Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 76–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2999>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:40:19

$h(V_\varepsilon(x))$. Выберем последовательность $\tilde{\omega} \in S$, левый «хвост» которой имеет вид $\dots w\omega_{-n}\dots\omega_{-1}$, и точку $\tilde{x} \in I_{\tilde{\omega}}$. Тогда $I_{\tilde{\omega}} \subset f_{w\omega_{-n}\dots\omega_{-1}}(I) \subset V_\varepsilon(x)$; следовательно, пара $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ принадлежит пересечению $(U_N(\omega) \times V_\varepsilon(x)) \cap (S \times I) \cap A_{\max}$, и утверждение (4) выполнено.

6. Совпадение аттракторов. Заметим сначала, что точка (ω', x') графика Γ принадлежит ω -предельному множеству точки (ω, x) , если последовательность ω' принадлежит ω -предельному множеству последовательности ω . Действительно, если последовательности $\sigma^n \omega$ и ω' совпадают на отрезке $[-N, N]$, то $f_{\sigma^n \omega}(x) \in I_{\omega', N}$, а отрезки $I_{\omega', N}$ пересекаются только по точке x' .

Поскольку милноровский аттрактор сдвига Бернулли совпадает со всем множеством Σ^k , милноровский аттрактор рассматриваемого косо го произведения содержит все точки графика. Осталось воспользоваться предыдущим утверждением теоремы.

7. Обобщения. Следующая теорема является непосредственным обобщением леммы 4.

Теорема 5. Пусть M — сепарабельное топологическое пространство, $f_1, \dots, f_k: M \rightarrow M$ и F — соответствующее ступенчатое косо го произведение на $\Sigma^k \times M$. Пусть существуют две композиции конечной длины из f_i , образы которых не пересекаются. Обозначим через Ω множество последовательностей $\omega \in \Sigma^k$, для которых пересечение $A_{\max}(F) \cap (\{\omega\} \times M)$ имеет непустую внутренность в слое $\{\omega\} \times M$. Тогда $\dim_H \Omega < \dim_H \Sigma^k$.

8. Благодарности. Автор благодарен Ю. С. Ильяшенко за постановку задачи и полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за совет переформулировать основную теорему и В. А. Клепцыну за замечания к тексту статьи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Milnor, Comm. Math. Phys., **99**, 177–195. [2] J. Hutchinson, Indiana Univ. Math. J., **30**:5 (1981), 713–747.

Московский государственный университет
Независимый московский университет
Ecolé Normale Supérieure de Lyon
e-mails: urkud.orkud@gmail.com, urkud@mccme.ru

Поступило в редакцию
13 июля 2009 г.

УДК 517.51

Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру*

© 2010. Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЪЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Работа посвящена построению семейства оптимальных методов восстановления производных функций по неточно заданному на конечном отрезке преобразованию Фурье этих функций. Точная постановка задачи такова. Пусть $n \in \mathbb{N}$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00450 и №09-01-90360).

и $W_2^n(\mathbb{R})$ — соболевский класс функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$ -я производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$. Пусть, далее, $\sigma > 0$, $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$, $1 \leq k < n$ и $\delta > 0$. Допустим, что известно преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$, заданное на Δ_σ с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, т.е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$, такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta$. Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы восстановить k -ю производную функции $x(\cdot)$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$?

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}), y \in L_2(\Delta_\sigma), \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E = \inf_{m: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e(\varphi),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления*, и метод, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*.

Теорема. Пусть k, n — целые числа, $1 \leq k < n$, $\sigma > 0$, $\delta > 0$,

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{n}{k}\right)^{1/(2(n-k))} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{1/(2n)}$$

и $\sigma_0 = \min\{\sigma, \hat{\sigma}\}$. Тогда

$$E = \sigma_0^k \sqrt{\frac{n-k}{2\pi n} \left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)} \delta^2 + \sigma_0^{2(k-n)}}. \quad (1)$$

Для всех ограниченных функций $m(\cdot)$, таких, что

$$|m(\xi) - (i\xi)^k \alpha(\xi)| \leq |\xi|^k \sqrt{\alpha^2(\xi) + \alpha(\xi) \left(\left(\frac{\xi}{\sigma_0} \right)^{2(n-k)} - 1 \right)}, \quad (2)$$

где

$$\alpha(\xi) = \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k} \right)^{k/(n-k)} \left(\frac{\xi}{\sigma_0} \right)^{2n} \right)^{-1},$$

методы

$$\varphi(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_\sigma} m(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi \quad (3)$$

являются оптимальными.

Следствие. При всех σ' , $0 \leq \sigma' \leq ((n-k)/n)^{1/(2k)} (k/n)^{1/(2(n-k))} \sigma_0$, методы

$$\varphi(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma'} (i\xi)^k y(\xi) e^{i\xi t} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma' \leq |\xi| \leq \sigma_0} (i\xi)^k \alpha(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi \quad (4)$$

являются оптимальными.

Оптимальные методы (4) характеризуются тем, что на промежутке $\sigma' \leq |\xi| \leq \sigma_0$ неточные исходные данные «фильтруются» с помощью функции $\alpha(\cdot)$, а на промежутке $|\xi| \leq \sigma'$ фильтрации не происходит.

Доказательство теоремы. Несложная оценка показывает, что E^2 не меньше значения следующей задачи:

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}^2 \leq \delta^2, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1,$$

или, в образах Фурье,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{\Delta_\sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Значение этой задачи (т.е. верхнюю грань максимизируемого функционала) можно найти, используя соображения двойственности, поскольку относительно переменной $|Fx(\cdot)|^2$ это задача линейного программирования (см. [5]). Оно равно квадрату величины, стоящей в правой части формулы (1), что дает оценку снизу величины E .

Если φ — некоторый метод, то величина $e^2(\varphi)$ равна по определению значению задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}^2 \leq \delta^2, \quad y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma), \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1. \quad (5)$$

Покажем, что если метод φ в образах Фурье есть умножение на ограниченную функцию $m(\cdot)$, удовлетворяющую условию (2), то значение задачи (5) не превосходит E^2 и, таким образом, φ — оптимальный метод.

Итак, пусть φ — метод указанного вида. Тогда в образах Фурье задача (5), если положить $h = (2\pi)^{-1} \int_{|t|>\sigma} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi$, $z(\xi) = Fx(\xi) - y(\xi)$ и $b(\xi) = (i\xi)^k - m(\xi)$ и учесть, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \sigma^{2(k-n)} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\sigma} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi = h\sigma^{2(k-n)},$$

может быть переписана в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_\sigma} |m(\xi)z(\xi) + b(\xi)Fx(\xi)|^2 d\xi + h\sigma^{2(k-n)} \rightarrow \max, \\ \int_{\Delta_\sigma} |z(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_\sigma} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi + h \leq 1. \quad (6)$$

Из неравенства Коши–Буняковского $|m(\xi)z(\xi) + b(\xi)Fx(\xi)|^2 \leq (s^{-1}|m(\xi)|^2 + 2\pi\xi^{-2n}|b(\xi)|^2)(s|z(\xi)|^2 + (2\pi)^{-1}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2)$, справедливого для любого $s > 0$, вытекает, что значение задачи (6) оценивается величиной

$$\max_{h \in [0,1]} (A_s(s\delta^2 + 1 - h) + h\sigma^{2(k-n)}) = A_s s\delta^2 + \max(A_s, \sigma^{2(k-n)}) \quad (7)$$

где

$$A_s = A_s(m(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \sup_{\xi \in \Delta_\sigma} \left(\frac{|m(\xi)|^2}{s} + \frac{2\pi}{\xi^{2n}} |b(\xi)|^2 \right) \\ = \frac{1}{2\pi} \sup_{\xi \in \Delta_\sigma} \left(\frac{\xi^{2n} + 2\pi s}{s\xi^{2n}} \left| m(\xi) - \frac{2\pi s(i\xi)^k}{\xi^{2n} + 2\pi s} \right|^2 + \frac{2\pi\xi^{2k}}{\xi^{2n} + 2\pi s} \right).$$

Если $m(\xi) = \widehat{m}(\xi) = 2\pi s(i\xi)^k/(\xi^{2n} + 2\pi s)$, то легко получить, что

$$A_s(\widehat{m}(\cdot)) = \begin{cases} \frac{k}{n} \left(\frac{n-k}{2\pi ks} \right)^{1-k/n}, & s \leq \frac{n-k}{2\pi k} \sigma^{2n}, \\ \frac{\sigma^{2k}}{\sigma^{2n} + 2\pi s}, & s > \frac{n-k}{2\pi k} \sigma^{2n}. \end{cases}$$

Отсюда и из (7), обозначая через $\widehat{\varphi}$ метод, соответствующий функции $\widehat{m}(\cdot)$, получаем, что для всех $s > 0$

$$e^2(\widehat{\varphi}) \leq \begin{cases} A_s(\widehat{m}(\cdot))(s\delta^2 + 1), & s \leq \frac{n-k}{2\pi k} \left(\frac{k}{n} \right)^{n/(n-k)} \sigma^{2n}, \\ A_s(\widehat{m}(\cdot))s\delta^2 + \sigma^{2(n-k)}, & s > \frac{n-k}{2\pi k} \left(\frac{k}{n} \right)^{n/(n-k)} \sigma^{2n}. \end{cases}$$

Минимум величины справа по s совпадает с квадратом величины, стоящей в правой части формулы (1), и достигается в точке

$$\widehat{s} = \frac{n-k}{2\pi k} \left(\frac{k}{n} \right)^{n/(n-k)} \sigma_0^{2n}.$$

При этом $A_{\widehat{s}}(\widehat{m}(\cdot)) = \sigma_0^{2(k-n)}$. Таким образом, если ограниченная функция $m(\cdot)$ такова, что выполняется равенство $A_{\widehat{s}}(m(\cdot)) = \sigma_0^{2(k-n)}$, то соответствующий метод оптимален. Но это равенство, как нетрудно проверить, равносильно условию (2). $\square$

Следствие непосредственно вытекает из доказанной теоремы.

Первые результаты, касающиеся оптимального восстановления линейных операторов по неточной информации, были получены в работе [1]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах авторов [2], [3] и [4].

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. A. Melkman, C. A. Micchelli, SIAM J. Numer. Anal., **16**:1 (1979), 87–105. [2] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Матем. сб., **193**:3 (2002), 79–100. [3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Функц. анализ и его прил., **37**:3 (2003), 51–64. [4] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, в кн.: Математический форум. Т. 2. Исследования по выпуклому анализу, ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, 2009, 158–192. [5] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2003.

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
e-mail: magaril@mirea.ru

МАТИ — Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
e-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступило в редакцию
1 июля 2009 г.