Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Юн Цзяо, Тао Ма, Пэйдэ Лю, О вложениях пространств Лоренца векторнозначных мартингалов, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 92–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3001>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:07:25

О вложениях пространств Лоренца векторнозначных мартингалов*

© 2010. Юн Цзяо, Тао Ма, Пэйдэ Лю

1. Введение. Известно, что справедливость классических (скалярных) результатов для случая функций или мартингалов со значениями в банаховом пространстве зависит от геометрических свойств этого пространства. Как правило, речь идет о равномерной выпуклости или гладкости. Например, замечательный результат Пизье [7] состоит в следующем. Пусть $1 < q < \infty$. Тогда банахово пространство X имеет эквивалентную q -равномерно выпуклую норму в том и только том случае, когда для некоторого (или, эквивалентно, для каждого) p , $1 < p < \infty$, существует положительная постоянная C , такая, что

$$\left\| \left(\|f_1\|^q + \sum_{n \geq 2} \|f_n - f_{n-1}\|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq C \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p \quad (1)$$

для всех L_p -мартингалов f со значениями в пространстве X . Справедливость же обратного неравенства позволяет утверждать, что на X существует эквивалентная q -равномерно гладкая норма. Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы установить аналог неравенства (1) для мартингалов f , являющихся элементами пространства Лоренца. Следует отметить, что в данной работе применяются мартингаловые преобразования, заданные последовательностями операторов, которые были введены в [6]. Такой подход дает краткий и ясный способ получения мартингаловых неравенств рассматриваемого вида.

2. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство и f — случайная величина на нем со значениями в X . Пространство Лоренца $L^{p,q}(\Omega; X) = L^{p,q}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, состоит из всех измеримых функций f , для которых полунорма $\|f\|_{p,q}$, заданная формулами

$$\|f\|_{p,q} = \left(\frac{q}{p} \int_0^1 (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty,$$

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t),$$

конечна. Здесь $f^*(t) = \inf\{s > 0 : P(\|f\| > s) \leq t\}$, $t \in [0, 1]$, обозначает убывающую перестановку функции f . Более подробно о пространствах Лоренца см. в [1].

Пусть X — банахово пространство, $f = (f_n)_{n \geq 1}$ — мартингал со значениями в X и $df = (df_n)_{n \geq 1}$ — мартингал-разность для f , $df_n = f_n - f_{n-1}$. Будем использовать следующие обозначения, принятые в теории мартингалов:

*Работа выполнена при поддержке Agence Nationale de Recherche (06-BLAN-0015), National Natural Foundation of China (10371093)

$$M_n(f) = \sup_{1 \leq k \leq n} \|f_k\|, \quad M(f) = \sup_{n \geq 1} \|f_n\|,$$

$$S_n^{(q)}(f) = \left(\sum_{k=1}^n \|df_k\|^q \right)^{1/q}, \quad S^{(q)}(f) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|df_k\|^q \right)^{1/q}.$$

Для r , $1 < r < \infty$, и s , $1 \leq s \leq \infty$, определим следующие пространства мартингалов:

$$H_{r,s}^* = \{f = (f_n)_{n \geq 1} : \|M(f)\|_{r,s} < \infty\},$$

$${}_q H_{r,s}^S = \{f = (f_n)_{n \geq 1} : \|S^{(q)}(f)\|_{r,s} < \infty\}.$$

Для X -значного мартингала $f = (f_n)_{n \geq 1}$ положим

$$\|f\|_{p,q} = \sup_n \|f_n\|_{p,q}.$$

В [8], [9] подробно изложена скалярная теория мартингалов, а в [2], [4] — теория векторнозначных мартингалов.

Определение 1. Пусть X_1 и X_2 — банаховы пространства и $L(X_1, X_2)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X_1 в X_2 . Определим оператор T следующим образом. Пусть $v = \{v_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность $L(X_1, X_2)$ -значных отображений, определенных на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такая, что $v_n \in L_{\infty}(L(X_1, X_2))$ и $\sup_{n \geq 1} \|v_n\|_{L_{\infty}(L(X_1, X_2))} \leq 1$. Для каждого X_1 -значного мартингала $f = (f_n)_{n \geq 1}$ положим

$$(Tf)_n = \sum_{k=1}^n v_k df_k.$$

Тогда Tf называется *мартингальным преобразованием* мартингала f , задаваемым последовательностью v , а оператор T — *оператором мартингального преобразования*.

Используя разложение Дэвиса, можно установить справедливость следующего утверждения (см., например, [5]).

Лемма 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда каждый X -значный мартингал $f = (f_n)_{n \geq 1} \in H_{p,q}^*$ можно представить в виде суммы $f = g + h$, где g и h — мартингалы, удовлетворяющие следующим условиям:

- (1) $\|dg_n\| \leq 4M_{n-1}(df)$;
- (2) $\|\sum_{n=1}^{\infty} dh_n\|_{p,q} \leq C\|M(df)\|_{p,q}$.

Лемма 3. Пусть X_1 и X_2 — банаховы пространства, а T — определенный выше оператор мартингального преобразования. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) существует положительная постоянная C , такая, что $\lambda P(M(Tf) > \lambda) \leq C\|M(f)\|_1$ для любого $\lambda > 0$;
- (2) для любых p, q , $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, существует постоянная $C = C_{p,q} > 0$, такая, что $\|M(Tf)\|_{p,q} \leq C\|M(f)\|_{p,q}$;
- (3) для некоторых p_0, q_0 , $1 < p_0 < \infty$, $1 \leq q_0 \leq \infty$, существует постоянная $C = C_{p_0, q_0} > 0$, такая, что $\|M(Tf)\|_{p_0, q_0} \leq C\|M(f)\|_{p_0, q_0}$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Рассмотрим мартингал $f \in H_{p,q}^*$. Согласно лемме 2, мы можем представить f в виде $f = g + h$. Тогда

$$\|M(Tf)\|_{p,q} \leq C\|M(Tg)\|_{p,q} + C\|M(Th)\|_{p,q}. \quad (2)$$

В силу ограниченности последовательности (v_k) получаем, что

$$\|M(Th)\|_{p,q} \leq \left\| \sup_n \sum_{k=1}^n \|dh_k\|_{X_1} \right\|_{p,q} = \left\| \sum_{k=1}^n \|dh_k\|_{X_1} \right\|_{p,q} \leq C \|M(f)\|_{p,q}.$$

Положим $W_n = 4M_{n-1}(df)$. Тогда последовательность (W_n) является неубывающей, причем каждая случайная величина W_n $\mathcal{F}_{n-1}$ -измерима. Зафиксируем $\lambda > 0$. Для $\beta > 0$, $\delta > 0$, таких, что $\beta > \delta + 1$, определим моменты остановки

$$\mu = \inf\{n : \|(Tg)_n\|_{X_2} > \lambda\}, \quad \nu = \inf\{n : \|(Tg)_n\|_{X_2} > \beta\lambda\}, \\ \sigma = \inf\{n : \max\{\|g_n\|_{X_1}, W_{n+1}\} > \delta\lambda\}.$$

Положим $u_n = \mathbf{1}_{\{\mu < n \leq \min\{\nu, \sigma\}\}}$. Так как $\{\mu < n \leq \min\{\nu, \sigma\}\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, мы можем рассмотреть мартингал $a = (a_n)$, $a_n = \sum_{k=1}^n u_k dg_k$, и его мартингалное преобразование $(Ta)_n = \sum_{k=1}^n v_k u_k dg_k$. Заметим, что $\|dg_n\| \leq W_n$. По определению момента остановки σ имеем $M(a) \leq 2\delta\lambda$ на множестве $\{\mu < \infty\}$ и $M(a) = 0$ на множестве $\{\mu = \infty\}$. Тогда

$$\|M(a)\|_1 \leq 2\delta\lambda P(\mu < \infty) = 2\delta\lambda P(M(Tg) > \lambda).$$

Согласно условию (1), получаем, что

$$P(M(Ta) > (\beta - \delta - 1)\lambda) \leq \frac{C\|M(a)\|_1}{(\beta - \delta - 1)\lambda} \leq \frac{2C\delta}{\beta - \delta - 1} P(M(Tg) > \lambda).$$

Если $w \in \{\mu < n \leq \min\{\nu, \sigma\}\}$, то $(Ta)_n = (Tg)_n$; легко видеть, что

$$P(M(Tg) > \beta\lambda, M(W) \leq \delta\lambda) \leq P(M(Ta) > (\beta - \delta - 1)\lambda).$$

Таким образом,

$$P(M(Tg) > \beta\lambda) \leq P(M(Tg) < \beta\lambda, M(W) \leq \delta\lambda) + P(M(W) > \delta\lambda) \\ \leq \frac{2C\delta}{\beta - \delta - 1} P(M(Tg) > \lambda) + P(M(W) > \delta\lambda).$$

Положим $\rho = 2C\delta/(\beta - \delta - 1)$. Согласно эквивалентному определению нормы в $L^{p,q}$, получаем, что

$$\beta^{-1} \|M(Tg)\|_{p,q} \leq \rho^{1/p} \|M(Tg)\|_{p,q} + \delta^{-1} \|M(W)\|_{p,q} \\ \leq \rho^{1/p} \|M(Tg)\|_{p,q} + 8\delta^{-1} \|M(f)\|_{p,q}.$$

Возьмем теперь δ , такое, что $1 - \beta\rho^{1/p} > 0$. Тогда $\|M(Tg)\|_{p,q} \leq C\|M(f)\|_{p,q}$. Наконец, из (2) следует, что $\|M(Tf)\|_{p,q} \leq C\|M(f)\|_{p,q}$. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна, а (3) $\Rightarrow$ (1) можно доказать, используя не разложение Дэвиса, как выше в лемме 2, а разложение Ганди [5]. $\square$

3. Вложение мартингалных пространств Лоренца. Выбор двух конкретных последовательностей $v = (v_n)$ операторов позволяет рассматривать $M(f)$ и $S^{(q)}(f)$ как операторы мартингалных преобразований, что вместе с леммой 3 дает прямой способ получить некоторые вложения пространств Лоренца векторнозначных мартингалов.

Теорема 4. Пусть X — банахово пространство. Для любого q , $2 \leq q < \infty$, следующие утверждения эквивалентны:

(1) X изоморфно q -равномерно выпуклому пространству;

(2) существует константа $C > 0$, такая, что для любого X -значного мартингала f

$$\lambda P(S^{(q)}(f) > \lambda) \leq C \|M(f)\|_1 \quad \forall \lambda > 0.$$

(3) для любых (или, эквивалентно, для некоторых) $r, s, 1 < r < \infty, 1 \leq s \leq \infty$,

$$H_{r,s}^* \hookrightarrow_q H_{r,s}^S.$$

Доказательство. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) доказана в [4]. Рассмотрим следующий оператор T , переводящий семейство X -значных мартингалов в семейство $\ell^q(X)$ -значных мартингалов. Пусть $v_k \in L(X, \ell^q(X))$ — оператор, определяемый равенством $v_k x = \{x_j\}_{j=1}^\infty$ для $x \in X$, где $x_j = x$, если $j = k$, и $x_j = 0$ в противном случае. Пусть

$$(Tf)_n = \sum_{k=1}^n v_k df_k = (df_1, df_2, \dots, df_n, 0, \dots).$$

Тогда $M(Tf) = \sup_n \|(Tf)_n\|_{\ell^q(X)} = S^{(q)}(f)$.

Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) гарантирует, что оператор T удовлетворяет условию (1) леммы 3. Отсюда сразу следует требуемая эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$

Теорема 5. Пусть X — банахово пространство. Для $1 < q \leq 2$ следующие утверждения эквивалентны:

- (1) X изоморфно q -равномерно гладкому пространству;
- (2) существует константа $C > 0$, такая, что для любого X -значного мартингала f

$$\lambda P(M(f) > \lambda) \leq C \|S^{(q)}(f)\|_1 \quad \forall \lambda > 0;$$

(3) для любых (или, эквивалентно, для некоторых) $r, s, 1 < r < \infty, 1 \leq s \leq \infty$

$${}_q H_{r,s}^S \hookrightarrow H_{r,s}^*.$$

Доказательство. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из [4]. Рассмотрим $\ell^q(X)$ -значные мартингалы $F = (F_n)_{n \geq 1}$, $F_n = \sum_{k=1}^n D_k$, $D_k = (D_k^j)_{j \geq 1}$, и следующий оператор мартингального преобразования R , действующий из семейства $\ell^q(X)$ -значных мартингалов в семейство X -значных мартингалов. Пусть $v_k \in L(\ell^q(X), X)$ — оператор, определяемый равенством $v_k x = x^k$ для $x = \{x^j\}_{j \geq 1} \in \ell^q(X)$, и пусть

$$(RF)_n = \sum_{k=1}^n v_k D_k = \sum_{k=1}^n v_k D_k^k.$$

Теперь для любого X -значного мартингала f с $f_n = \sum_{k=1}^n df_k$ мы можем выбрать $\ell^q(X)$ -значный мартингал $F = (F_n)_{n \geq 1}$ с $D_k^j = df_k$, если $j = k$, и $D_k^j = 0$, если $j \neq k$. Тогда

$$(RF)_n = \sum_{k=1}^n D_k^k = \sum_{k=1}^n df_k = f_n, \quad M(RF) = M(f),$$

и

$$\|F_n\|_{\ell^q(X)} = \|(df_1, df_2, \dots, df_n, 0, \dots)\|_{\ell^q(X)} = S_n^{(q)}(f), \quad M(F) = S^{(q)}(f).$$

Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) гарантирует, что оператор мартингального преобразования R удовлетворяет условию (1) леммы 3. Отсюда следует доказываемая эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$

Следствие 6. Пусть X — банахово пространство. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) X изоморфно гильбертову пространству;
 (2) для любых (или, эквивалентно, для некоторых) $r, s, 1 < r < \infty, 1 \leq s \leq \infty$,

$${}_2H_{r,s}^S = H_{r,s}^*.$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензентам и редактору за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston, 1988.
 [2] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
 [3] Y. Jiao, Carleson measures and vector-valued BMO martingales, Prob. Theo. Rel. Fields (online first) (готовится к публикации). [4] P. D. Liu, *Martingales and Geometry of Banach Spaces (in Chinese)*, Science Press, Beijing, 2007. [5] R-L. Long, *Martingale Spaces and Inequalities*, Peking University Press, Beijing, 1993. [6] T. Martínez, J. L. Torrea, Tohoku Math. J. (2), **52** (2000), 449–474. [7] G. Pisier, Israel J. Math., **20** (1975), 326–350. [8] Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, УМН, **50:5** (1995), 3–62. [9] F. Weisz, *Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1568, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

School of Mathematics Science and Computing Technology
 Central South University, Changsha, China
 Laboratoire de Mathématiques, Université de France-Comté
 Besançon Cedex, France
 e-mail: jjiao@univ-fcomte.fr

School of Mathematics and Statistics,
 Wuhan University, China
 e-mail: tma.math@whu.edu.cn

School of Mathematics and Statistics,
 Wuhan University, China
 e-mail: pdliu@whu.edu.cn

Поступило в редакцию
 31 октября 2008 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 25.06.2010. Подписано к печати 27.07.2010. Формат 70 × 100/16
 Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,8 тыс. Бум. л. 3,0
 Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 226 экз. Заказ 435.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
 Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
 117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
 Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6