_4 , заданной образующими и соотношениями. Мы признательны Елене Огиевцевой за помощь в подготовке текста статьи.

Часть настоящей работы была выполнена во время визитов второго автора в СРТ и CIRM в Марселе. Авторы благодарят сотрудников Институтов за предоставление прекрасных условий для работы во время этих визитов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, *Проекционные операторы для простых групп Ли. II. Общая схема построения понижающих операторов. Группы $SU(n)$* , ТМФ, **15**:1 (1973), 107–119.
- [2] Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, *Описание некоторого класса проекционных операторов для полупростых комплексных алгебр Ли*, Матем. заметки, **26**:1 (1979), 15–25.
- [3] A. Cauchy, *Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées*, in: “Exercices d’analyse et de physique mathématique”, Vol. 2, Bachelier, Paris, 1841, 151–159.
- [4] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, *Mickelsson algebras and Zhelobenko operators*, J. Algebra, **319**:5 (2008), 2113–2165.
- [5] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, *Structure constants of diagonal reduction algebras of gl type* (готовится к публикации).
- [6] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, *Examples of diagonal reduction algebras* (готовится к публикации).
- [7] J. Mickelsson, *Step algebras of semisimple subalgebras of Lie algebras*, Rep. Math. Phys., **4**:4 (1973), 307–318.
- [8] Д. Желобенко, *Представления редуктивных алгебр Ли*, Наука, М., 1994.

Физический институт РАН,
Centre de Physique Théorique, Marseille
e-mail: oleg.ogievetsky@gmail.com

Институт теоретической и экспериментальной физики
e-mail: khor@itep.ru

Поступило в редакцию
29 июня 2009 г.