Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Доценко, Гомологии алгебры Ли векторных полей на прямой с коэффициентами в симметрических степенях ее присоединенного представления, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 13–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:11:35

УДК 512.664.3

Гомологии алгебры Ли векторных полей на прямой с коэффициентами в симметрических степенях ее присоединенного представления*

© 2006. В. В. Доценко

§1. Введение

Пусть W_1 — алгебра Ли полиномиальных векторных полей на прямой, т.е. векторных полей вида $f(x)\frac{d}{dx}$, где $f(x) \in \mathbb{C}[x]$; стандартный базис в этой алгебре образуют векторные поля $e_i = x^{i+1}\frac{d}{dx}$ с коммутационными соотношениями $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$. В настоящей статье вычислены гомологии алгебры W_1 с коэффициентами в модулях $S^k W_1$, т.е. симметрических степенях ее присоединенного представления. А именно, мы доказываем следующие результаты.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $k > 0$. Тогда

- (i) $H_2(W_1, \mathfrak{gl}_1, S^k W_1) = \mathbb{C}$, $H_i(W_1, \mathfrak{gl}_1, S^k W_1) = 0$ при $i \neq 2$;
- (ii) $H_2(W_1, S^k W_1) = H_3(W_1, S^k W_1) = \mathbb{C}$, $H_i(W_1, S^k W_1) = 0$ при $i \neq 2, 3$.

Это доказывает для $n = 1$ гипотезу Фейгина и Цыгана [1] о гомологиях алгебры W_n с коэффициентами в симметрических степенях ее присоединенного представления.

Вычисление этих гомологий основано на частичном вычислении гомологий (с теми же коэффициентами) подалгебры алгебры W_1 , состоящей из векторных полей, имеющих нуль второго порядка в начале координат. (Эту алгебру обычно обозначают через L_1 ; базис в ней составляют элементы e_i с $i \geq 1$. Более общо, через L_k обозначается подалгебра, порожденная элементами e_i с $i \geq k$.) В общем случае гомологии алгебры L_1 с нетривиальными коэффициентами вычислять сложнее, но в нашем случае можно доказать, что L_1 -модули $S^k W_1$ в малых градуировках свободны. (Более точно это можно выразить так: существует (однородный) сюръективный гомоморфизм из свободного модуля над алгеброй L_1 на модуль $S^k W_1$, который на всех однородных компонентах достаточно малой степени имеет нулевое ядро; см. следствие 2 ниже.) Гомологии свободных модулей известны; если же модуль свободен в малых градуировках, то легко вычислить соответствующие однородные компоненты его гомологий. Способы же извлекать из сведений о гомологиях алгебры Ли L_1 информацию о гомологиях алгебры Ли W_1 с теми же коэффициентами вполне традиционны (см., например, [2]).

Структура работы такова. В первой части изучается строение симметрических степеней (как L_1 -модулей) в малых градуировках. Это можно сделать средствами линейной алгебры (фактически речь идет о том, что матрицы некоторых операторов являются верхнетреугольными). Во второй части доказанные результаты перерабатываются в информацию о гомологиях алгебры W_1 . Это

*Работа частично поддержана грантом Президента РФ №2044.2003.2 и грантом INTAS 03-3350.

делается с помощью достаточно стандартных приемов гомологической алгебры. Завершает работу обсуждение случая тензорных степеней присоединенного представления; в частности, предлагается (предположительно почти точная) оценка снизу на соответствующие гомологии.

Я благодарен моему учителю Б. Л. Фейгину за постановку задачи и стимулирующие обсуждения. Также я благодарен рецензенту за многочисленные предложения по улучшению текста.

§2. Малые градуировки

Алгебры Ли W_1 и L_1 будем считать градуированными стандартным образом: $\deg e_i = i$. Мы рассматриваем градуированные модули над этими алгебрами и лишь те гомоморфизмы между такими модулями, которые являются однородными нулевой степени.

Рассмотрим естественное упорядочение на базисных элементах алгебры W_1 : $e_i > e_j$ при $i > j$. В модуле $S^k W_1$ рассмотрим стандартный мономияльный базис, образованный элементами $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ ($-1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k$). Упорядочим этот базис следующим образом: отбросим все сомножители, равные e_{-1} , а на мономах $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_l}$ с $l \leq k$ и $0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l$ введем лексикографически-степенной порядок: больше тот моном, у которого больше l , а при равных l — больший лексикографически; отметим, что здесь слово «степень» связано с «внешней» градуировкой (по числу образующих в мономе), в то время как в остальной части текста оно обычно отвечает «внутренней» градуировке (по сумме степеней образующих). В универсальной обертывающей алгебре $U = U(L_1)$ алгебры Ли L_1 можно по теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта (см. [3]) выбрать в качестве базиса совокупность элементов $E_\alpha := e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_n}$, занумерованных мультииндексами $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, для которых $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$. На таких элементах также рассмотрим лексикографически-степенной порядок. Для элемента $f \in S^k W_1$ через $\hat{f}$ мы обозначаем старший моном этого элемента относительно введенного на $S^k W_1$ порядка.

ЛЕММА 1. Пусть $E_\alpha < E_{1^{k+1}} = e_1^{k+1}$. Тогда имеет место равенство

$$\widehat{E_\alpha(e_{-1}^k)} = \frac{k!}{(k-n)!} (-1)^n (1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_n) e_{-1}^{k-n} e_{\alpha_1-1} \cdots e_{\alpha_n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямом вычислении, основанном на том, что наибольшим из слагаемых будет слагаемое, содержащее наименьшее число вхождений e_{-1} . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $E_\alpha < E_\beta < e_1^{k+1}$. Тогда $\widehat{E_\alpha(e_{-1}^k)} < \widehat{E_\beta(e_{-1}^k)}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Гомоморфизм L_1 -модулей $\rho: U[-k] \rightarrow S^k W_1$, переводящий 1 в e_{-1}^k , сюръективен. Он является изоморфизмом на однородных компонентах степеней $-k, 1-k, \dots, 0$ в $U[-k]$ и имеет одномерное ядро на однородной компоненте степени 1.

(Здесь и далее через $M[p]$ обозначается модуль, отличающийся от M лишь сдвигом градуировки на p : $M[p]_i := M_{i-p}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Сюръективность можно доказать так: элементы $\rho(E_\alpha) = E_\alpha(e_{-1}^k)$, где α пробегает все мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ длины $l \leq k$ (в этом случае E_α заведомо меньше e_1^{k+1} и, значит, можно использовать следствие 1), имеют различные старшие мономы, причем среди этих

мономов встречаются все базисные мономы симметрической степени $S^k W_1$ (согласно лемме 1, для элемента рассматриваемого вида старшим мономом будет, с точностью до константы, $e_{-1}^{k-l} e_{\alpha_1-1} \cdots e_{\alpha_l-1}$, и каждый базисный элемент симметрической степени имеет, очевидно, такой вид для подходящего выбора мультииндекса α). Теперь очевидно, что каждый базисный моном принадлежит образу гомоморфизма ρ .

Утверждение об изоморфизме устанавливается аналогично: размерности однородных компонент степеней $-k, \dots, 0$ в модуле $U[-k]$ такие же, как в симметрической степени $S^k W_1$ (поскольку для всех элементов базиса длина мультииндекса не превосходит k), а у компоненты степени 1 размерность больше на единицу (единственным элементом, для которого мультииндекс имеет большую длину, является e_1^{k+1}). $\square$

Для дальнейшего зафиксируем в $U[-k]$ однородный элемент ϕ степени 1, для которого $\rho(\phi) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Существует свободная резольвента L_1 -модуля $S^k W_1$ вида*

$$0 \leftarrow S^k W_1 \leftarrow U[-k] \leftarrow U[1] \oplus M^1 \leftarrow M^2 \leftarrow \dots \leftarrow M^i \leftarrow \dots$$

Здесь все M^i — свободные модули, причем у них отличны от нуля только однородные компоненты степени больше единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Такая резольвента строится в соответствии с общей схемой построения минимальной резольвенты модуля. Гомоморфизм ρ из $U[-k]$ в $S^k W_1$ определен выше. Он сюръективен, так что следующий шаг состоит в том, чтобы построить сюръекцию из свободного модуля на ядро этого гомоморфизма. Это ядро порождено элементом ϕ и какими-то элементами $\phi_1, \dots, \phi_s, \dots$ больших степеней $n_1, \dots, n_s, \dots$ (конечно их количество или нет, неважно). Значит, на него отображается свободный модуль $U[1] \oplus \bigoplus_{s \geq 1} U[n_s]$ (гомоморфизм переводит единицу каждого из слагаемых в соответствующую образующую). Полагая $M^1 := \bigoplus_{s \geq 1} U[n_s]$, получаем первый модуль резольвенты. Дальнейшее построение проводится аналогично (надо все время иметь в виду, что ядра всех последующих гомоморфизмов содержат только элементы степени больше единицы, явный же вид этих гомоморфизмов для нас несуществен). $\square$

Как известно, гомологии алгебры Ли $\mathfrak{A}$ с коэффициентами в модуле M можно вычислять двумя способами. Во-первых, эти гомологии совпадают с гомологиями стандартного комплекса $C_*(\mathfrak{A}, M) = \Lambda^*(\mathfrak{A}) \otimes M$. Во-вторых, в терминах универсальной обертывающей алгебры имеем $H_*(\mathfrak{A}, M) = \text{Tot}_*^{U(\mathfrak{A})}(M, \mathbb{C})$. Во втором случае можно использовать полученные результаты о свободной резольвенте. Чтобы выписать результат, напомним, что гомологии градуированной алгебры Ли $\mathfrak{A}$ с коэффициентами в градуированном модуле M наследуют градуировку; мы обозначаем через $H_*^{(p)}(\mathfrak{A}, M)$ соответствующую однородную компоненту.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} H_0(L_1, S^k W_1) &= H_0^{(-k)}(L_1, S^k W_1) = \mathbb{C}, \\ H_1^{(\leq 1)}(L_1, S^k W_1) &= H_1^{(1)}(L_1, S^k W_1) = \mathbb{C}, \\ H_{>1}^{(\leq 1)}(L_1, S^k W_1) &= 0. \end{aligned}$$

Интересно получить сколько-нибудь явные формулы для циклов стандартного комплекса, представляющих найденные классы гомологий. Обозначим через ψ_k единственный нетривиальный класс первых гомологий с коэффициентами в $S^k W_1$ степени 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В качестве цикла стандартного комплекса, представляющего ψ_k , можно выбрать элемент*

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k+2}{i} e_{k+1-i} \otimes e_{-1}^{k-i} e_0^i. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что дифференциал этого элемента равен нулю, проверяется непосредственно. Единственное, что представляет интерес, — нетривиальность этого цикла. Проще всего использовать тот (очевидный) факт, что слагаемое $e_1 \otimes e_0^k$ не может встретиться при вычислении дифференциала цепи стандартного гомологического комплекса. $\square$

Как известно, алгебра L_1 порождена элементами e_1 и e_2 . Поэтому рассматриваемый цикл можно также выбрать в виде $e_1 \otimes m_1 + e_2 \otimes m_2$. Приведем соответствующие формулы, поскольку они представляются достаточно любопытными. Основной ингредиент здесь — «оператор Казимира» $e_{-1}e_1 - e_0^2$ для подалгебры $\mathfrak{sl}_2 \subset W_1$, порожденной элементами e_{-1} , e_0 , e_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При $k = 2m$ можно в качестве представителя для ψ_k взять*

$$e_1 \otimes (e_{-1}e_1 - e_0^2)^m;$$

при $k = 2m + 1$ формула несколько более сложна:

$$\begin{aligned} e_2 \otimes e_{-1}(e_{-1}e_1 - e_0^2)^m - (2m+3)e_1 \otimes e_0(e_{-1}e_1 - e_0^2)^m \\ + me_1 \otimes e_{-1}(e_{-1}e_1 - e_0^2)^{m-1}(e_{-1}e_2 - e_0e_1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство нетривиальности этих циклов повторяет уже использованный выше аргумент: цикл, в который входит с ненулевым коэффициентом $e_1 \otimes e_0^k$, не лежит в образе дифференциала. $\square$

§3. Основная теорема

Для вычисления гомологий алгебры Ли W_1 с коэффициентами в $S^k W_1$ мы используем спектральную последовательность Серра–Хохшильда. А именно, сначала вычислим гомологии относительно подалгебры $\mathfrak{gl}_1$, порожденной элементом e_0 , с помощью относительной спектральной последовательности, а потом используем этот результат для доказательства основного результата работы.

Рассмотрим цепочку подалгебр $\mathfrak{gl}_1 \subset L_0 \subset W_1$. Применение общих формул для спектральной последовательности Серра–Хохшильда (см. [2]) в нашем случае дает спектральную последовательность с первым членом

$$E_{p,q}^1 = H_q(L_0, \mathfrak{gl}_1, \Lambda^p(W_1/L_0) \otimes S^k W_1),$$

сходящуюся к $H_*(W_1, \mathfrak{gl}_1, S^k W_1)$. Вычислим пространство $E_{p,q}^1$ явно. Относительные гомологии вычисляются с помощью комплекса, аналогичного стандартному комплексу. В нашем случае при фиксированном p это комплекс

$$(\Lambda^*(L_1) \otimes \Lambda^p(W_1/L_0) \otimes S^k W_1)^{\mathfrak{gl}_1}.$$

Легко видеть, что он отождествляется с подкомплексом стандартного комплекса, вычисляющего гомологии алгебры L_1 с коэффициентами в $\Lambda^p(W_1/L_0) \otimes S^k W_1$, состоящим из элементов степени 0. С помощью результатов предыдущего параграфа мы можем получить полную информацию о нашей спектральной последовательности.

ЛЕММА 2. *Пространство $E_{1,1}^1$ совпадает с $\mathbb{C}$, все остальные пространства $E_{p,q}^1$ нулевые.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы свести этот вопрос к вопросу, ответ на который известен, заметим, что имеет место изоморфизм L_1 -модулей $W_1/L_0 \simeq \mathbb{C}[-1]$ (тривиальный модуль с подправленной градуировкой). Поэтому $E_{1,q}^1 = (E_{1,q}^1)^{(0)} = H_q^{(1)}(L_1, S^k W_1)$. Кроме того, $E_{0,q}^1 = (E_{0,q}^1)^{(0)} = H_q^{(0)}(L_1, S^k W_1)$. (Пространства $E_{p,q}^1$ при $p > 1$ равны нулю по очевидным причинам.) Отсюда уже легко получить утверждение леммы. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. $E_{p,q}^n = E_{p,q}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это верно для любой спектральной последовательности, в которой ровно одно пространство $E_{p,q}^1$ ненулевое. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Согласно следствию 4, пространство $E_{1,1}^1$ выживает в члене E^∞ нашей спектральной последовательности. Поскольку спектральная последовательность сходится к интересующим нас гомологиям, первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение доказывается с помощью рассмотрения спектральной последовательности Серра–Хохшильда относительно подалгебры $\mathfrak{gl}_1$. Первый член этой спектральной последовательности есть

$$E_{p,q}^1 = H_q(\mathfrak{gl}_1, \Lambda^p(W_1/\mathfrak{gl}_1) \otimes S^k W_1),$$

и потому

$$E_{p,0}^1 = E_{p,1}^1 = (\Lambda^p(W_1/\mathfrak{gl}_1) \otimes S^k W_1)^{\mathfrak{gl}_1}, \quad E_{p,k}^1 = 0 \quad \text{при } k > 1.$$

Далее, гомологии дифференциала d^1 для каждого из значений $p = 0, 1$ совпадают, очевидно, с относительными гомологиями алгебры W_1 по модулю ее подалгебры $\mathfrak{gl}_1$. Значит, член E^2 этой спектральной последовательности отличен от нуля только в одном столбце. Поскольку дальнейшие дифференциалы d^k отображают этот столбец в другие, все эти дифференциалы равны нулю. Поэтому $E^2 = E^\infty$, и требуемое утверждение доказано. $\square$

§ 4. Тензорные степени

Естественным продолжением этого вычисления было бы вычисление гомологий с коэффициентами в тензорных степенях присоединенного представления. В полной общности эта задача весьма сложна. Здесь мы приводим результаты вычислений гомологий с коэффициентами в $W_1^{\otimes k}$ для $1 \leq k \leq 4$, некоторые гипотезы об общем случае, а также следствия из проделанных вычислений, касающиеся гомологий алгебры токов $W_1 \otimes \mathbb{C}[t]$. Для того чтобы формулировки были проще, мы обсуждаем подробнее случай относительных гомологий по модулю подалгебры $\mathfrak{gl}_1 \subset W_1$, порожденной элементом e_0 .

Заметим, что имеется отображение гомологий

$$H_*(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{gl}_1, \mathbb{C}) \otimes (\mathfrak{sl}_2^{\otimes n})^{\mathfrak{sl}_2} = H_*(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{gl}_1, \mathfrak{sl}_2^{\otimes n}) \rightarrow H_*(W_1, \mathfrak{gl}_1, W_1^{\otimes n}),$$

индуцированное вложением $\mathfrak{sl}_2 \hookrightarrow W_1$. Гомологии алгебры $\mathfrak{sl}_2$ относительно $\mathfrak{gl}_1$, отличные от H_0 и H_2 , равны нулю. Поэтому вопрос лишь в том, как устроено это отображение на нулевых и вторых гомологиях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *На пространстве H_0 построенное отображение равно нулю. На пространстве H_2 это отображение является вложением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно, ибо $H_0(W_1, \mathfrak{gl}_1, W_1^{\otimes n}) = 0$. Рассмотрим пространство вторых гомологий. Пусть

$$e_{-1} \wedge e_1 \otimes \psi = d \left(\sum_{0 < \alpha < \beta} e_{-1} \wedge e_\alpha \wedge e_\beta \otimes \psi_{\alpha\beta} + \sum_{0 < \alpha < \beta < \gamma} e_\alpha \wedge e_\beta \wedge e_\gamma \otimes \psi_{\alpha\beta\gamma} \right).$$

Тогда $\psi = \sum_{1 < \beta} e_\beta(\psi_{1\beta})$, что ведет к противоречию, ибо элемент ψ является $\mathfrak{sl}_2$ -инвариантом в $\mathfrak{sl}_2^{\otimes n}$, а $e_\beta(W_1^{\otimes n}) \cap (\mathfrak{sl}_2^{\otimes n})^{\mathfrak{sl}_2} = 0$: при $\beta > 2$ или $\beta = 2$ и $n > 2$ элементы из $e_\beta(W_1^{\otimes n})$ не лежат даже в $\mathfrak{sl}_2^{\otimes n}$, при $\beta = n = 2$ пересечение с тензорной степенью алгебры $\mathfrak{sl}_2$ одномерно и соответствующий элемент $e_2(e_{-1}^2)$ не инвариантен. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположительно полученная нижняя оценка на размеры вторых гомологий почти точна. Разумеется, для $k = 2m+1$ основная теорема гарантирует, что $\dim H_2(W_1, \mathfrak{gl}_1, S^k W_1) = 1$, в то время как $\dim H_2(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{gl}_1, S^k \mathfrak{sl}_2) = 0$. Заметим, однако, что все известные на данный момент циклы, не лежащие в образе построенного вложения, суть циклы ψ_{2k-1} ($k = 1, 2, \dots$) для нечетных симметрических степеней.

Для $1 \leq k \leq 4$ явное вычисление показывает, что гомологии исчерпываются образом вложения из предложения 4 и гомологиями с коэффициентами в симметрических степенях. Результаты этого вычисления соединены в следующем предложении, доказательство которого является вычислительным и здесь не приводится.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пространства $H_i(W_1, \mathfrak{gl}_1, W_1^{\otimes k})$ равны 0 при $i \neq 2$, $1 \leq k \leq 4$. Кроме того,*

$$\begin{aligned} H_2(W_1, \mathfrak{gl}_1, W_1) &= H_2(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{gl}_1, \mathfrak{sl}_2) \oplus H_2(W_1, \mathfrak{gl}_1, S^1 W_1) = \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}, \\ H_2(W_1, \mathfrak{gl}_1, W_1^{\otimes 2}) &= H_2(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{gl}_1, \mathfrak{sl}_2^{\otimes 2}) = \mathbb{C}, \\ H_2(W_1, \mathfrak{gl}_1, W_1^{\otimes 3}) &= H_2(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{gl}_1, \mathfrak{sl}_2^{\otimes 3}) \oplus H_2(W_1, \mathfrak{gl}_1, S^3 W_1) = \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}^2, \\ H_2(W_1, \mathfrak{gl}_1, W_1^{\otimes 4}) &= H_2(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{gl}_1, \mathfrak{sl}_2^{\otimes 4}) = \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пространства $H_i(W_1, W_1^{\otimes k})$ равны 0 при $i \neq 2, 3$, $1 \leq k \leq 4$. Кроме того,*

$$\begin{aligned} H_2(W_1, W_1) &= H_3(W_1, W_1) = \mathbb{C}, & H_2(W_1, W_1^{\otimes 2}) &= H_3(W_1, W_1^{\otimes 2}) = \mathbb{C}, \\ H_2(W_1, W_1^{\otimes 3}) &= H_3(W_1, W_1^{\otimes 3}) = \mathbb{C}^2, & H_2(W_1, W_1^{\otimes 4}) &= H_3(W_1, W_1^{\otimes 4}) = \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

ГИПОТЕЗА. *При $i > 2$ и любом k пространства $H_i(W_1, \mathfrak{gl}_1, W_1^{\otimes k})$ равны 0; при $i > 3$ и любом k пространства $H_i(W_1, W_1^{\otimes k})$ равны 0.*

Утверждения предложения 5 и следствия из него позволяют предположить, что можно заменить в приведенной гипотезе условие $i > 2$ (соответственно $i > 3$) на $i \neq 2$ (соответственно $i \neq 2, 3$). Оказывается, что этого сделать

нельзя: для $W_1^{\otimes 5}$ первые гомологии отличны от нуля. В этом можно убедиться следующим образом. Рассмотрим действие симметрической группы S_5 на тензорной степени $W_1^{\otimes 5}$ перестановками сомножителей. Разложение тензорной степени на изотипные компоненты известно — это представление симметрической группы, очевидно, изоморфно представлению в кольце многочленов от пяти переменных (и градуировки на соответствующих векторных пространствах отличаются только сдвигом), а результаты о разложении этого представления в сумму неприводимых являются стандартными. Для представления группы S_5 , отвечающего разбиению $5 = 2 + 1 + 1 + 1$, минимальная степень однородных многочленов от пяти переменных, в которых реализуется такое представление, равна 6 (и в многочленах степени 6 такое представление встречается с кратностью один). Для $W_1^{\otimes 5}$ после переградуировки получаем, что такое представление встречается первый раз в степени 1, причем с кратностью один. Обозначим это вхождение через V . Тогда любой элемент пространства $e_{-1} \otimes V$ будет, как легко видеть, циклом стандартного комплекса (и относительного, и обычного), причем нетривиальным (раз в меньших степенях такое представление не встречается).

Информация о гомологиях с коэффициентами в тензорных степенях полезна тем, что ее можно переработать в информацию о гомологиях алгебры (полиномиальных) токов на прямой со значениями в алгебре W_1 . Напомним, что алгеброй полиномиальных токов на прямой со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{A}$ называется пространство $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}[t]$ со скобкой $[a \otimes f, b \otimes g] = [a, b] \otimes (fg)$. Вычисление проводится с помощью спектральной последовательности Серра–Хохшильда для подалгебры $W_1 \otimes 1$. Мы приводим здесь без доказательства результаты вычисления гомологий относительно подалгебры $\mathfrak{gl}_1 := \mathbb{C}e_0 \otimes 1 \subset W_1 \otimes 1 \subset W_1 \otimes \mathbb{C}[t]$.

Полученные результаты удобно формулировать так. Алгебра Ли векторных полей на прямой с координатой t действует на алгебре токов по очевидному правилу $\xi(a \otimes f) = a \otimes \xi(f)$. Это действие обычным образом переносится на любую тензорную конструкцию, например на внешнюю степень, и потому на весь стандартный комплекс. Очевидно, что это действие перестановочно с дифференциалом стандартного комплекса и потому алгебра векторных полей на прямой действует на гомологиях.

Предложение 6. *Имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} H_0(W_1 \otimes \mathbb{C}[t], \mathfrak{gl}_1, \mathbb{C}) &= \mathbb{C}, & H_1(W_1 \otimes \mathbb{C}[t], \mathfrak{gl}_1, \mathbb{C}) &= 0, \\ H_2(W_1 \otimes \mathbb{C}[t], \mathfrak{gl}_1, \mathbb{C}) &= \mathbb{C}, & H_3(W_1 \otimes \mathbb{C}[t], \mathfrak{gl}_1, \mathbb{C}) &= \mathbb{C}[t] dt, \\ H_4(W_1 \otimes \mathbb{C}[t], \mathfrak{gl}_1, \mathbb{C}) &= 0, & H_5(W_1 \otimes \mathbb{C}[t], \mathfrak{gl}_1, \mathbb{C}) &= S^3(\mathbb{C}[t] dt). \end{aligned}$$

Указанные равенства нужно понимать как изоморфизмы модулей над алгеброй Ли векторных полей на прямой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feigin B. L., Tsygan B. L. Riemann–Roch theorem and Lie algebra homology. In: Proc. of the Winter School on Geometry and Physics (Srni, 9–16 January 1988), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., No. 21, 15–52 (1989).
2. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Наука, М., 1984.
3. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. ИЛ, М., 1960.