Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Слабые ККС и КАС и индуктивные пределы семейств групп и алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 75–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:56:46

ЗАМЕЧАНИЕ. Точный вектор d , соответствующий нетривиально оснащенному однопараметрическому множеству $\mathbf{P}$, является *особым* тогда и только тогда, когда множество $\mathbf{P}$ (рассматриваемое с точностью до антиизоморфизма) совпадает с одним из множеств M_{12} , M_{13} , L_{14} , L_{15} и $d = (d_0; d_a, d_b, d_x, d_y) = (2k + 1; k, k, 1, 1)$ при $\mathbf{P} = M_{12}$, $d = (d_0; d_a, d_b, d_p, d_q) = (2k + 2; k, k, 1, 1)$ при $\mathbf{P} = M_{13}$, $d = (d_0; d_a, d_u, d_v, d_x, d_y) = (2k + 1; k, k, k, 1, 1)$ при $\mathbf{P} = L_{14}$, $d = (d_0; d_a, d_u, d_v, d_p, d_q) = (4k + 2; 2k, 2k, 2k, 1, 1)$ при $\mathbf{P} = L_{15}$ ($k \geq 1$). При этом $f(d) = 2$ в случае $\mathbf{P} = M_{12}$, L_{14} и $f(d) = 4$ в случае $\mathbf{P} = M_{13}$, L_{15} (об особых векторах обычных однопараметрических множеств см., например, [11]).

В ходе работы получен также полный список неразложимых представлений всех перечисленных множеств (и им антиизоморфных) в матричной форме.

Доказательство основано на разработке и применении алгоритмов дифференцирования оснащенных множеств (развивающих алгоритмы, описанные в [1, 11]), использовании результатов работы [12] и непосредственных вычислениях.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **28**, 5–31 (1972).
2. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Препринт 73.9 ИМ АН УССР (1973).
3. Gabriel P., Roiter A. V. Representations of finite-dimensional algebras. Algebra VIII, Encycl. Math. Sci., vol. 73, Springer-Verlag, 1992.
4. Dlab V., Ringel C. M. Indecomposable representations of graphs and algebras. Mem. Amer. Math. Soc., **6**, No. 173 (1976).
5. Ройтер А. В. Труды МИАН, **148**, 201–210 (1978).
6. Клейнер М. М. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **28**, 32–41 (1972).
7. Клейнер М. М. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **28**, 42–59 (1972).
8. Отрашевская В. В. Укр. матем. ж., **28**, № 3, 334–341 (1976).
9. Отрашевская В. В. В сб.: Матричные задачи, Киев, 1977, с. 144–149.
10. Klemp B., Simson D. J. Algebra, **134**, No. 2, 390–468 (1990).
11. Завадский А. Г. Изв. АН СССР, сер. матем., **55**, № 5, 1007–1048 (1991).
12. Dlab V., Ringel C. M. Linear Algebra Appl., **17**, 107–124 (1977).

Киевский национальный университет
строительства и архитектуры

Поступило в редакцию
30 декабря 1997 г.

УДК 515.16+517.9

Слабые ККС и КАС и индуктивные пределы семейств групп и алгебр*

© 2000. Р. С. ИСМАГИЛОВ

1. Еще о канонических коммутационных и антикоммутационных соотношениях (кратко ККС и КАС). Пусть V — вещественное линейное пространство и τ — невырожденная кососимметрическая форма на V . Тогда ККС — это семейство унитарных операторов $\{U(x), x \in V\}$ (действующих в некотором гильбертовом пространстве), таких, что

$$U(x + y) = \exp(i\tau(x, y))U(x)U(y) \quad (x, y \in V) \quad (1)$$

*Исследование поддержано РФФИ, грант № 96-15-96249.

и отображение $s \mapsto U(sx)U(sy)$, $s \in \mathbb{R}$, слабо непрерывно.

Разумеется, из (1) вытекает равенство

$$U(x+y) = U(x)U(y) \quad \text{при } x \perp y \quad (2)$$

(здесь $x \perp y$ означает, что $\tau(x, y) = 0$). Верно ли обратное? Точнее, пусть $\{U(x), x \in V\}$ — неприводимое семейство унитарных операторов, удовлетворяющее условию (2) и упомянутому условию непрерывности; в этом случае скажем, что даны *слабые* ККС. Выполняется ли тогда соотношение (1) (разумеется, с возможной заменой формы τ на $\lambda\tau$, $\lambda \in \mathbb{R}$)?

Аналогично, определим слабые ККС в инфинитезимальной форме как семейство симметрических операторов $\{A(x), x \in V\}$, действующих в плотном линейном подмножестве гильбертова пространства, таких, что

$$\text{если } x \perp y, \text{ то } [A(x), A(y)] = 0, A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

(Подчеркнем, что линейность отображения $x \mapsto A(x)$ не требуется!) Наложим еще условие операторной неприводимости: любой оператор, представимый в виде многочлена степени ≤ 2 от операторов $\{A(x)\}$ и перестановочный с ними, скалярен. Вытекают ли отсюда линейность отображения $x \mapsto A(x)$, $x \in V$, и обычные коммутационные соотношения $[A(x), A(y)] = i\lambda\tau(x, y)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$?

Обратимся к КАС. Пусть W — комплексное линейное пространство с инволюцией $x \mapsto \bar{x}$ и невырожденной симметрической формой θ , причем $\theta(x, \bar{x}) > 0$ при $x \neq 0$ (иногда мы пишем $x \perp y$ вместо $\theta(x, y) = 0$). Определим слабые КАС как семейство ограниченных операторов $\{C(x), x \in W, x \perp x\}$, таких, что $(C(x))^* = C(\bar{x})$ и

$$\begin{aligned} &\text{если } x \perp y, x \perp x, y \perp y, \\ &\text{то } \{C(x), C(y)\} = 0, C(\alpha x + \beta y) = \alpha C(x) + \beta C(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Пусть семейство $\{C(x)\}$ неприводимо. Можно ли продолжить семейство $\{C(x)\}$ до $\mathbb{C}$ -линейного отображения $x \mapsto C^0(x)$ в пространство ограниченных линейных операторов, такого, что выполняются обычные КАС $\{C^0(x), C^0(y)\} = \lambda\theta(x, y)$ для всех $x \in W, y \in W$ (и некоторого $\lambda \geq 0$, не зависящего от x, y)?

Мы увидим, что во всех трех случаях ответ на вопрос утвердителен. Этот результат получится из «вычисления» некоторых индуктивных пределов семейств групп и алгебр. Затем мы кратко остановимся на примерах индуктивных пределов, не связанных с ККС и КАС.

2. Индуктивные пределы. Мы воспроизведем определение из [1]. Пусть $\{G_\alpha\}$ — набор групп и для любых α, β дан набор (возможно, пустой) гомоморфизмов $\varphi_{\alpha\beta}: G_\alpha \rightarrow G_\beta$. Индуктивный предел семейства $\{G_\alpha\}$ состоит из группы Γ^0 и набора гомоморфизмов $f_\alpha^0: G_\alpha \rightarrow \Gamma^0$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f_\alpha^0 = f_\beta^0 \circ \varphi_{\alpha\beta}$, если только определен $\varphi_{\alpha\beta}$; 2) множество $\bigcup_\alpha f_\alpha^0(G_\alpha)$ порождает группу Γ^0 ; 3) для любых Γ и $\{f_\alpha\}$, удовлетворяющих двум предыдущим условиям, существует такой гомоморфизм $p: \Gamma^0 \rightarrow \Gamma$, что $f_\alpha = p \circ f_\alpha^0$ для всех α .

Отметим важный частный случай: $\{G_\alpha\}$ — семейство подгрупп данной группы G , замкнутое относительно пересечений и порождающее группу G , и $\varphi_{\alpha\beta}: G_\alpha \rightarrow G_\beta$ — включение ($\varphi_{\alpha\beta}$ определено только при $G_\alpha \subset G_\beta$). В этом

случае набор гомоморфизмов, упомянутый выше, отождествляется с отображением $f: \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \rightarrow \Gamma$, ограничение которого на каждую группу G_{α} есть гомоморфизм.

Для алгебр (в частности, алгебр Ли) индуктивный предел определяется аналогично.

Перейдем к примерам.

3. Группа Гейзенберга как индуктивный предел абелевых групп; алгебра Гейзенберга. Пусть V — линейное пространство над полем K , $\text{char } K \neq 2$, а τ — невырожденная кососимметрическая форма на V . Группа Гейзенберга H — это множество $V \times K$ с операцией $(v_1, k_1) \cdot (v_2, k_2) = (v_1 + v_2, k_1 + k_2 + \tau(v_1, v_2))$, а алгебра Гейзенберга — то же множество со скобкой Ли $[(v_1, k_1), (v_2, k_2)] = (0, \tau(v_1, v_2))$. Через $\text{Is}(V, \tau)$ обозначим совокупность всех изотропных линейных подпространств (т. е. подпространств, на которых форма τ тождественно равна нулю). В приведенной ниже теореме 1 мы рассматриваем $\text{Is}(V, \tau)$ как семейство абелевых (операция — сложение векторов), а в теореме 2 — как семейство абелевых алгебр Ли. Предполагается, что $\dim V \geq 4$.

ТЕОРЕМА 1. *Индуктивный предел семейства групп $\text{Is}(V, \tau)$ — это группа Гейзенберга H (с гомоморфизмами $x \mapsto (x, 0)$, $x \in L$, $L \in \text{Is}(V, \tau)$).*

ТЕОРЕМА 2. *Индуктивный предел семейства алгебр Ли $\text{Is}(V, \tau)$ — это алгебра Гейзенберга H (с теми же гомоморфизмами $x \mapsto (x, 0)$, $x \in L$, $L \in \text{Is}(V, \tau)$).*

4. Индуктивный предел грассмановых подалгебр алгебры Клиффорда. Пусть W — линейное пространство над алгебраически замкнутым полем K , $\text{char } K \neq 2$, θ — невырожденная симметрическая форма на W и $C(W)$ — соответствующая клиффордова алгебра. Любое изотропное подпространство X порождает грассманову подалгебру $G(X)$. Требуется найти индуктивный предел семейства $\{G(X)\}$ (гомоморфизм $G(X) \rightarrow G(Y)$ определен при $X \subset Y$).

Для этого обозначим через $C(W, T)$ ассоциативную алгебру с единицей, порожденную пространством W , переменной T и соотношениями $xy + yx = \theta(x, y)T$, $xT = Tx$. Для любого изотропного пространства $X \subset W$ тождественное вложение $X \rightarrow C(W, T)$ продолжается до гомоморфизма алгебр. Предполагается, что $\dim W \geq 4$.

ТЕОРЕМА 3. *Индуктивный предел семейства грассмановых алгебр $\{G(X)\}$ (X изотропно) есть алгебра $C(W, T)$ (с указанными гомоморфизмами $G(X) \rightarrow C(W, T)$).*

5. Равносильность слабых и обычных ККС и КАС. Вернемся к соотношениям (2) из разд. 1. Они задают отображение из V в группу унитарных операторов, которое является гомоморфизмом на любом изотропном подпространстве из V , понимаемом как абелева группа. По определению индуктивного предела и теореме 1 существует такое унитарное представление группы Гейзенберга $x \mapsto U^0(x, 0)$, что $U^0(x, 0) = U(x)$, $x \in V$. Из условий неприводимости и непрерывности следует, что $U^0(0, k) = \exp(i\lambda k)$, $k \in \mathbb{R}$, для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем обычные ККС для $\{U(x)\}$.

Аналогично доказывается равносильность слабых и обычных соотношений в остальных случаях.

6. Другие примеры вычисления индуктивных пределов. Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная простая алгебра Ли, $\text{Ab}(\mathfrak{g})$ — семейство ее абелевых подалгебр (гомоморфизмы — это включения). Требуется найти индуктивный предел семейства $\text{Ab}(\mathfrak{g})$. Чтобы избежать патологических явлений, здесь следует внести в определение индуктивного предела естественные топологические ограничения. В случае $\mathfrak{g} = \text{su}(n)$, $n \geq 3$, искомым индуктивным пределом — это алгебра Ли многочленов $x_1 T + \dots + x_r T^r$, $x_i \in \mathfrak{g}$, с вложениями $x \mapsto xT$, $x \in L$, $L \in \text{Ab}(\mathfrak{g})$.

В работах [2, 3] рассмотрены индуктивные пределы групп диффеоморфизмов и алгебр Ли векторных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Серр Ж. П. Математика (сб. переводов), **18**, № 1, 3–51 (1974).
2. Исмагилов Р. С. Изв. АН СССР, сер. матем., **44**, № 4, 831–867 (1980).
3. Исмагилов Р. С. Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 1, 66–68 (1992).

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступило в редакцию
30 апреля 1998 г.

УДК 517.9

О задаче подобия для несамосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром*

© 2000. А. В. КИСЕЛЕВ, М. М. ФАДДЕЕВ

Оператор L , действующий в гильбертовом пространстве H , подобен самосопряженному, если существуют такие самосопряженный оператор A и ограниченный ограниченно обратимый оператор X в H , что $L = X^{-1}AX$. При условии вещественности спектра оператора L для подобия оператора L самосопряженному необходимо и достаточно [1, 2], чтобы

$$\sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon \int \|(L - k - i\varepsilon)^{-1}u\|^2 dk \leq C\|u\|^2 \quad (1)$$

и оценка (1) выполнялась также с заменой оператора L на L^* . Данные оценки могут быть выписаны [3] в терминах функциональной модели оператора, однако их вид становится чрезвычайно громоздким. Мы можем привести их к значительно более простой форме, если на исследуемый оператор налагается дополнительное условие абсолютной непрерывности его спектра. В этом случае оказывается возможным привести указанные оценки к паре эквивалентных оценок уже для граничных значений резольвенты исследуемого оператора на вещественной оси, фактически реализовав в (1) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, что, вообще говоря, затруднительно без предположения об абсолютной непрерывности спектра оператора.

Опишем вкратце функциональную модель исследуемого оператора в форме Б. С. Павлова (см. [4, 5, 6]). Рассмотрим наряду с оператором $L = A + iV \equiv A + i\alpha J\alpha/2$, где $A = A^*$, $\alpha = \alpha^* \geq 0$, оператор V является (A) -ограниченным

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-01149) и INTAS (грант 95-0414).