Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Гейнц, В. В. Филиппов, О выпуклых оболочках компактных множеств вероятностных мер со счетными носителями, *Функци. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 1, 83–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3000>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:56:34

Банахово пространство X имеет *котип* $q \geq 2$, если существует константа $K > 0$, такая, что для произвольных векторов $x_1, \dots, x_n$ из X

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q \right)^{1/q} \leq K \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt.$$

Последнее определение будет иметь смысл и для $q = \infty$, если в левой части неравенства будет стоять $\max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$. Говорят, что пространство X имеет *тривиальный тип* (*тривиальный котип*), если оно не имеет типа, большего 1 (соответственно конечного коти́па).

Как уже говорилось, пространство $\text{Ces}_p(I)$ содержит копию пространства L^1 . Поэтому из теорем 4 и 6 вытекает следующий результат.

Следствие 2. *Если $1 < p < \infty$, то пространство $\text{Ces}_p(I)$ имеет тривиальный тип и котип $\max(p, 2)$. Пространство $\text{Ces}_\infty(I)$ имеет тривиальный тип и тривиальный котип.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. A. Jagers, Nieuw Arch. Wiskund. (3), **22** (1974), 113–124. [2] Б. И. Коренблюм, С. Г. Крейн, В. Я. Левин, Докл. АН СССР (н.с.), **62** (1948), 17–20. [3] W. Wnuk, *Banach Lattices with Order Continuous Norms*, Polish Scientific Publishers PWN, Warsaw, 1999. [4] J.-S. Shiue, Tamkang J. Math., **1** (1970), 91–95. [5] B. D. Hassard, D. A. Hussein, Tamkang J. Math., **4** (1973), 19–25. [6] P. W. Sy, W. Y. Zhang, P. Y. Lee, Glas. Mat. Ser. III, **22**:1 (1987), 103–112. [7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977. [8] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978. [9] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, II. *Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979. [10] G. Bennett, *Factorizing the Classical Inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 120, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996. [11] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, Math. Ann., **162** (1965/1966), 337–350. [12] K. Tandori, Publ. Math. Debrecen., **3** (1954), 263–268. [13] S. V. Astashkin, L. Maligranda, Proc. Amer. Math. Soc., **136**:12 (2008), 4289–4294. [14] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Math., vol. 233, Springer-Verlag, New York, 2006. [15] М. И. Kadec, A. Pełczyński, Studia Math., **21** (1962), 161–176.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Технологический университет Лулео, Швеция
e-mail: lech@sm.luth.se

Поступило в редакцию
6 марта 2009 г.

УДК 515.12

О выпуклых оболочках компактных множеств вероятностных мер со счетными носителями

© 2011. В. Л. Гейнц, В. В. Филиппов

В [1] Э. Майкл доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема 1. *Пусть $F: X \rightarrow L$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение паракомпакта X в банахово пространство L , значения которого яв-*

ляются (непустыми) выпуклыми замкнутыми множествами. Тогда оно обладает непрерывной селекцией.

В [2] сформулирован следующий вопрос. Пусть Y — выпуклое G_δ -подмножество банахова пространства L . Будет ли всякое полунепрерывное снизу многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ паракомпакта X с выпуклыми замкнутыми в Y значениями обладать непрерывной селекцией?

В [3], [4] построением соответствующего примера был дан отрицательный ответ на этот вопрос.

В [5] доказана следующая теорема.

Пусть Y — выпуклое G_δ -подмножество банахова пространства E , удовлетворяющее условию (М): если $K \subset Y$ — компакт, то его замкнутая (в Y) выпуклая оболочка — тоже компакт. Тогда всякое полунепрерывное снизу многозначное отображение паракомпакта X в Y с выпуклыми замкнутыми в Y значениями обладает непрерывной селекцией.

При обсуждении результатов работ [3]–[5] Майкл сформулировал вопрос: существенно ли в предположении теоремы условие, что Y есть G_δ -подмножество?

В этой заметке мы дадим положительный ответ на последний вопрос. Построение соответствующего примера будет опираться на исследование топологических свойств выпуклых оболочек некоторых компактных множеств вероятностных мер на отрезке.

1. Пространство P_A . Под пространством мер на отрезке $[0, 1]$ мы будем понимать $C'[0, 1]$ — сопряженное к пространству непрерывных на отрезке $[0, 1]$ действительных функций; всюду далее $C'[0, 1]$ рассматриваем с $*$ -слабой топологией. Мера μ называется вероятностной, если $\mu(\varphi) \geq 0$ для любой функции $\varphi \in C[0, 1]$, $0 \leq \varphi$, и $\mu(1) = 1$. Обозначим через P пространство вероятностных мер (с индуцированной из $C'[0, 1]$ топологией). Существует вложение пространства P в гильбертов куб с сохранением выпуклой структуры; см., например, [3], [4]. Поэтому P можно рассматривать как выпуклое подмножество гильбертова пространства l_2 (над $\mathbb{R}$).

Пусть $\mu \in P$ и $x \in [0, 1]$. Введем число $\tilde{\mu}_x = \inf\{\mu(\varphi) \mid \varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \varphi \in C[0, 1], \varphi(x) = 1\}$ (мера точки x относительно μ). Положим $S_\mu := \{x \mid x \in [0, 1], \tilde{\mu}_x > 0\}$. Следующие два утверждения очевидны.

Лемма 1. Для любой меры $\mu \in P$ множество S_μ не более чем счетно.

Лемма 2. Для любой меры $\mu \in P$ выполняется неравенство $\sum_{x \in S_\mu} \tilde{\mu}_x \leq 1$.

Пусть δ_x — мера, сосредоточенная в точке x , т.е. $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ для всякой $\varphi \in C[0, 1]$. Пусть также $A = \{x_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ — счетное подмножество отрезка $[0, 1]$ (если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j$). Положим $P_A = \{\sum_{x \in A} \lambda_x \delta_x \mid \lambda_x \geq 0, \sum_{x \in A} \lambda_x = 1\}$.

Ясно, что $P_A \subseteq P$ и множество P_A выпукло.

Лемма 3. Во введенных выше обозначениях вероятностная мера μ принадлежит множеству P_A тогда и только тогда, когда $S_\mu \subseteq A$ и $\sum_{x \in S_\mu} \tilde{\mu}_x = 1$.

Доказательство. I. Пусть $\mu \in P_A$, $\mu = \sum_{x \in A} \lambda_x \delta_x$. Тогда если $x \in [0, 1] \setminus A$, то $\tilde{\mu}(x) = 0$. Поэтому $S_\mu \subseteq A$. Если же $x \in S_\mu$, то $\tilde{\mu}(x) = \lambda_x$, так что $\sum_{x \in S_\mu} \tilde{\mu}_x = 1$.

II. Обратно, пусть $S_\mu \subseteq A$ и $\sum_{x \in S_\mu} \tilde{\mu}_x = 1$. Мера $\nu = \sum_{x \in S_\mu} \tilde{\mu}_x \delta_x$ принадлежит P_A . Наша цель — доказать, что $\mu = \nu$. Занумеруем точки, принадлежащие

S_μ : $S_\mu = \{x_i : i = 1, 2, \dots\}$. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — непрерывная функция. Докажем, что $|\mu(f) - \nu(f)| \leq \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$.

Возьмем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\tilde{\mu}_{x_{N+1}} + \tilde{\mu}_{x_{N+2}} + \dots < \varepsilon/9$. Найдутся непересекающиеся интервалы $Ox_i \ni x_i$, $i = 1, \dots, N$, и непрерывные функции $\varphi_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, такие, что $\text{supp}(\varphi_i) \subset Ox_i$, $\tilde{\mu}_{x_i} \leq \mu(\varphi_i)$, $\nu(\varphi_i) \leq \tilde{\mu}_{x_i} + \varepsilon/(9N)$, а при $t \in Ox_i$ имеют место неравенства $f(x_i) - \varepsilon/(9N) \leq f(t) \leq f(x_i) + \varepsilon/(9N)$.

Пусть $\Phi = \varphi_1 + \dots + \varphi_N$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{x_1} + \dots + \tilde{\mu}_{x_N} &\leq \mu(\Phi), \nu(\Phi) \leq \tilde{\mu}_{x_1} + \dots + \tilde{\mu}_{x_N} + \varepsilon/9, \\ 1 - \tilde{\mu}_{x_1} - \dots - \tilde{\mu}_{x_N} - \varepsilon/9 &\leq \mu(1 - \Phi), \nu(1 - \Phi) \leq 1 - \tilde{\mu}_{x_1} - \dots - \tilde{\mu}_{x_N}. \end{aligned}$$

При любом $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{x_i} f(x_i) - \frac{\varepsilon}{9N} &\leq \tilde{\mu}_{x_i} \left(f(x_i) - \frac{\varepsilon}{9N} \right) \leq \mu(f\varphi_i), \nu(f\varphi_i) \\ &\leq \left(\tilde{\mu}_{x_i} + \frac{\varepsilon}{9N} \right) \left(f(x_i) + \frac{\varepsilon}{9N} \right) \leq \tilde{\mu}_{x_i} f(x_i) + \frac{\varepsilon}{3N}; \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{x_1} f(x_1) + \dots + \tilde{\mu}_{x_N} f(x_N) - \frac{\varepsilon}{9} &\leq \mu(f\Phi), \nu(f\Phi) \\ &\leq \tilde{\mu}_{x_1} f(x_1) + \dots + \tilde{\mu}_{x_N} f(x_N) + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

и

$$|\mu(f\Phi) - \nu(f\Phi)| \leq \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{4\varepsilon}{9} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mu(f - f\Phi) &\leq \mu(1 - \Phi) \leq 1 - \tilde{\mu}_{x_1} - \dots - \tilde{\mu}_{x_N} = \tilde{\mu}_{x_{N+1}} + \tilde{\mu}_{x_{N+2}} + \dots < \varepsilon/9, \\ \nu(f - f\Phi) &\leq \nu(1 - \Phi) \leq 1 - \tilde{\mu}_{x_1} - \dots - \tilde{\mu}_{x_N} = \tilde{\mu}_{x_{N+1}} + \tilde{\mu}_{x_{N+2}} + \dots < \varepsilon/9. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \nu(f)| &= |\mu(f\Phi) - \nu(f\Phi) + \mu(f - f\Phi) - \nu(f - f\Phi)| \\ &\leq |\mu(f\Phi) - \nu(f\Phi)| + |\mu(f - f\Phi)| + |\nu(f - f\Phi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} < \varepsilon, \end{aligned}$$

что и дает требуемое.

III. Случай произвольной непрерывной функции f сводится к случаю II. В самом деле, пусть $|f| \leq M$, $M > 0$. Функция $f_1 = 1/2 + f/(2M)$ удовлетворяет условию из II. Поэтому $1/2 + \mu(f)/(2M) = \mu(f_1) = \nu(f_1) = 1/2 + \nu(f)/(2M)$, откуда и следует, что $\mu = \nu$. Лемма доказана. $\square$

Напомним, что P мы рассматриваем с топологией τ , индуцированной $*$ -слабой топологией в $C'[0, 1]$. Поскольку P с помощью некоторого топологически инъективного отображения, сохраняющего выпуклую структуру, отождествляется с выпуклым компактным подмножеством пространства l_2 , то условие (M) для выпуклого подмножества P_A гильбертова пространства l_2 можно сформулировать так: если множество $K \subseteq P_A$ τ -компактно, то и его τ -замкнутая (в P_A) выпуклая оболочка τ -компактна.

Теорема 2. Множество P_A удовлетворяет условию (M).

Доказательство. Установим следующий чуть более сильный факт. Пусть во введенных выше обозначениях $K \subseteq P_A$, K — компакт. Тогда замкнутая выпуклая оболочка $cc(K) = cc_P(K)$ компакта K в пространстве P (компактна и) лежит в P_A .

Предположим противное: пусть существует мера $m \in cc(K) \setminus P_A$. Пусть $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Тогда, согласно лемме 3, $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{m}_{x_i} = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Выберем такие непрерывные $f_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, что $m(f_i) < \tilde{m}_{x_i} + \varepsilon/(2 \cdot 2^i)$, $f_i(x_i) = 1$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} m(f_i) < 1 - \varepsilon/2$. Положим $F_i = \max\{f_1, \dots, f_i\}$ для $i \in \mathbb{N}$. Мы имеем неубывающую последовательность функций F_n , причем $m(F_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(f_i) < 1 - \varepsilon/2$.

Рассмотрим теперь последовательность окрестностей $O_i(m) = \{\mu \in P : \mu(F_i) < 1 - \varepsilon/2\}$ меры m . Поскольку $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает, то $\{O_i(m)\}_{i=1}^{\infty}$ не возрастает. Предположим, что $O_i(m) \cap K = \emptyset$. Тогда $K \subseteq P \setminus O_i(m)$, но $O_i(m)$ и ее дополнение — множества выпуклые; следовательно, поскольку $O_i(m)$ открыто, $cc(K) \subseteq P \setminus O_i(m)$, что невозможно, так как $m \in cc(K) \cap O_i(m)$. Значит, $O_i(m) \cap K \neq \emptyset$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Имеем невозрастающую последовательность компактов $K \cap [O_i(m)] \neq \emptyset$. Ее пересечение K_0 непусто. Пусть $\eta \in K_0$. Тогда $\eta \in [O_k(m)]$ для $k = 1, 2, \dots$; поэтому $\eta(F_k) \leq 1 - \varepsilon/2$ и $\sum_{i=1}^k \tilde{\eta}_{x_i} \leq \eta(F_k) \leq 1 - \varepsilon/2$. Переходя к пределу, получаем $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\eta}_{x_i} \leq 1 - \varepsilon/2 < 1$, а значит, $\eta \notin P_A$. Полученное противоречие и компактность пространства P завершают доказательство утверждения. $\square$

2. Первый пример. Пусть $M_1 = \{x_i : i = 1, 2, \dots\}$ — множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$, $M_2 = [0, 1] \setminus M_1$, $M_3 = \{y_i : y_i = x_i\sqrt{3}, x_i\sqrt{3} \in (0, 1), i = 1, 2, \dots\}$ (если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j$ и $y_i \neq y_j$).

Обозначим через Y подмножество $(M_1 \times P_{M_1}) \cup (M_2 \times P_{M_3})$ произведения $[0, 1] \times P$. Многозначное отображение $G: [0, 1] \rightarrow P$ определим так:

$$G(x) = \begin{cases} P_{M_1} & \text{для } x \in M_1, \\ P_{M_3} & \text{для } x \in M_2. \end{cases}$$

Многозначное отображение F отрезка $[0, 1]$ в Y зададим как диагональное произведение (см. [7]) тождественного отображения $J: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ и отображения G , т. е. $F(x) = \{x\} \times G(x)$. Нетрудно проверить, что для полунепрерывности снизу диагонального произведения многозначных отображений χ и ψ пространства X в пространства Y и Z соответственно достаточно полунепрерывности снизу отображений χ и ψ .

Утверждение 1. *Отображение F полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Из плотности множеств M_1 и M_3 в $[0, 1]$, плотности множества конечных выпуклых комбинаций мер Дирака в P и непрерывности отображения $x \mapsto \delta_x$ следует, что P_{M_1} и P_{M_3} плотны в P . Отсюда вытекает полунепрерывность снизу отображения G . Кроме того, J непрерывно, а следовательно, F полунепрерывно снизу. $\square$

Утверждение 2. *Отображение F не допускает непрерывной селекции.*

Доказательство будет напоминать соответствующее рассуждение в статье [1]. Предположим противное. Тогда у отображения G существует непрерывная

однозначная селекция $f: [0, 1] \rightarrow P$. Найдется последовательность непрерывных на $[0, 1]$ функций φ_i , такая, что $\varphi_i(x_k) = 0$ при $k \leq i$ и $\varphi_i(y_k) = 1$ при $k \leq i$. Ввиду непрерывности селекции f для каждого x_k найдется окрестность U_k , такая, что для любых двух точек $s_1, s_2 \in U_k$ выполнено неравенство

$$|f(s_1)(\varphi_k) - f(s_2)(\varphi_k)| < 1/2. \quad (*)$$

Положим $I_0 = [0, 1]$. Выберем произвольную рациональную точку x_{n_1} внутри I_0 , затем в ее окрестности $U_{n_1} \cap \text{int}(I_0)$ выберем отрезок I_1 длины $d_1 < 1/2$, содержащий внутри себя x_{n_1} и не содержащий x_m при $m < n_1$. Затем внутри I_1 выберем x_{n_2} , $n_2 > n_1$, и отрезок I_2 длины $d_2 < 1/4$, причем $I_2 \subset U_{n_2} \cap \text{int}(I_1)$, $x_{n_2} \in \text{int}(I_2)$, $x_m \notin I_2$ при $m < n_2$, и т.д. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{t\}$, $t \in M_2$. Значит, $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \delta_{y_i}$. Существует $k \in \mathbb{N}$, такое, что $t \in U_k$ и $\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i < 1/4$. Тогда $f(t)(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_k(y_i) > (1 - 1/4)$, а $f(x_k)(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_k(x_i) < 1/4$. Разность между $f(t)(\varphi_k)$ и $f(x_k)(\varphi_k)$ оказалась больше $1/2$, что противоречит условию (*). Утверждение доказано. $\square$

3. Второй пример. В примере разд. 2 условию (М) удовлетворяют образы точек, но пространство Y в целом этому условию не удовлетворяет, поскольку Y не выпукло. В этом разделе мы немного усложним построение и добьемся выполнения условия (М) для пространства Y' в целом. Фактически мы вложим построенный в разд. 2 пример в пространство, удовлетворяющее этому условию.

Сохраним введенные ранее обозначения. Пусть $D = \{(\xi, \eta) \mid \xi^2 + \eta^2 \leq 1\}$, $S = \{(\xi, \eta) \mid \xi^2 + \eta^2 = 1\}$, $\alpha(x) = (\cos x, \sin x)$, $M'_1 = \{\alpha(x) \mid x \in M_1\}$, $M'_2 = \{\alpha(x) \mid x \in M_2\}$. Положим $Y' = ((D \setminus S) \times P) \cup (M'_1 \times P_{M_1}) \cup (M'_2 \times P_{M_3}) \subset D \times P$. Множество Y' рассматриваем как подмножество банахова пространства $E' = \mathbb{R}^2 \times l_2$. Оно выпукло ввиду строгой выпуклости D . Мнозначное отображение $F': [0, 1] \rightarrow Y'$ зададим так: $F'(x) = \{\alpha(x)\} \times G(x)$.

Лемма 5. Если A и B — выпуклые компакты в банаховом пространстве E , то $cc(A \cup B) = \bigcup \{[x, y] \mid x \in A, y \in B\}$.

Доказательство. Множество $\bigcup \{[x, y] \mid x \in A, y \in B\}$ — это образ компакта $A \times B \times [0, 1]$ при непрерывном отображении $H: (a, b, t) \mapsto ta + (1 - t)b$; поэтому оно компактно. Его выпуклость очевидна. $\square$

Утверждение 1. Множество Y' удовлетворяет условию (М).

Доказательство. Предположим, что K — компактное подмножество множества Y' . Требуется доказать, что его замкнутая выпуклая оболочка в Y' — компакт. Вместо $cc_{D \times P}(K)$ пишем для краткости $cc(K)$. Ясно, что $cc(K)$ — компакт.

Наша цель будет достигнута, если мы покажем, что $cc(K) \subseteq Y'$. Допустим противное. Тогда найдется точка $p = (p_1, p_2) \in cc(K) \setminus Y'$, причем $p_1 \in S$.

Пусть $Q = \{q \mid (p_1, q) \in K\}$. Если $p_2 \in cc_P(Q)$, то по теореме 2 $(p_1, p_2) \in Y'$, поскольку Q — компактное подмножество в P_{M_1} или в P_{M_2} . Предположим теперь, что $p_2 \notin cc_P(Q)$. По теореме Хана–Банаха (см. [6]) существует непрерывный линейный функционал f на пространстве l_2 и число c , такие, что $\sup\{f(x) \mid x \in cc_P(Q)\} < c < f(p_2)$.

Пусть $K_1 = \{(s, t) \in K \mid f(t) \geq c\}$ и $K_2 = \{(s, t) \in K \mid f(t) \leq c\}$. Тогда K_1 — компакт, проекция $\tilde{K}_1$ которого на D не содержит p_1 . Но тогда, поскольку $p_1 \in S$, число $c_1 = \sup\{(s, p_1) \mid s \in \tilde{K}_1\}$ (где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение)

строго меньше 1. Множество $\bar{K}_1 = \{(s, t) \mid s \in D, t \in P, (p_1, s) \leq c_1\}$ выпукло, компактно и содержит K_1 ; поэтому $cc(K_1) \subseteq \bar{K}_1$.

Так как $p \in cc(K)$ и $K = K_1 \cup K_2$, а $cc(K_1)$ и $cc(K_2)$ — выпуклые компакты в $D \times P$, то точка p лежит на отрезке, соединяющем какие-то две точки $x \in cc(K_1)$ и $y \in cc(K_2)$. При этом $p \neq x$ и $p \neq y$, поскольку $c < f(p_2)$. Но это возможно, только если $p_1 \in D \setminus S$. Противоречие. $\square$

Из непрерывности отображения $x \mapsto \alpha(x)$ и утверждений примера 1 вытекают следующие факты.

Утверждение 2. *Отображение F' полунепрерывно снизу.*

Утверждение 3. *Отображение F' не имеет непрерывной селекции.*

Из теоремы Майкла и Намиоки и построенного примера следует, что Y' не является G_δ -подмножеством банахова пространства $\mathbb{R}^2 \times l_2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е. А. Michael, Ann. of Math., **63** (1956), 361–382. [2] Е. А. Michael, in: Open Problems in Topology, North Holland, Amsterdam, 1990, 271–278. [3] V. V. Filippov, Comment. Math. Univ. Carolinae, **45**:4 (2004), 735–737. [4] В. В. Филиппов, Матем. заметки, **78**:4 (2005), 638–640. [5] I. Namioka, E. A. Michael, Topology Appl., **155**:8 (2008), 858–860. [6] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975. [7] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Изд-во МГУ, М., 1988.

Московский государственный университет
e-mail: mir14mai@inbox.ru

Поступило в редакцию
31 июля 2009 г.

Московский государственный университет
e-mail: vvfil@mech.math.msu.su

УДК 517.588+512.548.2

Функция Мёбиуса на абелевых полугруппах

© 2011. Е. А. Горин

1. Формулы обращения были открыты Мёбиусом в 30-е годы XIX века. Частные случаи встречаются у Гаусса, однако в общем объеме Гаусс их, вероятно, не знал, иначе Мёбиус, который учился у Гаусса (наблюдательной астрономии), не мог на него не сослаться. В середине века они были переоткрыты, в частности, П. Л. Чебышёвым и Б. Риманом (оба ни на кого не ссылаются).

В XX веке были обнаружены многочисленные обобщения, среди которых одним из наиболее удачных является найденное Ротой, который широко применял полученные им формулы к проблемам комбинаторики и геометрии. Теория Роты кратко описана в [1]. В этой теории исходным объектом служит локально конечное частично упорядоченное множество X . Роль ζ -функции играет такая матрица ρ , что $\rho(x, y)$ равно 1 при $x \leq y$ и 0 в остальных случаях. Обратная к ней матрица играет роль функции Мёбиуса. Когда в качестве X берется натуральный ряд с порядком $a|b$ (делимость нацело), формулы Роты согласуются