Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (поля на двумерной решетке: прилегающие уровни), *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 1, 39–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:19:36

Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (поля на двумерной решетке: прилегающие уровни)*

© 2005. Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос

Посвящается памяти А. Н. Землякова

§1. Краткие напоминания

Эта статья является продолжением работы [1], где была подробно сформулирована задача о двухчастичных связанных состояниях трансфер-матриц гиббсовских полей (с компактным пространством спинов, состоящим более чем из двух элементов, и произвольным финитным взаимодействием вдоль «пространственных» направлений) в высокотемпературной области $\beta = 1/T \ll 1$.

Напомним, что в [1] исходная задача после нескольких редукций была сведена к следующей проблеме. Имеется семейство $\{\mathcal{H}_\Lambda, \Lambda \in \mathbb{T}^\nu\}$ гильбертовых пространств, помеченных точками ν -мерного тора $\mathbb{T}^\nu$ (в [1] через Λ обозначался полный квазиимпульс двух квазичастиц),

$$\{\mathcal{H}_\Lambda = \mathbb{C} \oplus \overline{L}_2^\Lambda, \Lambda \in \mathbb{T}^\nu\},$$

где $\overline{L}_2^\Lambda = \{f \in L_2(\mathbb{T}^\nu, dk) : \int_{\mathbb{T}^\nu} f(k) dk = 0, f(k) = f(\Lambda - k), k \in \mathbb{T}^\nu\} \subset L_2(\mathbb{T}^\nu, dk)$ (dk — нормированная мера Хаара на торе $\mathbb{T}^\nu$). В каждом из пространств $\mathcal{H}_\Lambda$ действует самосопряженный оператор $\mathcal{T}_\Lambda$ по формулам

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_\Lambda F)_0 &= \gamma(\Lambda)c_0 + \int_{\mathbb{T}^\nu} b_\Lambda(p)f_1(p) dp, \\ (\mathcal{T}_\Lambda F)_1(k) &= \omega_\Lambda(k)f_1(k) + \int_{\mathbb{T}^\nu} (K_\Lambda(k, p) - \omega_\Lambda(p))f_1(p) dp + c_0\bar{b}_\Lambda(k), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $F = (c_0, f_1(k)) \in \mathcal{H}_\Lambda$. Здесь

$$\begin{aligned} \gamma(\Lambda) &= \gamma_0 + O(\beta), & K_\Lambda(k, p) &= \beta^2 K_\Lambda^0(k, p) + O(\beta^3), \\ b_\Lambda(p) &= \beta b_\Lambda^0(p) + O(\beta^2), & \omega_\Lambda(k) &= \omega_0 + \beta \omega_\Lambda^{(1)}(k) + O(\beta^2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

и $\gamma_0, K_\Lambda^0(k, p), b_\Lambda^0(p), \omega_0, \omega_\Lambda^{(1)}(k)$ не зависят от β . Обозначение $O(\beta^k)$ используется для величины, абсолютное значение которой удовлетворяет оценке $< C\beta^k$ (равномерно по другим переменным), где C — константа, не зависящая от β .

*Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00444), а также Президентского фонда поддержки научных школ (грант Н.Ш.90.934.2003.1).

При этом $K_\Lambda(k, p) = \overline{K}_\Lambda(p, k)$ и $K_\Lambda(k, p) = K_\Lambda(\Lambda - k, p)$, а также $b_\Lambda(k) = b_\Lambda(\Lambda - k)$ и $\omega_\Lambda(k) = \omega_\Lambda(\Lambda - k)$. Кроме того,

$$\omega_0 \neq \gamma_0.$$

Семейство функций $\{\omega_\Lambda(k), \Lambda \in \mathbb{T}^\nu\}$ мы назовем символом оператора $\mathcal{T}_\Lambda$. Спектр оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ состоит из непрерывной части, заполняющей отрезок $[\tau_\Lambda^{\min}, \tau_\Lambda^{\max}]$, $\tau_\Lambda^{\text{ext}} = \text{ext}_{k \in \mathbb{T}^\nu} \omega_\Lambda(k)$, $\text{ext} = \min, \max$, а также, возможно, собственных значений. Задача данной статьи, как и предыдущей, — выяснить, существуют ли у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ собственные значения, расположенные вне непрерывного спектра (а также указать их местоположение).

В предыдущей статье [1] мы установили следующее:

1. При всех значениях Λ и достаточно малых β у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ имеется собственное значение ε_b вида

$$\varepsilon_b = \gamma_0 + O(\beta^2)$$

(уединенный уровень, расположенный на конечном расстоянии от непрерывного спектра $\mathcal{T}_\Lambda$).

2. Вне $D\beta^2$ -окрестности непрерывного спектра других собственных значений нет; здесь D — некоторая не зависящая от β и Λ константа.

3. Для любого $\delta > 0$ найдется такое $\beta_0 = \beta_0(\delta)$, что при всех $\beta < \beta_0$ и Λ , лежащих вне δ -окрестности некоторых особых значений (см. ниже), у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ нет собственных значений, кроме ε_b .

В данной работе в случае размерности $\nu = 1$ изучается дискретный спектр $\mathcal{T}_\Lambda$ при Λ , расположенных достаточно близко к особым значениям. Точки этого спектра, в отличие от уединенного уровня, лежат близко к краю непрерывного спектра (на расстояниях $\sim \beta^\alpha$, $\alpha > 0$) и названы нами прилегающими уровнями.

§2. Основные результаты о прилегающих уровнях и условия относительно семейства $\{\omega_\Lambda, \Lambda \in \mathbb{T}^\nu\}$

2.1. Особые значения Λ и критические точки символов общего положения $\{\omega_\Lambda, \Lambda \in \mathbb{T}^\nu\}$ в случае $\nu = 1$. Прилегающие уровни оператора $\mathcal{T}_\Lambda$, как уже говорилось, могут возникать при малых β лишь при Λ , лежащих в окрестности некоторых специальных значений этого параметра, определяемых семейством функций $\omega_\Lambda(k)$. Эти специальные значения есть либо те Λ , в которых один из абсолютных экстремумов функции $\omega_\Lambda(\cdot)$ вырождается (назовем эти Λ *каустическими* значениями (см. [3, т. 2]) и будем обозначать их через $\Lambda^{\text{кауст}}$), либо те Λ , при которых у функции $\omega_\Lambda(\cdot)$ имеется несколько совпадающих экстремумов (будем называть эти Λ *кратными* значениями и обозначать через $\Lambda^{\text{кр}}$). Каустические и кратные значения Λ назовем *особыми* и предположим, что их конечное число.

Поскольку функция $\omega_\Lambda(k)$, как и функция $\omega_\Lambda^{(1)}(k)$, инвариантна относительно инволюции $k \rightarrow \Lambda - k$ окружности $\mathbb{T}^1$,

$$\omega_\Lambda(k) = \omega_\Lambda(\Lambda - k),$$

неподвижные точки этой инволюции

$$k^{(1)} = \frac{\Lambda}{2}, \quad k^{(2)} = \frac{\Lambda}{2} + \pi, \quad \Lambda \in [0, 2\pi),$$

являются критическими для функции ω_Λ . Точки этого вида мы назовем *основными* критическими точками. Остальные критические точки функции ω_Λ всегда присутствуют парами: вместе с критической точкой $\bar{k}$ точка $\bar{k}' = \Lambda - \bar{k}$ также является критической для ω_Λ . Такую пару мы назовем *парной* критической точкой и в дальнейшем будем рассматривать эту пару как одну критическую точку. Основное свойство критических точек семейства функций $\{\omega_\Lambda, \Lambda \in \mathbb{T}^1\}$: они являются изолированными для каждой функции этого семейства. Два экстремальных значения функции ω_Λ (или $\omega_\Lambda^{(1)}$) мы называем *одноименными*, если они оба являются либо максимумами, либо минимумами; в противном случае они называются *разноименными*.

Ниже мы опишем расположение каустических и кратных значений Λ , а также — для этих значений — свойства вырожденных и кратных (т. е. совпадающих) глобальных экстремумов функций ω_Λ (в случае символов ω_Λ «общего положения»). Но сначала сформулируем основные результаты нашей работы. Для их понимания существенно, что у семейства ω_Λ существуют только двукратные экстремумы и вырожденные экстремумы достигаются лишь в основных критических точках (см. ниже).

2.2. Формулировка основных результатов о прилегающих уровнях.

Для описания этих результатов нам понадобится ввести некоторые величины. Обозначим через $M_\Lambda(k_1, k_2; z)$ ядро

$$K_\Lambda(k_1, k_2) - \frac{b_\Lambda(k_1)\bar{b}_\Lambda(k_2)}{\gamma(\Lambda) - z}, \quad (2.1)$$

и пусть

$$T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n; z) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} M_\Lambda(k_1, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & M_\Lambda(k_1, k_n; z) \\ M_\Lambda(k_2, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & M_\Lambda(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & & & \vdots \\ M_\Lambda(k_n, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & M_\Lambda(k_n, k_n; z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 2. \quad (2.2)$$

В сумме (2.2) каждый столбец матрицы $\{M_\Lambda(k_i, k_j; z), i, j = 1, \dots, n\}$ последовательно заменяется на столбец, состоящий из единиц. Поскольку

$$T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n; z) = \det(M_\Lambda + \Pi) - \det M_\Lambda,$$

где $M_\Lambda = \{M_\Lambda(k_i, k_j; z)\}$ — эрмитова матрица, а матрица Π состоит сплошь из единиц, функция $T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n; z)$ вещественна (при вещественных z).

Далее, для каждого $\Lambda \in \mathbb{T}^1$ определим функции

$$B_\Lambda^\pm(k_1, k_2) = T_2^\Lambda(k_1, k_2, \tau_\Lambda^{\text{ext}}) \quad (2.3)$$

от $k_1, k_2 \in \mathbb{T}^1$, где $+$ соответствует $\text{ext} = \min$, а $-$ соответствует $\text{ext} = \max$. Далее, для каждого кратного значения $\Lambda_j = \Lambda_j^{\text{кр}}$ определим величину

$$M_{j,\pm}^{\text{кр}} = B_{\Lambda_j}^\pm(\bar{k}_1, \bar{k}_2)(\pm 1),$$

где $\bar{k}_\sigma = k_\sigma^{\text{ext}}(\Lambda_j^{\text{кр}})$, $\sigma = 1, 2$, — точки соответствующего двукратного экстремума функции $\omega_{\Lambda_j^{\text{кр}}}$, причем $+$ выбирается в случае, когда достигается кратный минимум, а $-$ выбирается в случае кратного максимума.

При сформулированных ниже условиях относительно особых значений параметра Λ для семейства $\{\omega_\Lambda\}$, а также относительно поведения функции $\omega_\Lambda(k)$ в окрестностях этих особых значений верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. 1. *Существует такая положительная константа $\tilde{C} > 0$, что для всех значений Λ , лежащих вне всех $\tilde{C}\beta^2$ -окрестностей особых значений семейства $\{\omega_\Lambda, \Lambda \in \mathbb{T}^1\}$, у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ нет прилегающих уровней.*

2. *Существует такая константа $\tilde{c} < \tilde{C}$, что у каждого $\Lambda_j^{\text{кр}}$, для которого $M_{j,\pm}^{\text{кр}} < 0$, существует $\tilde{c}\beta^2$ -окрестность, такая, что для всех Λ из этой окрестности у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ имеется ровно один прилегающий уровень $\varepsilon_j^{\text{кр}}$. Этот уровень лежит выше $\tau_\Lambda^{\text{max}}$, если кратный экстремум является максимумом функции $\omega_{\Lambda_j^{\text{кр}}}$, и ниже $\tau_\Lambda^{\text{min}}$, если кратный экстремум — минимум функции ω_Λ . При этом*

$$|\varepsilon_j^{\text{кр}} - \tau_\Lambda^{\text{ext}}| < C\beta^3,$$

где $C > 0$ — константа, не зависящая от β и Λ , а $\tau_\Lambda^{\text{ext}}$ — ближайший к $\varepsilon_j^{\text{кр}}$ край непрерывного спектра.

В случае когда $M_{j,\pm}^{\text{кр}} > 0$ для всех Λ , принадлежащих $\tilde{C}\beta^2$ -окрестности значения $\Lambda_j^{\text{кр}}$, у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ нет прилегающих уровней.

3. В $\tilde{C}\beta^2$ -окрестности любого каустического значения $\Lambda_i^{\text{кауст}}$ у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ нет прилегающих уровней.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. К сожалению, в случае когда $M_{j,\pm}^{\text{кр}} < 0$, мы ничего не знаем о прилегающих уровнях в момент их «рождения», т. е. при Λ , лежащих в зазорах между $\tilde{C}\beta^2$ - и $\tilde{c}\beta^2$ -окрестностями значения $\Lambda_j^{\text{кр}}$.

2. Случай $M_{j,\pm}^{\text{кр}} = 0$ также может быть исследован развитыми здесь методами, однако мы его не рассматриваем.

3. В случае когда вырожденный экстремум $\omega_{\Lambda^{\text{кауст}}}$ достигается не в основной критической точке, как мы это предполагаем, а в парной точке, в некоторой окрестности значения $\Lambda^{\text{кауст}}$ могут появиться прилегающие уровни. Этот случай допускает исследование с помощью наших приемов, но мы не рассматриваем его здесь, поскольку он не находится в «общем положении» при $\nu = 1$ [2]. В частности, такая ситуация возникает в случае взаимодействия ближайших соседей, изученном в работах (см. [4, 5]).

2.3. Условия относительно семейства ω_Λ . Здесь мы более подробно опишем требования, налагаемые на семейство функций $\{\omega_\Lambda, \Lambda \in \mathbb{T}^1\}$ (при всех достаточно малых β). Эти требования выделяют семейства $\{\omega_\Lambda\}$ «общего положения», как уже говорилось во введении к [1]. Это следует из некоторых фактов теории устойчивости особенностей и их деформаций (см. [2] и [3]).

Каустические значения $\Lambda \in \mathbb{T}^1$. У семейства ω_Λ имеется лишь конечное число каустических значений параметра Λ : $\Lambda_1^{\text{кауст}}, \dots, \Lambda_s^{\text{кауст}}$ (или их нет вообще). При каждом значении $\Lambda = \Lambda_i^{\text{кауст}}, i = 1, \dots, s$, вырождается ровно один из экстремумов функции $\omega_\Lambda(k)$, который достигается в какой-нибудь из основных точек $k^{(1)}$ или $k^{(2)}$, т. е. $k_i^{\text{ext}} = k^{(1)}$ или $k^{(2)}$, где k_i^{ext} означает точку вырожденного экстремума функции $\omega_{\Lambda_i^{\text{кауст}}}$, $i = 1, \dots, s$. При этом вырождение имеет тип $A_{e,2}$ (см. [2]), т. е. при надлежащей нечетной относительно точки k_i^{ext} гладкой замене переменных $k \rightarrow x(k)$ в окрестности точки k_i^{ext} (т. е. такой, что

$x(k_i^{\text{ext}}) = 0$ и $x(2k_i^{\text{ext}} - k) = -x(k)$, функция $\omega_{\Lambda_i^{\text{кауст}}}$ принимает вид

$$\omega_{\Lambda_i^{\text{кауст}}}(x) = \omega_{\Lambda_i^{\text{кауст}}}(k_i^{\text{ext}}) \pm x^4,$$

где знак $-$ соответствует вырожденному максимуму, а знак $+$ соответствует вырожденному минимуму. Кроме того, мы предполагаем, что выполнено условие

$$\left. \frac{\partial}{\partial \Lambda} \frac{\partial^2 \omega_{\Lambda}}{\partial k^2} \right|_{k=k_i^{\text{ext}}, \Lambda=\Lambda_i^{\text{кауст}}} \neq 0. \quad (2.4)$$

В дальнейшем мы предполагаем, что существуют два конечных (т.е. не зависящих от β) числа $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, таких, что для любого i в δ -окрестности $V_{\delta}^{(i)}$ значения $\Lambda_i^{\text{кауст}}$ нет других особых значений Λ семейства ω_{Λ} и при изменении Λ в этой δ -окрестности в ε -окрестности точки $k^{\sigma} = k^{\text{ext}}(\Lambda_i^{\text{кауст}})$ существует ровно один экстремум функции ω_{Λ} , одноименный с вырожденным экстремумом $\omega_{\Lambda_i^{\text{кауст}}}$, причем при Λ , лежащих с одной стороны от $\Lambda_i^{\text{кауст}}$ (скажем, справа), этот экстремум достигается снова в основной точке $k^{\sigma} = k^{\text{ext}}(\Lambda)$, а для Λ , лежащих с другой стороны от $\Lambda_i^{\text{кауст}}$, — в парной точке $(k_1(\Lambda), k_2(\Lambda))$, «родившейся» из вырожденной точки k^{σ} (см. рис. 1).

Рис. 1. Графики функций $\omega_{\Lambda}(k)$ для k , лежащих в окрестности основной критической точки, и Λ из окрестности значения $\Lambda^{\text{кауст}}$ ((a) $\Lambda > \Lambda^{\text{кауст}}$, (b) $\Lambda = \Lambda^{\text{кауст}}$, (c) $\Lambda < \Lambda^{\text{кауст}}$; k^{σ} — основная критическая точка, k_1, k_2 — дополнительные критические точки).

При этом существует такая конечная константа $\rho > 0$, что для любого i и любого $\Lambda \in V_{\delta}^{(i)}$

$$\inf_{k: |k - k_{\sigma}^{\text{ext}}(\Lambda)| > \varepsilon} |\omega_{\Lambda}(k) - \omega_{\Lambda}(k_i^{\text{ext}})| > \rho\beta,$$

где $k_i^{\text{ext}}(\Lambda)$ — либо основная точка k^{σ} , либо одна из парных точек $k_1(\Lambda), k_2(\Lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В двухчастичном пространстве трансфер-матрицы $\mathcal{T}$ функция $\omega_{\Lambda}(k)$ имеет вид

$$\omega_{\Lambda}(k) = a(k)a(\Lambda - k), \quad (2.5)$$

где $a(k)$ — функция, описывающая одночастичный спектр оператора $\mathcal{T}$ (см. [1]). Все перечисленные выше условия относительно функции $\omega_{\Lambda}(k)$ вида (2.5) выполняются, если в точках перегиба функции $a(k)$ ее третья и четвертая производные отличны от нуля.

Кратные значения $\Lambda_j^{\text{кр}} \in \mathbb{T}^1$. Назовем значение $\Lambda = \Lambda^{\text{кр}} \in \mathbb{T}^1$ *n-кратным*, $n > 1$, если у семейства функций $\{\omega_{1,\Lambda}\}$ при $\Lambda = \Lambda^{\text{кр}}$ имеется ровно n (глобальных) минимумов или n (глобальных) максимумов, принимаемых в точках

$k_1^{\text{ext}}, \dots, k_n^{\text{ext}}$, $\text{ext} = \min$ или $\text{ext} = \max$. Заметим, что все экстремальные значения в этих точках совпадают,

$$\omega_{\Lambda^{\text{кр}}}(k_1^{\text{ext}}) = \dots = \omega_{\Lambda^{\text{кр}}}(k_n^{\text{ext}}).$$

Мы предполагаем, что у семейства $\{\omega_\Lambda\}$ имеется лишь конечное число двукратных значений $\Lambda_1^{\text{кр}}, \dots, \Lambda_p^{\text{кр}}$ (либо их нет вовсе) и при этом при каждом $\Lambda_j^{\text{кр}}$ все экстремумы функции $\omega_{\Lambda_j^{\text{кр}}}$ невырождены, а более чем двукратных значений Λ нет совсем. Таким образом, множества кратных и каустических значений Λ не пересекаются.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что $\omega_\pi(\pi/2) = \omega_\pi(3\pi/2)$ и, таким образом, если в основных точках $\pi/2$ и $3\pi/2$ достигается экстремум функции $\omega_\pi(k)$, то значение $\Lambda = \pi$ является кратным.

Далее предполагается, что существует конечная (не зависящая от β) δ -окрестность $V_{\delta,j}^{\text{кр}}$ кратного значения $\Lambda_j^{\text{кр}}$, такая, что в этой окрестности нет других особых значений семейства $\{\omega_\Lambda\}$ и при изменении Λ в этой окрестности у функции ω_Λ по-прежнему существуют два одноименных экстремума $\omega_\Lambda^{\text{ext}}(k_1^{\text{ext}}(\Lambda)) = \omega^{(1)}(\Lambda)$, $\omega_\Lambda^{\text{ext}}(k_2^{\text{ext}}(\Lambda)) = \omega^{(2)}(\Lambda)$, которые достигаются в точках, близких к $k_1^{\text{ext}}(\Lambda_j^{\text{кр}})$ и $k_2^{\text{ext}}(\Lambda_j^{\text{кр}})$, только один из этих экстремумов является локальным, а другой глобальным. При этом предполагается, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial \Lambda} (\omega^{(1)}(\Lambda) - \omega^{(2)}(\Lambda)) \right|_{\Lambda=\Lambda_j^{\text{кр}}} \neq 0. \quad (2.6)$$

Из этого, в частности, следует, что

$$|\omega^{(1)}(\Lambda) - \omega^{(2)}(\Lambda)| < C\beta|\Lambda - \Lambda_j^{\text{кр}}|,$$

где C — константа, не зависящая от β и Λ . Кроме того, при $\Lambda \in V_\delta^{\text{кр}}$ существуют конечные ε -окрестности точек $k_\sigma^{\text{ext}}(\Lambda)$, $\sigma = 1, 2$, внутри которых нет критических точек функции $\omega_\Lambda(k)$, кроме $k_\sigma^{\text{ext}}(\Lambda)$. При этом существует такая конечная константа $\rho > 0$, что для любого j и любого $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$

$$\inf_{k: |k - k_\sigma^{\text{ext}}(\Lambda)| > \varepsilon} |\omega_\Lambda(k) - \omega_\Lambda(k_\sigma^{\text{ext}}(\Lambda))| > \rho\beta,$$

где снова $k_\sigma^{\text{ext}}(\Lambda)$ — точка экстремума, ближайшая к точке k .

Обозначим через $V \subset \mathbb{T}^1$ объединение всех упомянутых δ -окрестностей особых значений Λ , и пусть $V' = \mathbb{T}^1 \setminus V$ — дополнение к V . Очевидно, что для любого $\Lambda \in V'$ функция ω_Λ имеет лишь одну невырожденную точку (глобального) максимума $k^{\text{max}}(\Lambda)$ и одну невырожденную точку (глобального) минимума $k^{\text{min}}(\Lambda)$. Кроме того, для $\Lambda \in V'$ существуют ε -окрестности точек $k^{\text{max}}(\Lambda)$ и $k^{\text{min}}(\Lambda)$, в которых вторая производная ω_Λ'' функции ω_Λ сохраняет знак и

$$\inf_{k: |k - k^{\text{ext}}(\Lambda)| > \varepsilon} |\omega_\Lambda(k) - \omega_\Lambda(k^{\text{ext}}(\Lambda))| > \beta\rho,$$

где $\rho > 0$ — константа, введенная выше. Кроме того, мы предполагаем, что для любого $\Lambda \in V'$

$$|\omega_\Lambda''(k_\Lambda^{\text{ext}})| > a\beta > 0, \quad \text{ext} = \min, \max,$$

где a — константа, не зависящая от $\Lambda \in V'$ и β .

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку при малых β функция $\omega_0 + \beta\omega_\Lambda^{(1)}(k) = \bar{\omega}_\Lambda$ (см. разложение (1.2)) мало отличается от функции ω_Λ , все перечисленные условия должны выполняться и для семейства этих функций. С другой стороны, так как функцию $\bar{\omega}_\Lambda$ легче вычислить, чем полную функцию ω_Λ , все указанные условия достаточно проверить для $\bar{\omega}_\Lambda$.

В работе [1] показано, что собственные значения z оператора $\mathcal{T}_\Lambda$, лежащие вне непрерывного спектра $[\tau_\Lambda^{\min}, \tau_\Lambda^{\max}]$, совпадают с нулями следующего модифицированного детерминанта Фредгольма:

$$\Delta_\Lambda(z) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \cdots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{T_n(k_1, \dots, k_n; z) dk_1 \cdots dk_n}{(\omega_\Lambda(k_1) - z) \cdots (\omega_\Lambda(k_n) - z)}. \quad (2.7)$$

Поэтому в дальнейшем будет изучаться поведение функции $\Delta_\Lambda(z)$ при соответствующих значениях Λ и значениях z , удаленных от краев непрерывного спектра на расстояние, не превосходящее $D\beta^2$. Для определенности мы ограничимся случаем $z < \tau_\Lambda^{\min}$; случай $z > \tau_\Lambda^{\max}$ рассматривается аналогично.

§3. Доказательство теоремы 2.1

Как было отмечено выше, в [1] доказано, что у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ нет прилегающих уровней, если Λ лежит вне конечных (не зависящих от β) δ -окрестностей особых значений, причем δ таково, что каждая такая окрестность содержит лишь одно особое значение Λ . Таким образом, нам нужно по отдельности изучить спектр $\mathcal{T}_\Lambda$ для Λ , лежащих в этих δ -окрестностях. Мы начнем с кратных особых значений.

3.1. Прилегающие уровни для Λ , лежащих в δ -окрестностях значений $\Lambda_j^{\text{кр}}$. Итак, рассмотрим случай, когда Λ лежит в δ -окрестности $V_{\delta,j}^{\text{кр}}$ некоторого кратного значения $\Lambda_j^{\text{кр}}$ семейства ω_Λ . В этом случае существуют две точки $k_1^{\min}(\Lambda)$ и $k_2^{\min}(\Lambda)$, $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$, в которых функция $\omega_\Lambda(k)$ достигает экстремума (а именно минимума), причем один из них глобальный, а другой локальный. Пусть

$$\tau_\Lambda^\sigma = \omega_\Lambda(k_\sigma^{\min}(\Lambda)), \quad \sigma = 1, 2,$$

и для определенности

$$\tau_\Lambda^{\min} = \tau_\Lambda^1 \leq \tau_\Lambda^2.$$

(При значении $\Lambda = \Lambda_j^{\text{кр}}$ достигается равенство между τ_Λ^1 и τ_Λ^2 .) Эти экстремумы невырождены, и в их ε -окрестностях U_ε^σ , $\sigma = 1, 2$, производная $\omega_\Lambda''(k)$ не меняет знак, а вне окрестностей U_ε^σ , $\sigma = 1, 2$, выполнено неравенство

$$|\omega_\Lambda(k) - \tau_\Lambda| > \beta\rho, \quad k \notin U_\varepsilon^\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \quad \Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}.$$

ЛЕММА 3.1. Для $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$ и $z < \tau_\Lambda^{\min}$ верно следующее представление:

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} = \frac{A_{\min}^{1,\Lambda}}{\sqrt{\tau_\Lambda^1 - z}} + \frac{A_{\min}^{2,\Lambda}}{\sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} + \psi_\Lambda(z), \quad (3.1)$$

где $A_{\min}^{\sigma,\Lambda} = \sqrt{2\pi}|\omega_\Lambda''(k_\sigma^{\min})|^{-1/2}$, а $\psi_\Lambda(z)$ — ограниченная аналитическая функция от z в полуплоскости $\mathcal{F}_\Lambda = \{\text{Re}(\tau_\Lambda^{\min} - z) > 0\}$, допускающая в $\mathcal{F}_\Lambda$ оценку

$$|\psi_\Lambda(z)| \leq \frac{C}{\beta},$$

где константа C не зависит от z , β и $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что

$$A_{\min}^{\sigma,\Lambda} = \frac{\sqrt{2\pi}(1 + O(\beta))}{\beta^{1/2}[(\omega_{\Lambda}^{(1)}(k_{\sigma}^{\min}(\Lambda)))'']^{1/2}} = \frac{a_{\sigma}^{\Lambda}}{\sqrt{\beta}}(1 + O(\beta)), \quad \sigma = 1, 2,$$

где $a_{\sigma}^{\Lambda} = \sqrt{2\pi}/(\omega_{\Lambda}^{(1)}(k))'' > 0$, а $\omega_{\Lambda}^{(1)}$ — функция, входящая в разложение (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Напишем

$$\int_{\mathbb{T}^1} \frac{dk}{\omega_{\Lambda}(k) - z} = \int_{U_{\varepsilon}^1} \frac{dk}{\omega_{\Lambda}(k) - z} + \int_{U_{\varepsilon}^2} \frac{dk}{\omega_{\Lambda}(k) - z} + \int_{\mathbb{T}^1 \setminus (U_{\varepsilon}^1 \cup U_{\varepsilon}^2)} \frac{dk}{\omega_{\Lambda}(k) - z}.$$

Далее каждое из слагаемых оценивается так же, как в лемме 1.3 [1]. Лемма 3.1 доказана.

Положим

$$I_n^{\Lambda}(z) = \int_{\mathbb{T}^1} \cdots \int_{\mathbb{T}^1} \frac{T_{\Lambda}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; z)}{\prod_{i=1}^n (\omega_{\Lambda}(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i.$$

Сейчас мы выведем представление для $I_2^{\Lambda}(z)$ при $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$, $z < \tau_{\Lambda}^{\min}$.

ЛЕММА 3.2. Для $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$ и $z \in \mathcal{F}_{\Lambda}$ верно следующее представление:

$$\frac{1}{2} I_2^{\Lambda}(z) = A_{\min}^{1,\Lambda} A_{\min}^{2,\Lambda} \frac{B_{\Lambda}^{+}(k_1^{\min}, k_2^{\min})}{\sqrt{\tau_{\Lambda}^1 - z} \sqrt{\tau_{\Lambda}^2 - z}} + \hat{\psi}_{\Lambda}(z), \quad (3.2)$$

где величины $A_{\min}^{\sigma,\Lambda}$ те же, что и в лемме 3.1, функция B_{Λ}^{+} введена в (2.3), а функция $\hat{\psi}_{\Lambda}(z)$ аналитична в полуплоскости $\mathcal{F}_{\Lambda}$ и удовлетворяет оценке

$$|\hat{\psi}_{\Lambda}(z)| \leq \frac{T_0 \sqrt{\beta}}{\sqrt{\tau_{\Lambda}^{\min} - z}} + T_1, \quad (3.3)$$

где T_0, T_1 — константы, не зависящие от β, z и Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из представлений (1.2), (2.3),

$$B_{\Lambda}^{+}(k_1^{\min}, k_2^{\min}) = \beta^2 B_{\Lambda,0}^{+}(1 + O(\beta)),$$

где $B_{\Lambda,0}^{+}$ — константа, не зависящая от β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Запишем

$$\begin{aligned} I_2^{\Lambda}(z) &= \int_{U_{\varepsilon}^{(1)}} dk_1 \int_{U_{\varepsilon}^{(1)}} dk_2 \frac{B_{\Lambda}^{+}(k_1, k_2) dk_1}{(\omega_{\Lambda}(k_1) - z)(\omega_{\Lambda}(k_2) - z)} \\ &+ \int_{U_{\varepsilon}^{(2)}} dk_1 \int_{U_{\varepsilon}^{(2)}} dk_2 \cdots + \int_{U_{\varepsilon}^{(1)}} dk_1 \int_{U_{\varepsilon}^{(2)}} dk_2 \cdots + \int_{U_{\varepsilon}^{(2)}} dk_1 \int_{U_{\varepsilon}^{(1)}} dk_2 \cdots \\ &+ \int_{\mathbb{T}^1 \setminus (U_{\varepsilon}^{(1)} \cup U_{\varepsilon}^{(2)})} dk_1 \int_{\mathbb{T}^1 \setminus (U_{\varepsilon}^{(1)} \cup U_{\varepsilon}^{(2)})} dk_2 \cdots. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Первые два интеграла оцениваются так же, как и при доказательстве леммы 3.3 в [1], и их сумма не превосходит

$$\frac{\hat{T} \sqrt{\beta}}{\sqrt{\tau_{\Lambda}^{\min} - z}} + \hat{T}_1,$$

где $\widehat{T}_0, \widehat{T}_1$ — константы, не зависящие от z, β и Λ . Последний интеграл в (3.4) не превосходит константу $\widehat{T}_0$ (также не зависящую от z, β и Λ). Рассмотрим третий и четвертый интегралы (равные между собой).

Воспользуемся разложением функции $B_\Lambda^+(k_1, k_2)$ в окрестности $U_\varepsilon^{(1)} \times U_\varepsilon^{(2)}$ точки $(k_1^{\min}(\Lambda), k_2^{\min}(\Lambda)) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$:

$$B_\Lambda^+(k_1, k_2) = B_\Lambda^+(k_1^{\min}(\Lambda), k_2^{\min}(\Lambda)) + (k_1 - k_1^{\min}) \frac{\partial B_\Lambda^+}{\partial k_1} \Big|_{\substack{k_1=k_1^{\min}(\Lambda) \\ k_2=k_2^{\min}(\Lambda)}} + (k_2 - k_2^{\min}) \frac{\partial B_\Lambda^+}{\partial k_2} \Big|_{\substack{k_1=k_1^{\min}(\Lambda) \\ k_2=k_2^{\min}(\Lambda)}} + A(k_1 - k_1^{\min}(\Lambda), k_2 - k_2^{\min}(\Lambda))C(k_1, k_2), \quad (3.5)$$

где $A(v_1, v_2)$ — квадратичная форма от переменных v_1, v_2 , а $C(k_1, k_2)$ — ограниченная функция. Подставляя разложение (3.5) в интеграл

$$\int_{U_\varepsilon^{(1)}} dk_1 \int_{U_\varepsilon^{(2)}} dk_2 \frac{B_\Lambda^+(k_1, k_2) dk_1}{(\omega_\Lambda(k_1) - z)(\omega_\Lambda(k_2) - z)}, \quad (3.6)$$

мы видим, что первое слагаемое в разложении (3.5) приводит к главному члену в представлении (3.2), а также к функции $\widehat{\psi}_\Lambda(z)$, допускающей оценку (3.3).

Следующие два слагаемых в (3.5) приводят к интегралам вида

$$\frac{\partial B_\Lambda^+}{\partial k_1} \Big|_{\substack{k_1=k_1^{\min}(\Lambda) \\ k_2=k_2^{\min}(\Lambda)}} \int_{U_\varepsilon^{(1)}} \frac{(k_1 - k_1^{\min}(\Lambda))}{\omega_\Lambda(k_1) - z} dk_1 \int_{U_\varepsilon^{(2)}} \frac{dk_2}{\omega_\Lambda(k_2) - z}. \quad (3.7)$$

Оценим первый множитель $\int_{U_\varepsilon^{(1)}} \frac{k_1 - k_1^{\min}(\Lambda)}{\omega_\Lambda(k_1) - z} dk_1$. После замены переменных

$$k_1 - k_1^{\min}(\Lambda) = u + au^2 + O(u^3)$$

в окрестности $U_\varepsilon^{(1)}$, приводящей функцию $\omega_\Lambda(k)$ к виду

$$\omega_\Lambda(k) = \omega_\Lambda(k_1^{\min}(\Lambda)) + \frac{1}{2} \omega_\Lambda''(k_1^{\min}(\Lambda)) u^2,$$

интеграл $\int_{U_\varepsilon^{(1)}} \frac{k_1 - k_1^{\min}(\Lambda)}{\omega_\Lambda(k_1) - z} dk_1$ превратится в интеграл

$$\int_{\widetilde{U}_\varepsilon} \frac{u(1 + 2au + O(u^2)) du}{\frac{1}{2} \omega_\Lambda''(k_1^{\min}(\Lambda)) u^2 + \omega_\Lambda(k_1^{\min}(\Lambda)) - z},$$

где $\widetilde{U}_\varepsilon = (-\widetilde{\varepsilon}', \widetilde{\varepsilon}'')$ — некоторая (вообще говоря, несимметричная) окрестность нуля, причем $|\widetilde{\varepsilon}'' - \widetilde{\varepsilon}'| \sim O(\varepsilon^2)$. Несложный подсчет этого интеграла показывает, что он не превосходит величину $\bar{c}/\beta$ ($\bar{c}$ — константа, не зависящая от β, Λ и z). Воспользовавшись теперь оценкой второго множителя в (3.7) (см. лемму 3.1 в [1]), мы получим, что интеграл (3.7) не превосходит величину

$$\frac{\widehat{T}_0 \sqrt{\beta}}{\sqrt{\tau_\Lambda^{\min} - z}} + \widehat{T}_1,$$

где $\widehat{T}_0$ и $\widehat{T}_1$ — константы.

Таким образом, представление (3.2) доказано.

Интегралы

$$I_n^\Lambda(z) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \cdots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n)}{\prod_{i=1}^n (\omega_\Lambda(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i$$

являются аналитическими функциями в $\mathcal{F}_\Lambda$ и при $n > 2$ удовлетворяют оценкам, аналогичным тем, которые получены в лемме 3.3 из [1]; окончательно мы получаем, что

$$\left| \sum_{i=3}^{\infty} I_n^\Lambda(z) \right| < \frac{DA_{\min}^{1,\Lambda} A_{\min}^{2,\Lambda} \beta^2}{\sqrt{\tau_\Lambda^1 - z} \sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} + C_1 \frac{A_{\min}^{1,\Lambda} \beta}{\sqrt{\tau_\Lambda^1 - z}} + C_2 \frac{A_{\min}^{2,\Lambda} \beta}{\sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} + R, \quad (3.8)$$

где D, C_1, C_2, R — константы (не зависящие от β, Λ и z). Таким образом, детерминант $\Delta_\Lambda(z)$ при $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$ и $z < \tau_\Lambda^{\min}$ имеет представление

$$\begin{aligned} \Delta_\Lambda(z) &= \frac{(B_\Lambda^+(k_1^{\min}(\Lambda), k_2^{\min}(\Lambda))(1 + O(\beta))A_{\min}^{1,\Lambda}A_{\min}^{2,\Lambda}}{\sqrt{\tau_\Lambda^1 - z} \sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} \\ &\quad + \frac{A_{\min}^{1,\Lambda}(1 + O(\beta))}{\sqrt{\tau_\Lambda^1 - z}} + \frac{A_{\min}^{2,\Lambda}(1 + O(\beta))}{\sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} + O\left(\frac{1}{\beta}\right) \\ &= \frac{B_{\Lambda,0}^+ a_1^\Lambda a_2^\Lambda \beta}{\sqrt{\tau_\Lambda^{(1)} - z} \sqrt{\tau_\Lambda^{(2)} - z}} + \frac{a_1^\Lambda}{\sqrt{\beta} \sqrt{\tau_\Lambda^1 - z}} + \frac{a_2^\Lambda}{\sqrt{\beta} \sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} \\ &\quad + \Psi_1^\Lambda(z) + \Psi_2^\Lambda(z) + \Psi_3^\Lambda(z) + \Psi_4^\Lambda(z), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Psi_i^\Lambda(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, являются аналитическими функциями от $z \in \mathcal{F}_\Lambda$ и удовлетворяют в $\mathcal{F}_\Lambda$ оценкам

$$\begin{aligned} |\Psi_1^\Lambda(z)| &< \frac{C_1 \beta^2}{\sqrt{\tau_\Lambda^1 - z} \sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}}, & |\Psi_2^\Lambda(z)| &< \frac{C_2 \sqrt{\beta}}{\sqrt{\tau_\Lambda^1 - z}}, \\ |\Psi_3^\Lambda(z)| &< \frac{C_3 \sqrt{\beta}}{\sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}}, & |\Psi_4^\Lambda(z)| &< \frac{C_4}{\beta}, \end{aligned}$$

C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, — константы, не зависящие от β, z и $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$.

Изучим теперь корни уравнения $\Delta_\Lambda(z) = 0$. Определим функцию $\Delta_\Lambda^0(z)$ формулой

$$\Delta_\Lambda^0(z) = \frac{a_1^\Lambda}{\sqrt{\beta} \sqrt{\tau_\Lambda^1 - z}} + \frac{a_2^\Lambda}{\sqrt{\beta} \sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} + a_1^\Lambda a_2^\Lambda \frac{B_{\Lambda,0}^+ \beta}{\sqrt{\tau_\Lambda^1 - z} \sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}}.$$

Рассмотрим сначала случай $B_\Lambda^+(k_1^{\min}, k_2^{\min}) > 0$ (т.е. $B_{\Lambda,0}^+ > 0$). В этом случае функция $\Delta_\Lambda^0(z)$ является знакоопределенной и, значит, не имеет нулей. При этом в силу оценок в леммах 3.1, 3.2 и оценки (3.8)

$$|\Delta_\Lambda^0(z)| > |\Delta_\Lambda^0(z) - \Delta_\Lambda(z)|, \quad |z - \tau_\Lambda^{\min}| < D_2 \beta^2,$$

откуда следует отсутствие нулей у функции $\Delta_\Lambda(z)$ при $\tau_\Lambda^{\min} - D_2 \beta^2 < z < \tau_\Lambda^{\min}$ и $\Lambda \in V_{\delta,j}^{\text{кр}}$.

Рассмотрим теперь случай $B_{\Lambda}^{+}(k_1^{\min}, k_2^{\min}) < 0$ (т. е. $B_{\Lambda,0}^{+} < 0$). Введем следующие обозначения:

$$x = \sqrt{\tau_{\Lambda}^1 - z}, \quad y = \sqrt{\tau_{\Lambda}^2 - z}.$$

В этих обозначениях уравнение $\Delta_{\Lambda}^0(z) = 0$ переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{a_1^{\Lambda}}{\sqrt{\beta}x} + \frac{a_2^{\Lambda}}{\sqrt{\beta}y} + \frac{a_1^{\Lambda}a_2^{\Lambda}B_{\Lambda,0}^{+}\beta}{xy} = 0, \\ y^2 - x^2 = \tau_{\Lambda}^2 - \tau_{\Lambda}^1, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

После умножения на $\sqrt{\beta}xy$ обеих частей в первом уравнении системы (3.10) она перейдет в систему

$$\begin{cases} a_1^{\Lambda}y + a_2^{\Lambda}x + a_1^{\Lambda}a_2^{\Lambda}B_{\Lambda,0}^{+}\beta^{3/2} = 0, \\ y^2 - x^2 = \tau_{\Lambda}^2 - \tau_{\Lambda}^1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Первое уравнение есть уравнение прямой M на плоскости xy , а второе — уравнение гиперболы L при $\tau_{\Lambda}^{(2)} > \tau_{\Lambda}^{(1)}$ или прямой L' : $x = y$ при $\tau_{\Lambda}^{(2)} = \tau_{\Lambda}^{(1)}$ (т. е. при $\Lambda = \Lambda_j^{\text{кр}}$). Пусть y_0 и y_1 — соответственно точки пересечения прямой и гиперболы с осью y (см. рис. 2).

Рис. 2. Прямая M и гипербола L (прямая L').

Очевидно, что положительное решение системы (3.11) существует при условии, что $y_0 \geq y_1$ (в частности, при $\Lambda = \Lambda_j^{\text{кр}}$), т. е. при условии, что

$$-a_2^{\Lambda}B_{\Lambda,0}^{+}\beta^{3/2} > \sqrt{\tau_{\Lambda}^2 - \tau_{\Lambda}^1}.$$

Поскольку $\tau_{\Lambda}^2 - \tau_{\Lambda}^1 \sim |\Lambda - \Lambda_j^{\text{кр}}|\beta$, решение существует при $|\Lambda - \Lambda_j^{\text{кр}}| < c\beta^2$, где c — некоторая константа, и перестает существовать при $|\Lambda - \Lambda_j^{\text{кр}}| > C\beta^2$, где $C > c$ — другая константа. (Обе константы не зависят от β и Λ .) При $\Lambda = \Lambda_j^{\text{кр}} = \bar{\Lambda}$ решение $x = y$ равно

$$y = x = -\frac{a_1^{\bar{\Lambda}}a_2^{\bar{\Lambda}}B_{\bar{\Lambda},0}^{+}\beta^{3/2}}{a_1^{\bar{\Lambda}} + a_2^{\bar{\Lambda}}} \equiv \hat{D}\beta^{3/2}, \quad \hat{D} > 0,$$

откуда $\tau_{\Lambda}^{\min} - z_0 = \beta^3 \hat{D}^2$, т. е. $z_0 = \tau_{\Lambda}^{\min} - \beta^3 \hat{D}^2$.

Теперь мы покажем, что при надлежащем выборе констант C и c решение уравнения $\Delta_\Lambda(z) = 0$ существует при $|\Lambda - \Lambda_j^{\text{кр}}| < c\beta^2$ и отсутствует при $|\Lambda - \Lambda_j^{\text{кр}}| > C\beta^2$.

Рис. 3. Контур Γ .

Рассмотрим для этого контур Γ в $\mathcal{F}_\Lambda$, состоящий из полуокружности

$$\Gamma' = \{z : |\tau_\Lambda^{\min} - z| = D\beta^2\}$$

и отрезка прямой (см. рис. 3)

$$\Gamma'' = \{z : \operatorname{Re}(\tau_\Lambda^{\min} - z) = 0, |\tau_\Lambda^{\min} - z| < D\beta^2\}.$$

Заметим, что при $|\Lambda - \Lambda_j^{\text{кр}}| < c\beta^2$ имеем

$$|\tau_\Lambda^{(2)} - \tau_\Lambda^{(1)}| < K\beta^3$$

при некоторой константе K , и, таким образом, для $z \in \Gamma'$

$$\frac{a_2^\Lambda}{\sqrt{\beta}\sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} = \frac{a_2^\Lambda}{\sqrt{\beta}\sqrt{\tau_\Lambda^{\min} - z}}(1 + O(\beta)).$$

Отсюда легко следует, что на полуокружности Γ'

$$\left| \frac{a_1^\Lambda}{\sqrt{\beta}\sqrt{\tau_\Lambda^{\min} - z}} + \frac{a_2^\Lambda}{\sqrt{\beta}\sqrt{\tau_\Lambda^2 - z}} \right| \sim \frac{1}{\beta^{3/2}},$$

в то время как остальные слагаемые в разложении (3.9) детерминанта Δ_Λ имеют меньший порядок $1/\beta^\alpha$ по величине β : $\alpha < 3/2$, и, следовательно, главная часть $\Delta_\Lambda^0(z)$ мажорирует остальную часть функции $\Delta_\Lambda(z)$ для $z \in \Gamma'$:

$$|\Delta_\Lambda^0(z)| > |\delta(z)|,$$

где $\delta(z) = \Delta_\Lambda(z) - \Delta_\Lambda^0(z)$.

Рассмотрим теперь $z \in \Gamma''$ и запишем $\tau_\Lambda^{\min} - z = it$, где $0 \leq t \leq D_2\beta^2$. При этом верно равенство

$$\begin{aligned} |\Delta_\Lambda^0(z)| &= \left[\left(\frac{a_1^\Lambda + a_2^\Lambda}{\sqrt{2t\beta}} + \frac{O(\sqrt{\beta})}{\sqrt{t}} \right)^2 + \left(\frac{a_1^\Lambda + a_2^\Lambda}{\sqrt{2t\beta}} + \frac{O(\sqrt{\beta})}{\sqrt{t}} + \frac{\beta a_1^\Lambda a_2^\Lambda B_{\Lambda,0}^+}{t} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &> \left| \frac{a_1^\Lambda + a_2^\Lambda}{\sqrt{2t\beta}} + \frac{O(\sqrt{\beta})}{\sqrt{t}} \right| \sim \frac{1}{\beta^{3/2}} \end{aligned}$$

для всех $0 < t < D_2\beta^2$.

Отсюда видно, что функция Δ_Λ^0 на этом интервале и при достаточно малом β значительно превосходит по абсолютной величине все слагаемые, входящие в $\delta(z)$, кроме функции $\Psi_1^\Lambda \sim \beta^2/t$. Эта функция мажорируется выражением $(a_1^\Lambda + a_2^\Lambda)/\sqrt{2t\beta}$ лишь при $t > C\beta^5$ при некоторой константе C . При значениях $t < C\beta^5$ главной по порядку β^{-1} оказывается величина $B_{\Lambda,0}^+ a_1^\Lambda a_2^\Lambda \beta/t \sim \bar{c}/\beta^4$ ($\bar{c}$ — некоторая константа), которая мажорирует как все функции Ψ_i^Λ , $i = 1, 2, 3, 4$, так и величину $(a_1^\Lambda + a_2^\Lambda)/\sqrt{2t\beta} + O(\sqrt{\beta})/\sqrt{t}$. Отсюда следует, что на отрезке Γ'

$$|\Delta_0(z)| > |\delta(z)|.$$

Применяя теперь теорему Руше (см. [6]), мы получаем, что детерминант $\Delta_\Lambda(z)$ имеет при $|\Lambda - \Lambda_j^{\text{кп}}| < c\beta^2$ ровно один нуль внутри контура Γ . Этот нуль расположен на вещественной оси поблизости от точки z_0 — нуля функции $\Delta_0(z)$.

Рассмотрим теперь случай $|\Lambda - \Lambda_j^{\text{кп}}| > C\beta^2$. При всех значениях Λ

$$\frac{1}{2} \frac{a_2^\Lambda}{|\tau_\Lambda^2 - z|} < \frac{a_2^\Lambda}{\sqrt{C\bar{k}\beta^3}},$$

где $\bar{k}$ — некоторая константа, и, следовательно,

$$\frac{a_1^\Lambda a_2^\Lambda B_{0,\Lambda}^+ \beta}{[(\tau_\Lambda^2 - z)(\tau_\Lambda^2 - z)]^{1/2}} < \frac{a_1^\Lambda a_2^\Lambda B_{0,\Lambda}^+}{\bar{k}\sqrt{\beta}\sqrt{C}(\tau_\Lambda^{\min} - z)^{1/2}} < \frac{1}{2} \frac{a_1^\Lambda}{\sqrt{\beta}(\tau_\Lambda^{\min} - z)^{1/2}}$$

при достаточно больших значениях C , откуда вытекает, что величина

$$\frac{a_1^\Lambda}{\sqrt{\beta}(\tau_\Lambda^{\min} - z)^{1/2}} + \frac{a_2^\Lambda}{\sqrt{\beta}(\tau_\Lambda^2 - z)^{1/2}}$$

мажорирует все функции $\Psi_i(\Lambda)$, $i = 1, 2, 3, 4$, в разложении (3.9), и, таким образом,

$$|\Delta_0^\Lambda(z)| > |\delta(z)|.$$

Это и означает, что у функции $\Delta_\Lambda(z)$ нет нулей на интервале $\tau_\Lambda^{\min} - D\beta^2 < z < \tau_\Lambda^{\min}$.

Итак, полностью доказано утверждение 2 теоремы 2.1. Перейдем теперь к исследованию окрестности $V_{\delta,i}^{\text{кауст}}$ каустического значения $\Lambda_i^{\text{кауст}}$.

3.2. Отсутствие прилегающих уровней для Λ , лежащих в δ -окрестности каустических значений $\Lambda = \Lambda_j^{\text{кауст}}$. Напомним, что, как мы предположили, существует δ -окрестность $V_{\delta,i}^{\text{кауст}} \subset \mathbb{T}^1$ любого каустического значения $\Lambda_i^{\text{кауст}} \equiv \bar{\Lambda}$, не содержащая других особых значений Λ и такая, что для каждого $\Lambda \in V_{\delta,i}^{\text{кауст}}$ у функции ω_Λ существует единственный (глобальный) экстремум (скажем, для определенности, минимум), близкий к вырожденному экстремуму функции $\omega_{\bar{\Lambda}}$ и достигаемый либо в основной точке $k_{\bar{\Lambda}}^{\min} = k_{\bar{\Lambda}}^{\text{осн}}$ при $\Lambda \in V_{\delta,i}^{\text{кауст}}$, лежащем по одну сторону от $\bar{\Lambda}$, скажем, при $\Lambda > \bar{\Lambda}$, либо в парной точке $(k_{\Lambda,1}^{\min}, k_{\Lambda,2}^{\min})$, «родившейся» из основной точки $k_{\bar{\Lambda}}^{\text{осн}}$, при $\Lambda < \bar{\Lambda}$ (см. рис. 1). При этом в обоих случаях существует ε -окрестность точки минимума $k_{\Lambda}^{\min}$ (или $(k_{\Lambda,1}^{\min}, k_{\Lambda,2}^{\min})$), такая, что

$$\omega_{\bar{\Lambda}}(k) > \beta\rho$$

вне этой окрестности (ρ не зависит от β).

Рис. 4. Вид множества K_2 .

Пусть $k_\Lambda^{\min}$ — точка минимума функции $\omega_\Lambda(k)$, попавшая в $[k_\Lambda^{\text{och}}, k_\Lambda^{\text{och}} + \pi]$. Обозначим через $K_n \subset (\mathbb{T}^1)^n$ множество (см. рис. 4, где изображено множество K_2)

$$\{(k_1, \dots, k_n) : 0 < |k_1 - k_\Lambda^{\min}| < \dots < |k_n - k_\Lambda^{\min}| < \pi\} \cap [k_\Lambda^{\text{och}}, k_\Lambda^{\text{och}} + \pi]^n.$$

Заметим, что в силу симметричности функции $T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n; z)$, а также инвариантности T_n^Λ и ω_Λ относительно отражения в точке k_Λ^{och} выполняется (см. рис. 4) равенство

$$\Delta_\Lambda(z) = \int_{K_1} \frac{2dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \int_{K_n} \frac{T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n; z) dk_1 \dots dk_n}{(\omega_\Lambda(k_1) - z) \dots (\omega_\Lambda(k_n) - z)}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим функцию

$$\bar{\Delta}_\Lambda(k, z) = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \int_{K'_n(k)} \frac{T_n^\Lambda(k, k_2, \dots, k_n; z) dk_2 \dots dk_n}{(\omega_\Lambda(k_2) - z) \dots (\omega_\Lambda(k_n) - z)}, \quad k \in [k_\Lambda^{\text{och}}, k_\Lambda^{\text{och}} + \pi], \quad (3.13)$$

где

$$K'_n(k) = \{(k_2, \dots, k_n) : |k - k_\Lambda^{\min}| < |k_2 - k_\Lambda^{\min}| < \dots < |k_n - k_\Lambda^{\min}| < \pi\} \cap [k_\Lambda^{\text{och}}, k_\Lambda^{\text{och}} + \pi]^{n-1}.$$

Эта функция связана с функцией $\Delta_\Lambda(z)$ следующим соотношением:

$$\Delta_\Lambda(z) = \int_{\mathbb{T}^1} \frac{2 + \bar{\Delta}_\Lambda(k, z)}{\omega_\Lambda(k) - z} dk. \quad (3.14)$$

ЛЕММА 3.3. Функция $\bar{\Delta}_\Lambda(k, z)$ является непрерывной на компакте

$$K = \{(k, z, \Lambda) : k \in [k_\Lambda^{\text{och}}, k_\Lambda^{\text{och}} + \pi], z \in [\tau_\Lambda^{\min} - D\beta^2, \tau_\Lambda^{\min}], \Lambda \in \bar{V}_\delta^i\};$$

кроме того, верна оценка

$$|\bar{\Delta}_\Lambda(k, z)| \leq C\beta, \quad (k, z, \Lambda) \in K, \quad (3.15)$$

где величина $C > 0$ не зависит от β, z, k и Λ .

Отсутствие нулей у функции $\Delta_\Lambda(z)$ при $\Lambda \in V_{\delta,i}^{\text{кауст}}$ и достаточно малых β теперь легко следует из леммы 3.3 и равенства (3.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Напомним, что функции $T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n; z)$ являются аналитическими по переменным Λ и $k_1, \dots, k_n$ в некоторой комплексной окрестности $V_{\delta,i}^{\text{кауст}} \times K_n$.

Положим

$$K_n^p(k) = \{(k_2, \dots, k_n) \in K'_n(k) : |k_p - k_\Lambda^{\min}| < \varepsilon\}, \quad n \geq p \geq 2.$$

ЛЕММА 3.4. При $2 \leq p \leq n$ верна оценка

$$T_n^\Lambda(k, \bar{k}; z) \leq \tilde{A}(\tilde{C}\beta^2)^{n-1} n^{n/2} \prod_{j=2}^p ((k - k_\Lambda^{\text{очн}}) - (k_j - k_\Lambda^{\text{очн}})^2)^2, \quad (3.16)$$

$$\bar{k} = (k_2, \dots, k_n) \in K_n^p(k);$$

кроме того, вне всех множеств $K_n^p(k)$

$$T_n^\Lambda(k, \bar{k}; z) \leq \tilde{A}(\tilde{C}\beta^2)^{n-1} n^{n/2}, \quad \bar{k} \in K_n^1(k) = K'_n(k) \setminus \bigcup_{i=2}^n K_n^p(k), \quad (3.17)$$

где $\tilde{A}, \tilde{C} > 0$ — константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу инвариантности функции $M_\Lambda(k_i, k_j; z)$ относительно отображений $k_j \rightarrow \Lambda - k_j$, $i = j, \dots, n$, при любом $\Lambda \in \mathbb{T}^1$ функция $\widetilde{M}_\Lambda(t_1, t_2; z)$, определяемая равенством

$$M_\Lambda(k_1, k_2; z) = \widetilde{M}_\Lambda((k_1 - k_\Lambda^{\text{очн}})^2, (k_2 - k_\Lambda^{\text{очн}})^2; z),$$

является аналитической функцией переменных (t_1, t_2) в области $\widetilde{W} \times \widetilde{W}$, где $\widetilde{D} = \{|\operatorname{Re} t| < \tilde{\varepsilon}, |\operatorname{Im} t| < A\}$ при некоторых $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $A > 1$. Поэтому для функции $\widetilde{T}_n^\Lambda(t_1, \dots, t_n; z)$, получающейся из $\widetilde{M}_\Lambda(t_1, t_2; z)$ по формуле (2.2), имеет место равенство

$$\widetilde{T}_n^\Lambda(t_1, \dots, t_n; z) = T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n; z) \quad \text{при } t_j = (k_j - k_\Lambda^{\text{очн}})^2,$$

а кроме того, к ней применима лемма 3.2 из работы [1]. Из последнего, в частности, следует, что для любого p

$$\widetilde{T}_n^\Lambda(t, t_2, \dots, t_n; z) \leq \tilde{A}(\tilde{C}\beta^2)^{n-1} n^{n/2} \prod_{j=2}^p (t_i - t_j)^2, \quad t, t_j \in \widetilde{W}, \quad j = 2, \dots, p.$$

Таким образом, при условии что $\varepsilon > |k_\Lambda^{\min} - k_\Lambda^{\text{очн}}| + \tilde{\varepsilon}$ (а это всегда можно предполагать), верна оценка (3.16) для $\bar{k} \in K_n^p(k)$. Лемма доказана.

В силу аналитичности функции T_n^Λ по совокупности переменных Λ и k_i верно представление

$$T_n^\Lambda(k, \bar{k}; z) = \widehat{T}_{n,p}^\Lambda(k, \bar{k}; z, \Lambda) \prod_{j=2}^p ((k - k_\Lambda^{\text{очн}})^2 - (k_j - k_\Lambda^{\text{очн}})^2)^2, \quad \bar{k} \in K_n^p(k), \quad (3.18)$$

где $\widehat{T}_{n,p}^\Lambda$ аналитична в окрестности $(\Lambda, k, \bar{k}) \in V_{\delta,i}^{\text{кауст}} \times [k_\Lambda^{\text{очн}}, k_\Lambda^{\text{очн}} + \pi] \times K_n^p(k)$ и удовлетворяет в этой области оценке

$$|\widehat{T}_{n,p}^\Lambda(k, \dots, k_n, z, \Lambda)| \leq \tilde{A}(\tilde{C}\beta^2)^{n-1} n^{n/2}. \quad (3.19)$$

Пусть $\bar{k} \in K_n^p(k)$; тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{T_n^\Lambda(k, k_2, \dots, k_n; z)}{\prod_{j=2}^n (\omega_\Lambda(k_j) - z)} \right| &= \left(\prod_{j=2}^p \frac{((k - k_\Lambda^{\text{очн}})^2 - (k_j - k_\Lambda^{\text{очн}})^2)^2}{\omega_\Lambda(k_j) - z} \right) \left| \frac{\hat{T}_{n,p}(k, \bar{k}; z, \Lambda)}{\prod_{j=p+1}^n \omega_\Lambda(k_j) - z} \right| \\ &\leq \left(\prod_{j=2}^p \frac{(k - k_j)^2 (k + k_j - 2k_\Lambda^{\text{очн}})^2}{\omega_\Lambda(k_j) - \tau_\Lambda^{\min}} \right) \left| \frac{\tilde{A}(\tilde{C}\beta^2)^{n-1} n^{n/2}}{(\beta\rho)^{n-p-1}} \right|. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Покажем, что первый множитель в (3.20) может быть ограничен величиной $(\hat{D}/\beta)^{p-1}$, где $\hat{D} > 0$ — константа. Действительно, в силу (2.4) функция $\omega_\Lambda(k)$ в окрестности каустического значения параметра Λ допускает разложение

$$\omega_\Lambda(k) = C_0(\Lambda) + C_1(\Lambda)(\Lambda - \Lambda_i^{\text{кауст}})(k - k_\Lambda^{\text{очн}})^2 + C_2(k, \Lambda)(k - k_\Lambda^{\text{очн}})^4, \quad (3.21)$$

где $C_0(\Lambda) = \omega_\Lambda(k_\Lambda^{\text{очн}})$, $C_1(\Lambda) = \frac{1}{2}\omega_\Lambda''(k_\Lambda^{\text{очн}})/(\Lambda - \Lambda_i^{\text{кауст}})$, $C_2(k, \Lambda)$ — гладкая функция, причем $C_1(\Lambda) \neq 0$ в $V_{\delta,i}^{\text{кауст}}$ (см. (2.4)); при этом в некоторой окрестности $C_2(k, \Lambda) > 0$, $C_1(\Lambda) > 0$ в силу нашего соглашения, что при $\Lambda \geq \Lambda_i^{\text{кауст}}$ выполнено равенство $k_\Lambda^{\min} = k_\Lambda^{\text{очн}}$, т. е. минимум функции $\omega_\Lambda(k)$ достигается в одной точке $k_\Lambda^{\min} = k_\Lambda^{\text{очн}}$. В этом случае, учитывая неравенство $|k - k_\Lambda^{\min}| \leq |k_j - k_\Lambda^{\min}|$, получаем оценку

$$\left| \frac{((k - k_j)^2 (k + k_j - 2k_\Lambda^{\text{очн}}))^2}{\omega_\Lambda(k_j) - \tau_\Lambda^{\min}} \right| \leq 16 \left| \frac{(k_j - k_\Lambda^{\min})^4}{\omega_\Lambda(k_j) - \tau_\Lambda^{\min}} \right| \leq \frac{\hat{D}}{\beta},$$

где величина $\hat{D} > 0$ — константа, не зависящая от β . Как говорилось ранее, функция $\omega_\Lambda(k)$ при $\Lambda < \Lambda_i^{\text{кауст}}$ достигает минимального значения в двух невырожденных точках $(k_{\Lambda,1}^{\min}, k_{\Lambda,2}^{\min})$, симметричных относительно $k_\Lambda^{\text{очн}}$; поэтому можно представить функцию $\omega_\Lambda(k)$ в следующем виде:

$$\omega_\Lambda(k) = \tau_\Lambda^{\min} + \tilde{C}(k, \Lambda)(k - k_{\Lambda,1}^{\min})^2(k - k_{\Lambda,2}^{\min})^2,$$

где $\tilde{C}(k, \Lambda)$ — положительная гладкая функция, отделенная от нуля: $\tilde{C}(k, \Lambda) > \beta\bar{\rho}$, поскольку при $\Lambda = \Lambda_i^{\text{кауст}}$ ряд Тейлора функции $\omega_\Lambda(k)$ в точке $k = k_\Lambda^{\min}$ начинается с четвертого члена. Пусть $k_{\Lambda,1}^{\min} = k_\Lambda^{\min} \in [k_\Lambda^{\text{очн}}, k_\Lambda^{\text{очн}} + \pi]$. Используя соотношения $|k - k_\Lambda^{\min}| \leq |k_j - k_\Lambda^{\min}|$, $k_{\Lambda,2}^{\min} = k_\Lambda^{\text{очн}} - (k_{\Lambda,1}^{\min} - k_\Lambda^{\text{очн}}) = 2k_\Lambda^{\text{очн}} - k_{\Lambda,1}^{\min}$, мы получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{((k - k_j)^2 (k + k_j - 2k_\Lambda^{\text{очн}}))^2}{\omega_\Lambda(k_j) - \tau_\Lambda^{\min}} \right| &\leq \left| \frac{(k_j - k_{\Lambda,1}^{\min})^2 (k + k_j - 2k_\Lambda^{\text{очн}})^2}{\tilde{C}(k_j, \Lambda)(k_j - k_{\Lambda,1}^{\min})^2 (k_j - k_{\Lambda,2}^{\min})^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{(k + k_j - 2k_\Lambda^{\text{очн}})^2}{\tilde{C}(k_j, \Lambda)(k_j - k_{\Lambda,2}^{\min})^2} \right| = \left| \frac{(k + k_j - 2k_\Lambda^{\text{очн}})^2}{\tilde{C}(k_j, \Lambda)(k_j + k_{\Lambda,1}^{\min} - 2k_\Lambda^{\text{очн}})^2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\tilde{C}(k_j, \Lambda)} \left(1 + \frac{k - k_{\Lambda,1}^{\min}}{k_j + k_{\Lambda,1}^{\min} - 2k_\Lambda^{\text{очн}}} \right)^2 \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\tilde{C}(k_j, \Lambda)} \left(2 + \frac{2(k - k_{\Lambda,1}^{\min})^2}{(k_j + k_{\Lambda,1}^{\min} - 2k_\Lambda^{\text{очн}})^2} \right) \right| \leq \frac{\tilde{D}}{\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что первый множитель в (3.20) оценивается величиной $(\widehat{D}/\beta)^{p-1}$, где $\widehat{D}$ — константа, и мы можем сделать, вывод, что

$$\left| \frac{T_n^\Lambda(k, k_2, \dots, k_n; z)}{\prod_{j=2}^n (\omega_\Lambda(k_j) - z)} \right| \leq \widehat{A}^n n^{n/2} \beta^{n-1}, \quad (k, \bar{k}) \in K_n, \quad n \geq 2, \quad (3.22)$$

где $\widehat{A}$ — константа.

Равномерная сходимость ряда (3.13) следует из оценки $|K_n| \leq 1/(2^n n!)$. Оценка (3.15) выполняется, поскольку в силу неравенства (3.22) ей удовлетворяют все слагаемые ряда (3.13). Лемма 3.3 доказана. Утверждение 3 теоремы 2.1 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лакштанов Е. Л., Минлос Р. А. Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (уединенное связанное состояние). Функциональный анализ и его прил., **38**, вып. 3, 52–69 (2004).
2. Kudryavtseva E. A., Lakshatanov E. Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions. In: Topological Methods in Theory of Integrable Systems (A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov, eds.), Cambridge Scientific Publishers, 2005.
3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Наука, М., 1984.
4. Abdullaev J., Minlos R. A. An extension of the Ising Model. In: Probability Contributions to Statistical Mechanics, Adv. Sov. Math., Vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 1–20.
5. Лакштанов Е. Л. Старшие ветви спектра трансфер-матрицы для общих спиновых моделей с взаимодействием на один шаг. Вестник МГУ, сер. I, матем., мех., вып. 6, 3–7 (2004).
6. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. Гостехиздат, М., 1957.

Московский государственный университет,
email: alexenko@mcsme.ru

Институт проблем передачи информации РАН,
email: minl@iitp.ru

Поступило в редакцию
20 апреля 2004 г.