Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Мустафаев, О радикале алгебр, порожденных сжатием, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 80–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2998>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:11:14

УДК 517.98

О радикале алгебр, порожденных сжатием

© 2010. Г. С. МУСТАФАЕВ

Пусть X — комплексное банахово пространство и $B(X)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в X . Через $\sigma(T)$ будем обозначать спектр, а через $R(z, T) := (zI - T)^{-1}$ — резольвенту оператора $T \in B(X)$. Открытый единичный круг мы будем обозначать через D , а единичную окружность комплексной плоскости — через Γ . Если A — комплексная коммутативная банахова алгебра, то через $\text{Rad}(A)$ будем обозначать ее радикал. Если $\text{Rad}(A) = \{0\}$, то алгебра A называется *полупростой*. Хорошо известно, что если A — коммутативная подалгебра алгебры $B(X)$, то $\text{Rad}(A) = \{R \in A : \sigma(R) = \{0\}\}$.

Если $T \in B(X)$, то через A_T (соответственно W_T) будем обозначать замыкание в равномерной (соответственно в слабой) операторной топологии множества полиномов от T . Заметим, что A_T и W_T — коммутативные банаховы алгебры с единицей. Напомним, что $V \in B(X)$ называется *изометрией*, если $\|Vx\| = \|x\|$ для всех $x \in X$. Хорошо известно, что если V — изометрия, то либо $\sigma(V) = \overline{D}$, либо $\sigma(V) \subset \Gamma$. Теорема Фельдмана [1] утверждает, что если V — изометрия со счетным спектром, то A_V — полупростая алгебра. Горин [2] получил более общий результат в контексте банаховых алгебр. В этой заметке мы изучаем асимптотическое поведение радикала в алгебрах, порожденных сжатием.

Напомним, что $T \in B(X)$ называется *сжатием*, если $\|T\| \leq 1$. Если T — сжатие, то $\sigma(T) \subset \overline{D}$. Множество $\sigma_u(T) := \sigma(T) \cap \Gamma$ называется *унитарным спектром* оператора T . Функционал $\varphi \in X^*$ называется *унимодулярным собственным вектором* оператора T^* , если $T^*\varphi = \xi\varphi$, $\xi \in \Gamma$. Следующая теорема является дискретной версией теоремы Арендта–Бетти–Любича–Ву [3, теорема 5.5.7].

Теорема 1. Пусть T — сжатие в банаховом пространстве X со счетным унитарным спектром и N — слабо* замкнутая линейная оболочка в X^* множества унимодулярных собственных векторов оператора T^* . Тогда при всех $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\| = \sup\{|\psi(x)| : \psi \in N, \|\psi\| \leq 1\}.$$

Хорошо известно, что если $T \in B(X)$, то структурное пространство M_T алгебры A_T можно отождествить с $\sigma_{A_T}(T)$ — спектром оператора T относительно алгебры A_T . Так как $\sigma(T)$ является (замкнутым) подмножеством в $\sigma_{A_T}(T)$, то отсюда следует, что для произвольного $\xi \in \sigma(T)$ существует такой мультипликативный функционал ϕ_ξ на A_T , что $\phi_\xi(T) = \xi$. Применяя теорему 1, получаем следующее обобщение теоремы Фельдмана.

Теорема 2. Пусть T — сжатие в банаховом пространстве со счетным унитарным спектром и M — слабо* замкнутая линейная оболочка множества $\{\phi_\xi : \xi \in \sigma_u(T)\}$ в A_T^* . Тогда при всех $R \in A_T$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R\| = \sup\{|\psi(R)| : \psi \in M, \|\psi\| \leq 1\}.$$

Доказательство. Пусть L_T — оператор левого умножения на T в A_T , $L_T S = TS$, $S \in A_T$. Очевидно, что L_T является сжатием. Как известно [4,

с. 232], $\sigma(L_T)$ совпадает с объединением спектра $\sigma(T)$ и ограниченных компонент резольвентного множества оператора T . Отсюда следует, что $\sigma_u(L_T) = \sigma_u(T)$. С другой стороны, легко проверить, что множество собственных векторов оператора L_T^* совпадает с множеством $\{\lambda\phi : \phi \in M_T, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Кроме того, из теоремы Шилова [5, теорема 2.3.1] следует, что $\sigma_{A_T}(T) \cap \Gamma = \sigma_u(T)$. Следовательно, множество унитарных собственных векторов оператора L_T^* совпадает с множеством

$$\{\lambda\phi_\xi : \xi \in \sigma_u(T), \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Теперь, применяя теорему 1 к оператору L_T в пространстве A_T , получим требуемое утверждение. $\square$

Если спектр оператора $T \in B(X)$ содержится в Γ , то структурное пространство алгебры A_T можно отождествить с $\sigma(T)$ [5, следствие 2.3.2]. Значит, справедливо

Следствие 3. *Если T — сжатие в банаховом пространстве со счетным унитарным спектром, то справедливы следующие утверждения:*

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R\| = 0$ для каждого $R \in \text{Rad}(A_T)$;
- (b) если $\sigma(T) \subset \Gamma$, то $\text{Rad}(A_T) = \{R \in A_T : \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R\| = 0\}$.

Другое обобщение теоремы Фельдмана:

Теорема 4. *Если T — сжатие в банаховом пространстве X со счетным унитарным спектром, то для произвольных $R \in \text{Rad}(W_T)$ и $x \in X$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R x\| = 0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in X^*$ является унитарным собственным вектором оператора T^* , соответствующим собственному значению $\xi \in \Gamma$, и пусть $R \in \text{Rad}(W_T)$. В силу теоремы 1 достаточно показать, что $R^* \varphi = 0$. Так как $R \in W_T$, то существует направленность полиномов $\{P_i\}_{i \in I}$, такая, что $P_i(T) \rightarrow R$ в слабой операторной топологии. Пусть $x \in \text{Ker } \varphi$. Так как $P_i(T)^* = P_i(\xi)\varphi$, то

$$0 = P_i(\xi)\langle \varphi, x \rangle = \langle P_i(T)^* \varphi, x \rangle \rightarrow \langle R^* \varphi, x \rangle.$$

Это показывает, что $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } R^* \varphi$ и потому $R^* \varphi = \lambda \varphi$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $R \in \text{Rad}(W_T)$, получаем, что $R^* \varphi = 0$. $\square$

Для произвольных $T \in B(X)$ и $x \in X$ обозначим через $\rho_T(x)$ множество всех тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых существует X -значная функция $u(z)$, аналитическая в некоторой окрестности U_λ точки λ и такая, что $(zI - T)u(z) = x$ при всех $z \in U_\lambda$. Это множество является открытым и содержит резольвентное множество $\rho(T)$ оператора T . Локальный спектр $\sigma_T(x)$ оператора T в точке x определяется как дополнение к $\rho_T(x)$ и потому является замкнутым подмножеством в $\sigma(T)$. Множество $\sigma_T(x) \cap \Gamma$ называется локальным унитарным спектром оператора T в точке x .

Ниже мы докажем локальный вариант теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть T — сжатие в банаховом пространстве X и $x \in X$. Если $\sigma_T(x) \cap \Gamma$ — счетное множество, то для произвольного $R \in \text{Rad}(W_T)$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R x\| = 0.$$

Для доказательства нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 6. *Пусть V — изометрия в банаховом пространстве X и $x \in X$. Если $\sigma_T(x) \cap \Gamma$ — счетное множество, то $Rx = 0$ при всех $R \in \text{Rad}(W_V)$.*

Доказательство. Положим $E = \overline{\text{span}}\{T^n x : n \geq 0\}$. Тогда E является T -инвариантным подпространством в X . Пусть $V|_E$ — сужение изометрии V на E . В силу [6, лемма 1.3] $\sigma_u(V|_E) = \sigma_V(x) \cap \Gamma$. Следовательно, $V|_E$ является изометрией со счетным спектром. Заметим также, что если $R \in \text{Rad}(W_V)$, то $R|_E \in \text{Rad}(W_{V|_E})$. С другой стороны, из теоремы 4 следует, что алгебра $W_{V|_E}$ полупроста. Таким образом, $R|_E = 0$ и, значит, $Rx = 0$. $\square$

Лемма 7. Если T — сжатие в банаховом пространстве X и E — инвариантное относительно T подпространство, то для произвольного $x \in E$

$$\sigma_{T|_E}(x) \cap \Gamma = \sigma_T(x) \cap \Gamma.$$

Доказательство. Пусть $\pi: X \rightarrow X/E$ — каноническое отображение и $x \in E$. Легко проверить, что $\sigma_T(x) \cap \Gamma \subset \sigma_{T|_E}(x) \cap \Gamma$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим $\xi \in \rho_T(x) \cap \Gamma$. Тогда существует некоторая окрестность U_ξ точки ξ и такая X -значная аналитическая в U_ξ функция $u(z)$, что $(zI - T)u(z) = x$, $z \in U_\xi$. Для произвольного $z \in U_\xi \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ мы имеем $\pi u(z) = 0$, так как

$$u(z) = R(z, T)x = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n x \in E.$$

По теореме единственности $\pi u(z) = 0$ при всех $z \in U_\xi$ и потому $u(z) \in E$. Таким образом, $(zI - T|_E)u(z) = 0$ при всех $z \in U_\xi$. Это показывает, что $\xi \in \rho_{T|_E}(x) \cap \Gamma$. $\square$

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [6] и [7, лемма 2.1]).

Лемма 8. Если T — сжатие в банаховом пространстве X , то существуют банахово пространство Y , линейный сжимающий оператор $J: X \rightarrow Y$ с плотным образом и изометрия V на Y , такие, что

- 1) $VJ = JT$;
- 2) $\|Jx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\|$ при всех $x \in X$;
- 3) $\sigma(V) \subset \sigma(T)$.

Тройка (Y, J, V) называется *предельной изометрией*, ассоциированной с оператором T .

Пусть T — сжатие в банаховом пространстве X и (Y, J, V) — предельная изометрия, ассоциированная с T . Для произвольного $R \in W_T$ определим оператор $\tilde{R}$ на JX равенством $\tilde{R}Jx = JRx$, $x \in X$. Тогда

$$\|\tilde{R}Jx\| = \|JRx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n Rx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|RT^n x\| \leq \|R\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\| = \|R\| \|Jx\|.$$

Поскольку J имеет плотный образ, $\tilde{R}$ допускает расширение на все Y . Будем его снова обозначать через $\tilde{R}$. Легко проверить, что $\tilde{R} \in W_V$ и отображение $R \rightarrow \tilde{R}$ является сжимающим гомоморфизмом. Отсюда следует, что если $R \in \text{Rad}(W_T)$, то $\tilde{R} \in \text{Rad}(W_V)$.

Доказательство теоремы 5. Положим $E = \overline{\text{span}}\{T^n x : n \geq 0\}$ и $S = T|_E$. Пусть (Y, J, V) — предельная изометрия, ассоциированная с S . Заметим, что $\sigma_V(Jx) \subset \sigma_S(x)$. Действительно, если $\lambda \in \rho_S(x)$, то существует некоторая окрестность U_λ точки λ и такая E -значная аналитическая в U_λ функция $u(z)$, что $(zI - S)u(z) = x$, $z \in U_\lambda$. Отсюда следует, что $(zJ - JS)u(z) = Jx$. Согласно лемме 8, $(zI - V)Ju(z) = Jx$, $z \in U_\lambda$, так как $JS = VJ$. Это показывает, что

$\lambda \in \rho_V(Jx)$. Следовательно, $\sigma_V(Jx) \cap \Gamma \subset \sigma_S(x) \cap \Gamma$. Принимая во внимание лемму 7, имеем $\sigma_V(Jx) \cap \Gamma \subset \sigma_T(x) \cap \Gamma$. Отсюда вытекает, что $\sigma_V(Jx) \cap \Gamma$ — счетное множество. Теперь, если $R \in \text{Rad}(W_T)$, то $Q := R|_E \in \text{Rad}(W_S)$ и потому $\tilde{Q} \in \text{Rad}(W_V)$. Так как $\sigma_V(Jx) \cap \Gamma$ счетно, то, используя лемму 6, получаем, что $JQx = \tilde{Q}Jx = 0$ и потому $JRx = 0$. В силу леммы 8 это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n Rx\| = 0$. $\square$

Пусть $T \in B(X)$. Как известно [8], если множество $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ относительно компактно, то $\sigma_u(T)$ — конечное множество. Заметим, что при этом условии T есть оператор с ограниченными степенями. Заменяя норму пространства X на эквивалентную, можно считать, что T является сжатием. Теперь из теоремы 4 следует, что если множество $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ относительно компактно, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n Rx\| = 0$ при всех $R \in \text{Rad}(W_T)$ и $x \in X$. Однако можно утверждать даже большее:

Теорема 9. *Пусть $T \in B(X)$. Если множество $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ относительно компактно в слабой топологии пространства A_T , то для произвольного $R \in \text{Rad}(W_T)$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R\| = 0.$$

Доказательство. Поскольку T — оператор с ограниченными степенями, $\sigma(T) \subset \overline{D}$. Сначала покажем, что $\sigma_u(T)$ — конечное множество. Пусть $\xi \in \sigma_u(T)$. Достаточно показать, что $\{\xi\}$ является изолированной точкой в $\sigma(T)$. Так как множество $\{\xi^n T^n : n \in \mathbb{N}\}$ относительно компактно в слабой топологии пространства A_T , можно считать, что $\xi = 1$. Здесь мы будем пользоваться стандартной техникой эргодической теории. Положим $P_n(T) = \frac{1}{n}(T + \dots + T^n)$. Из теоремы Крейна–Шмульяна [9, с. 471] следует, что множество $\{P_n(T) : n \in \mathbb{N}\}$ относительно компактно в слабой топологии пространства A_T . По теореме Эберлейна–Шмульяна [9, с. 456] существует такая подпоследовательность $\{P_{n_k}(T)\}$ и $P \in B(X)$, что $P_{n_k}(T) \rightarrow P$ при $k \rightarrow \infty$ в слабой топологии пространства A_T . Можно убедиться, что $P \in A_T$. Далее, для произвольного $\xi \in \sigma(T)$ существует такой мультипликативный функционал ϕ_ξ на A_T , что $\phi_\xi(T) = \xi$. Следовательно,

$$\phi_\xi(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_\xi(P_{n_k}(T)) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k}(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k}(\xi + \dots + \xi^{n_k}) = \begin{cases} 0, & \xi \neq 1, \\ 1, & \xi = 1. \end{cases}$$

Так как $\xi \mapsto \phi_\xi(P)$ — непрерывная функция на $\sigma(T)$, то $\{1\}$ является изолированной точкой в $\sigma(T)$.

Из равенств

$$(T - I)P_{n_k}(T) = P_{n_k}(T)(T - I) = \frac{T^{n_k+1} - T}{n_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

получаем $TP = PT = P$. В частности, $P^2 = P$. Легко видеть, что P есть спектральный проектор, соответствующий точке $\{1\}$. Теперь пусть $R \in \text{Rad}(W_T)$. Если $\sigma_u(T) = \emptyset$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0$. Поэтому можно считать, что $\sigma_u(T) = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$. Пусть P_i — спектральный проектор, соответствующий точке $\{\xi_i\}$ ($i = 1, \dots, k$) и $P = P_1 + \dots + P_k$. Так как $TP_i = P_i T = \xi_i P_i$, то $RP_i = P_i R = 0$, откуда следует, что $RP = PR = 0$. Заметим также, что спектр оператора $T(I - P)$ содержится в D и потому $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n(I - P)\| = 0$. Так как $T^n R = T^n(I - P)R$, получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R\| = 0$. $\square$

Напомним, что компактный и квазинильпотентный оператор в банаховом пространстве называется *вольтерровым*. Оператор $T \in B(X)$ называется (*слабо*) *почти периодическим*, если множество $\{T^n x : n \geq 0\}$ относительно (*слабо*) компактно для всех $x \in X$. Применяя теорему де Лю–Гликсберга [10] об отщеплении, мы получаем следующую теорему.

Теорема 10. (а) Если T — почти периодический оператор в банаховом пространстве X , то для произвольных $R \in \text{Rad}(W_T)$ и $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R x\| = 0;$$

(б) Если T — слабо почти периодический оператор в банаховом пространстве, то для произвольного вольтеррова оператора R из W_T

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R\| = 0.$$

Автор благодарит рецензента за ценные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. М. Фельдман, Функц. анализ и его прил., **8:2** (1974), 93–94. [2] Е. А. Горин, Функц. анализ и его прил., **8:2** (1974), 73–74. [3] J. van Neerven, *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 88, Birkhäuser, Basel, 1996. [4] Yu. I. Lyubich, *Linear Functional Analysis*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 19, Springer-Verlag, Berlin, 1992. [5] R. Larsen, *Banach Algebras*, Marcel Dekker, New York, 1973. [6] L. Kérchy, J. van Neerven, Acta Sci. Math. (Szeged), **63:3–4** (1997), 551–562. [7] V. Q. Phóng, J. Funct. Anal., **103:2** (1992), 74–84. [8] A. Swiech, Studia Math., **96** (1990), 277–282. [9] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962. [10] K. de Leeuw, I. Glicksberg, Acta Math., **105** (1961), 63–97.

Университет Йузунджу Йыл, Турция
e-mail: hsmustafayev@yahoo.com

Поступило в редакцию
15 июля 2009 г.

УДК 517.98+519.2

Инвариантные функционалы случайных матриц*

© 2010. В. Ю. ПРОТАСОВ

Показатели (экспоненты) Ляпунова — показатели роста норм произведений случайных матриц — широко изучаются в литературе ([1]–[10]). В данной статье мы введем понятие инвариантного функционала («антинормы») для семейства случайных матриц и докажем его существование при определенных условиях. Из этого будут следовать асимптотически точные оценки средней скорости роста норм и спектральных радиусов матричных произведений, а также ряд новых оценок показателя Ляпунова. Для простоты ограничимся случаем независимых сомножителей, принимающих значения на конечном множестве матриц. Пусть $\eta_k = X_k \cdots X_1$, где все X_i независимы и одинаково распределены на множестве

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00208 и 10-01-00293, гранта МД-2195.2008.1 и гранта НШ-3233.2008.1.