Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алиев, С. С. Мирзоев, К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 63–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2996>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:17:43

К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка

© 2010. А. Р. Алиев, С. С. Мирзоев

*Посвящается памяти академика НАН
Азербайджана М. Г. Гасымова*

В предлагаемой заметке установлены достаточные, выражаемые в терминах операторных коэффициентов, условия корректной и однозначной разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четного порядка, главная часть которых терпит разрыв. Такие задачи имеют многочисленные приложения, например, в теории упругости. В частности, ряд задач для многослойных тел моделируется уравнениями с кусочно-постоянными коэффициентами.

Пусть A — самосопряженный положительно определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Введем в рассмотрение уравнение

$$(-1)^k u^{(2k)}(t) + \rho(t) A^{2k} u(t) + \sum_{j=1}^{2k} A_j(t) u^{(2k-j)}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad (1)$$

где $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ (см. [1]), $\rho(t) = \alpha$, если $0 \leq t \leq T$, и $\rho(t) = \beta$, если $T < t < +\infty$, причем α, β — положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа, для определенности $\alpha \leq \beta$, а $A_j(t)$, $j = 1, \dots, 2k$, — линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, определенные почти при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Через $W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ обозначим пространство H -значных функций $u(t)$, таких, что $u^{(2k)}(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, $A^{2k} u(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, с нормой [2]

$$\|u\|_{W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)} = (\|u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2)^{1/2}.$$

Предполагая, что $u(t) \in W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$, присоединим к уравнению (1) краевые условия в нуле вида

$$u^{(m_i)}(0) = 0, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad (2)$$

где m_i — натуральные числа, такие, что $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_{k-1} \leq 2k-1$ и $m_i + m_j \neq 2k-1$, $0 \leq i, j \leq 2k-1$.

Определение. Если вектор-функция $u(t) \in W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $\mathbb{R}_+$, а краевые условия (2) выполняются в следующем смысле:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|A^{2k-m_i-1/2} u^{(m_i)}(t)\|_H = 0, \quad i = 0, \dots, k-1,$$

то $u(t)$ будем называть *регулярным решением* краевой задачи (1), (2).

Положим

$$\overset{\circ}{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\}) \equiv \{u(t) : u(t) \in W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H), u^{(m_i)}(0) = 0, i = 0, \dots, k-1\}$$

и обозначим через $\mathcal{P}_0$ оператор, действующий из $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\})$ в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_0 u(t) \equiv (-1)^k u^{(2k)}(t) + \rho(t) A^{2k} u(t), \quad u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\}).$$

Справедлива

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{P}_0$ является изоморфизмом из $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\})$ на $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.*

Из теоремы 1 вытекает, что нормы $\|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$ и $\|u\|_{\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)}$ эквивалентны в $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\})$. Укажем точные оценки норм операторов промежуточных производных $A^{2k-j} dj/dt^j$, действующих из $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\})$ в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$, через норму $\|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$.

Теорема 2. *Пусть $u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\})$. Тогда*

$$\|A^{2k-j} u^{(j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq c_j \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}, \quad j = 0, \dots, 2k-1.$$

Замечание 1. Явные вычисления (достаточно нетривиальные), связанные с отысканием констант

$$c_j = \sup_{0 \neq u \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\})} \|A^{2k-j} u^{(j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{-1}, \quad j = 0, \dots, 2k-1,$$

читатель найдет, проводя для уравнения, имеющего в главной части операторно-дифференциальное выражение вида $(-1)^k \beta^{-1/2} u^{(2k)}(t) + \alpha^{1/2} A^{2k} u(t)$, соответствующие рассуждения из [3].

Отметим, что доказательства теорем 1 и 2 достаточно провести для скалярного случая. Кратко наметим их. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ оператор $\mathcal{P}_0$ с областью определения $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; \{m_i\})$, который действует по формуле $(-1)^k u^{(2k)} + \lambda^{2k} \rho u$, где $\lambda > 0$. Ясно, что он является самосопряженным положительно определенным оператором, поскольку $(\mathcal{P}_0 u, u)_{L_2(\mathbb{R}_+)} \geq \alpha \lambda^{2k} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2$, откуда следует утверждение теоремы 1. Что же касается неравенств в теореме 2, они суть прямое следствие теоремы о промежуточных производных (см. [2]), поскольку операторы $\lambda^{2k-j} dj/dt^j: \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$, $j = 0, \dots, 2k-1$, непрерывны и по теореме 1 при любом $u \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; \{m_i\})$ выполняются неравенства $\|\lambda^{2k-j} u^{(j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq c_j \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}$, $j = 0, \dots, 2k-1$.

При этом имеет место

Лемма. *Для любой вектор-функции $u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H; \{m_i\})$ справедливо коэрцитивное неравенство*

$$\|(-1)^k \beta^{-1/2} u^{(2k)} + \alpha^{1/2} A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \alpha^{-1/2} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Эти исследования позволяют сформулировать на языке операторных коэффициентов уравнения (1) условия существования единственного регулярного решения краевой задачи (1), (2).

Теорема 3. Пусть операторы $A_j(t)A^{-j}$, $j = 1, \dots, 2k$, ограничены в H и выполняется неравенство

$$\sum_{j=0}^{2k-1} c_j \sup_t \|A_{2k-j}(t)A^{-2k+j}\|_{H \rightarrow H} < 1, \quad (3)$$

где числа c_j , $j = 0, \dots, 2k-1$, определяются в теореме 2. Тогда при любом $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ краевая задача (1), (2) имеет единственное регулярное решение.

Замечание 2. Полученные условия разрешимости неумлучшаемы в терминах операторных коэффициентов в том смысле, что в случае невыполнения неравенства (3) краевая задача (1), (2) не является корректной и само уравнение (1) становится не эллиптическим [4].

Замечание 3. При $\rho(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, и $A_j(t) \equiv A_j$, $j = 1, \dots, 2k$, теорема 3 получена в работе [3].

Отметим, что в широком аспекте эллиптические операторно-дифференциальные уравнения второго порядка исследованы, например, в работе [5]. Краевая же задача (1), (2) при $m_i = i$, $i = 0, \dots, k-1$, изучалась в работе [6], а еще ранее, для $\alpha = \beta = 1$ и $A_j(t) \equiv A_j$, $j = 1, \dots, 2k$, — в работах [7], [8], которые послужили толчком к появлению целого ряда статей, в том числе и настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
 [2] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971. [3] С. С. Мирзоев, Докл. АН СССР, **273**:2 (1983), 292–295.
 [4] Ю. А. Дубинский, Матем. сб., **90(132)**:1 (1973), 3–22. [5] А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов, Функц. анализ и его прил., **17**:2 (1983), 38–61. [6] А. Р. Алиев, Матем. заметки, **74**:6 (2003), 803–814. [7] М. Г. Гасымов, Докл. АН СССР, **199**:4 (1971), 747–750. [8] М. Г. Гасымов, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **6**:2–3 (1971), 131–147.

Бакинский государственный университет,
 Институт математики и механики НАН Азербайджана
 e-mail: alievaraz@yahoo.com

Поступило в редакцию
 15 апреля 2009 г.

Бакинский государственный университет
 e-mail: mirzoyevsaber@mail.ru

УДК 517.982.27

Об устойчиво $\mathcal{H}$ -монотонных банаховых парах

© 2010. С. В. Асташкин, К. Е. Тихомиров

1. Введение. Пусть $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ — банаховы пары. Банаховы пространства X и Y , $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$, называются C -интерполяционными относительно пар $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, если каждый линейный оператор T , ограниченный как оператор из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 , ограничен