Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Инвариантные функционалы случайных матриц, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 84–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:55:04

Напомним, что компактный и квазинильпотентный оператор в банаховом пространстве называется *вольтерровым*. Оператор $T \in B(X)$ называется (*слабо*) *почти периодическим*, если множество $\{T^n x : n \geq 0\}$ относительно (*слабо*) компактно для всех $x \in X$. Применяя теорему де Лю–Гликсберга [10] об отщеплении, мы получаем следующую теорему.

Теорема 10. (а) Если T — почти периодический оператор в банаховом пространстве X , то для произвольных $R \in \text{Rad}(W_T)$ и $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R x\| = 0;$$

(б) Если T — слабо почти периодический оператор в банаховом пространстве, то для произвольного вольтеррова оператора R из W_T

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n R\| = 0.$$

Автор благодарит рецензента за ценные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. М. Фельдман, Функц. анализ и его прил., **8:2** (1974), 93–94. [2] Е. А. Горин, Функц. анализ и его прил., **8:2** (1974), 73–74. [3] J. van Neerven, *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 88, Birkhäuser, Basel, 1996. [4] Yu. I. Lyubich, *Linear Functional Analysis*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 19, Springer-Verlag, Berlin, 1992. [5] R. Larsen, *Banach Algebras*, Marcel Dekker, New York, 1973. [6] L. Kérchy, J. van Neerven, Acta Sci. Math. (Szeged), **63:3–4** (1997), 551–562. [7] V. Q. Phóng, J. Funct. Anal., **103:2** (1992), 74–84. [8] A. Swiech, Studia Math., **96** (1990), 277–282. [9] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962. [10] K. de Leeuw, I. Glicksberg, Acta Math., **105** (1961), 63–97.

Университет Йузунджу Йыл, Турция
e-mail: hsmustafayev@yahoo.com

Поступило в редакцию
15 июля 2009 г.

УДК 517.98+519.2

Инвариантные функционалы случайных матриц*

© 2010. В. Ю. ПРОТАСОВ

Показатели (экспоненты) Ляпунова — показатели роста норм произведений случайных матриц — широко изучаются в литературе ([1]–[10]). В данной статье мы введем понятие инвариантного функционала («антинормы») для семейства случайных матриц и докажем его существование при определенных условиях. Из этого будут следовать асимптотически точные оценки средней скорости роста норм и спектральных радиусов матричных произведений, а также ряд новых оценок показателя Ляпунова. Для простоты ограничимся случаем независимых сомножителей, принимающих значения на конечном множестве матриц. Пусть $\eta_k = X_k \cdots X_1$, где все X_i независимы и одинаково распределены на множестве

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00208 и 10-01-00293, гранта МД-2195.2008.1 и гранта НШ-3233.2008.1.

$d \times d$ -матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, причем $\mathbf{P}\{\eta_1 = A_j\} = p_j > 0$, $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. Как известно, величина $\frac{1}{k} \log \|\eta_k\|$ сходится п. н. при $k \rightarrow \infty$ к (максимальному) показателю Ляпунова $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{E} \log \|\eta_k\|$, где $\mathbf{E}$ — математическое ожидание ([1], [3]). Положим $\mathcal{A}^k = \{A_{d_k} \cdots A_{d_1} \mid A_{d_j} \in \mathcal{A}, j = 1, \dots, k\}$.

1. Предположим, что все матрицы $A_i \in \mathcal{A}$ неотрицательны (имеют неотрицательные коэффициенты) и выполнены следующие три условия:

- (а) в матрицах A_i нет нулевых строк и столбцов;
- (б) семейство $\mathcal{A}$ неприводимо, т.е. для любых i, j существуют $k \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{A}^k$, такие, что $(A)_{ij} > 0$;
- (с) существуют $l \in \mathbb{N}$ и матрица $A \in \mathcal{A}^l$, имеющая положительную строку или столбец.

Подобные условия обычны при исследовании показателей Ляпунова [7]–[9].

Антинормой будем называть положительный однородный вогнутый непрерывный функционал на $\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, d\}$. Положительность означает, что $f(x) > 0$ при $x \neq 0$, а однородность — что $f(tx) = tf(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}_+^d$. Функционал f является монотонным, если $f(x) \geq f(y)$ при $x \geq y$, т.е. при $x_j \geq y_j$, $j = 1, \dots, d$. Антинорма f называется *инвариантной*, если

$$\exp(\mathbf{E} \log f(\eta_1 x)) = \tau f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^d, \quad (1)$$

где $\tau > 0$ — некоторая константа.

Теорема 1. Для любого семейства неотрицательных матриц $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условиям (а)–(с), и для любых вероятностей $p_1, \dots, p_m$ существует монотонная инвариантная антинорма f .

Для любой инвариантной антинормы семейства $\mathcal{A}$ имеет место равенство $\log \tau = \lambda$, где τ — параметр антинормы в формуле (1), а λ — показатель Ляпунова семейства $\mathcal{A}$.

Схема доказательства. Положим $e = \frac{1}{d}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$, $V = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum x_i = 1\}$, $\Delta = \mathbb{R}_+^d \cap V$; пусть $\|\cdot\|_1$ есть L_1 -норма в $\mathbb{R}^d$. Если f — инвариантная антинорма, то при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E} \log f(\eta_k x) = k \log \tau + \log f(x) \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}_+^d. \quad (2)$$

Пользуясь тем, что $\|\eta_k\| \asymp \|\eta_k e\| \asymp f(\eta_k e)$, подставляем $x = e$ в (2), делим обе части на k и получаем, что $\frac{1}{k} \mathbf{E} \log \|\eta_k\| \rightarrow \log \tau$ при $k \rightarrow \infty$, откуда следует, что $\log \tau = \lambda$.

Для доказательства существования рассмотрим произвольный конус K , вложенный в $\mathbb{R}_+^d$ (т.е. $(K \setminus \{0\}) \subset \text{int } \mathbb{R}_+^d$), для которого $e \in \text{int } K$. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех однородных вогнутых монотонных функционалов на K , равных 1 в точке e , с метрикой $\|f_1 - f_2\| = \sup_{x \in K \cap V} |f_1(x) - f_2(x)|$. Каждый функционал $f \in \mathcal{P}$ продолжаем с K на $\mathbb{R}_+^d$ по формуле $f(x) = \max_{z \in K, z \leq x} f(z)$. Рассмотрим непрерывное отображение $B: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $[Bf](x) = \exp[(\mathbf{E} \log f(\eta_1 x)) - (\mathbf{E} \log f(\eta_1 e))]$. Поскольку $\mathcal{P}$ — выпуклый компакт, а B непрерывно, по теореме Шаудера B имеет неподвижную точку $f \in \mathcal{P}$. Теперь возьмем произвольную систему конусов $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, которая возрастает (K_i вложен в K_{i+1}), стремится к $\mathbb{R}_+^d$ (замыкание $\bigcup_i K_i$ совпадает с $\mathbb{R}_+^d$) и $e \in \text{int } K_1$. На каждом конусе K_i определим соответствующее множество функций $\mathcal{P}_i$ и отображение B_i . Для каждого i существует $f_i \in \mathcal{P}_i$, для которого $B_i f_i = f_i$. В силу компактности всех $\mathcal{P}_i$, переходя к подпоследовательности, считаем, что $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$

сходится на каждом K_i и, следовательно, сходится поточечно на $\text{int } \mathbb{R}_+^d$. Предел f будет монотонным вогнутым функционалом на $\text{int } \mathbb{R}_+^d$ и $f(e) = 1$. Имеем $\exp(\mathbf{E} \log f(\eta_1 x)) = \tau f(x)$, где $\tau = \exp(\mathbf{E} \log f(\eta_1 e)) > 0$. Продолжим f на границу $\mathbb{R}_+^d$ по непрерывности и покажем, что f положителен. Из свойств (а)–(с) следует существование произведения $\Pi = A_{d_n} \cdots A_{d_1} \in \mathcal{A}^n$ с положительными элементами. Обозначим через c наименьший положительный элемент матриц из $\mathcal{A}^n$. Для любого $\alpha \in (0, 1/d]$ положим $\mu(\alpha) = \min_{x \in \Delta, x_{\min} = \alpha} f(x)$, где $x_{\min}$ — минимальная координата вектора x . Из вогнутости функционала f следует, что $\mu(r\alpha) \geq r\mu(\alpha)$ для любого $r \leq 1$ и $\mu(\alpha) \geq \alpha d$. Пусть точка $\bar{x} \in \Delta$ такова, что $\bar{x}_{\min} = \alpha$ и $f(\bar{x}) = \mu(\alpha)$. Так как $(\Pi \bar{x})_{\min} \geq c$, то $f(\Pi \bar{x}) = \|\Pi \bar{x}\|_1 f(\|\Pi \bar{x}\|_1^{-1} \Pi \bar{x}) \geq \|\Pi \bar{x}\|_1 \mu(\|\Pi \bar{x}\|_1^{-1} c) \geq cd$. Для всех остальных произведений $\Pi' \in \mathcal{A}^n$ имеем $(\Pi' \bar{x})_{\min} \geq c\alpha$, откуда $f(\Pi' \bar{x}) \geq c\mu(\alpha)$. Таким образом, $\mathbf{E} \log f(\eta_n \bar{x}) \geq p \log(cd) + (1-p) \log(c\mu(\alpha))$, где $p = p_{d_n} \cdots p_{d_1} = \mathbf{P}\{\eta_n = \Pi\}$. Подставляя в (2) и учитывая, что $f(\bar{x}) = \mu(\alpha)$, получаем неравенство $\log \mu(\alpha) \geq \log d + \frac{1}{p} \log \tau^{-n} c$ при всех α . Следовательно, $\inf_{x \in \Delta} f(x) > 0$. $\square$

Комментарий. Инвариантная антинорма не связана с инвариантными мерами, которые широко применяются при исследовании показателей Ляпунова ([4]–[6]). Она связана с инвариантными нормами, возникающими при изучении совместных спектральных характеристик. Например, любое неразложимое (не имеющее общих инвариантных подпространств) семейство линейных операторов имеет инвариантную норму (норму Барабанова), для которой $\max_{i=1, \dots, m} \|A_i x\| = \rho_\infty \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^d$, где константа ρ_∞ — *совместный спектральный радиус* [11]. Существует норма, для которой $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|A_i x\| = \rho_1 \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^d$, где ρ_1 — это L_1 -*спектральный радиус* [12]. Для показателя Ляпунова инвариантных норм не существует, поскольку оператор $[A\varphi](x) = \exp(\mathbf{E} \log \varphi(\eta_1 x))$ не сохраняет выпуклость (если φ выпукла, то $A\varphi$ может быть невыпуклой). Этот оператор сохраняет вогнутость функций. Но вогнутых неотрицательных однородных функций на $\mathbb{R}^d$ не существует (кроме нулевой). Поэтому мы ограничиваемся матрицами, имеющими общий инвариантный конус, в частности, неотрицательными матрицами. На самом деле не только неотрицательность матриц, но и условия (а)–(с) существенны в теореме 1.

2. Пусть $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A . В качестве следствия теоремы 1 получаем такой результат:

Теорема 2. Если выполнены условия (а)–(с) и $x \in \mathbb{R}_+^d$, $\|x\| = 1$, — произвольный вектор, то для каждой из величин $s_k = \|\eta_k x\|$, $\rho(\eta_k)$, $\|\eta_k x\|$ имеет место сходимость $\frac{1}{k} \log s_k \rightarrow \lambda$ п. н. при $k \rightarrow \infty$. Более того, для каждой из величин s_k существует константа C , такая, что

$$|\mathbf{E} \log s_k - k\lambda| \leq C, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Схема доказательства. Каждая из величин s_k не превосходит $c_1 \|\eta_k\|$ и не меньше $c_2 (\eta_k)_{ij}$, где $c_1, c_2 > 0$ — константы, а $(\eta_k)_{ij}$ — некоторый элемент матрицы η_k . Обе величины $\frac{1}{k} \log \|\eta_k\|$ и $\frac{1}{k} \log (\eta_k)_{ij}$ стремятся п. н. к показателю Ляпунова λ [9, теорема 2]; следовательно, $\frac{1}{k} \log s_k \rightarrow \lambda$ п. н. Соотношение (3) для $s_k = \|\eta_k x\|$ и $s_k = \|\eta_k\|$ следует из теоремы 1 и эквивалентностей $\|\eta_k x\| \asymp f(\eta_k x)$ и $\|\eta_k\| \asymp f(\eta_k e)$. Случай $s_k = \rho(\eta_k)$ рассматриваем отдельно. Так как $\rho(\eta_k) \leq \|\eta_k\| \asymp f(\eta_k e)$, то по теореме 1 величина $\mathbf{E} \log \rho(\eta_k) - k\lambda$

ограничена сверху при $k \in \mathbb{N}$. Осталось доказать ограниченность снизу. Поскольку семейство $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям (а)–(с), найдется произведение $\Pi = A_{d_n} \cdots A_{d_1}$, все элементы которого положительны. Обозначим через c_n наименьший элемент матрицы Π и через c наименьший положительный элемент матриц семейства $\mathcal{A}$. Рассмотрим любое произведение $P_{j,l} = U_j \Pi V_l$, где $U_j \in \mathcal{A}^j$, $V_l \in \mathcal{A}^l$. В каждом столбце матрицы V_l есть положительный элемент, он не меньше c^l . Поэтому L_1 -норма любого столбца матрицы $P_{j,l}$ не меньше $\|U_j\|_1 c_n c^l$. Так как спектральный радиус неотрицательной матрицы не меньше минимальной L_1 -нормы ее столбцов, то $\rho(U_j \Pi V_l) \geq \|U_j\|_1 c_n c^l$ для любых $k, l \geq 0$ и для любых произведений U_j, V_l . Для произвольного $k > n$ обозначим через $\mathcal{R}_l$ множество произведений из $\mathcal{A}^k$ со следующим свойством: l — наименьшее число, для которого данное произведение имеет вид $P_{j,l}$. Таким образом, $j = k - n - l$ и $l \leq k - n$ (если данное произведение не содержит Π , то $l = k - n + 1$). Вероятность $\mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_l\}$ не превосходит $p(1-p)^{[l/n]}$ при $l \leq k - n$ и $(1-p)^{[l/n]}$ при $l = k - n + 1$, где $p = p_{d_n} \cdots p_{d_1}$, $[a]$ — целая часть числа a . Применяя доказанную выше оценку для $s_k = \|\eta_k\|$ к случайному произведению U_j , получаем следующее неравенство для условного математического ожидания:

$$\mathbf{E}\{\log \rho(\eta_k) \mid \eta_k \in \mathcal{R}_l\} \geq \log c_n c^l + (k - n - l)\lambda - C.$$

Умножая на вероятность $\mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_l\}$ и суммируя по всем $l = 0, \dots, k - n + 1$, получаем, что величина $\mathbf{E} \log \rho(\eta_k) - k\lambda$ ограничена снизу равномерно по всем натуральным k . $\square$

Комментарий. Покажем, что каждое из условий (а)–(с) существенно в обеих теоремах 1, 2. Для условия (b) пример дает семейство из одной 2×2 -матрицы A_1 , у которой $(A_1)_{21} = 0$, а остальные элементы равны 1. Для нее $\lambda = 0$, но $\mathbf{E} \log \|\eta_k\| \asymp \log k$, что противоречит теореме 2. Для условия (с) пример дает семейство

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

с вероятностями $p_1 = p_2 = 1/2$. Оно неприводимо, $\lambda = 0$, однако $\mathbf{E} \log \|\eta_k\| \asymp \sqrt{k}$, что вновь противоречит (3). С другой стороны, из доказательства теоремы 2 следует, что любое семейство, имеющее положительный инвариантный функционал, обладает свойством (3). Таким образом, при исключении любого из условий (а)–(с) семейство $\mathcal{A}$ может не иметь никаких положительных инвариантных функционалов (даже не обязательно вогнутых).

3. Приближая инвариантную антинорму f линейными функционалами, приходим к новым оценкам для показателя Ляпунова. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $v \in \text{int } \mathbb{R}_+^d$ положим

$$F_1^{(k)}(v) = \frac{1}{k} \min_{i=1, \dots, d} (-\log v_i + \mathbf{E} \log(\eta_k v)_i),$$

$$F_2^{(k)}(v) = \frac{1}{k} \max_{i=1, \dots, d} (-\log v_i + \mathbf{E} \log(\eta_k v)_i).$$

Теорема 3. При условиях (а)–(с) для любого k

$$\sup_{v \in \text{int } \mathbb{R}_+^d} F_1^{(k)}(v) \leq \lambda \leq \inf_{v \in \text{int } \mathbb{R}_+^d} F_2^{(k)}(v). \quad (4)$$

При $k \rightarrow \infty$ левая и правая части неравенства стремятся к λ со скоростью $O(k^{-1})$.

Комментарий. Оценки (4) уже при $k = 1$ улучшают известные оценки для показателя Ляпунова [7]. Функция $F_1(v)$ квазивогнута на $\text{int } \mathbb{R}_+^d$; функция $F_2(e^u)$, где $e^u = (e^{u_1}, \dots, e^{u_d})$, выпукла на $\mathbb{R}^d$. Поэтому обе оценки в (4) при каждом k эффективно вычисляются методами выпуклого программирования даже для больших размерностей d .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Furstenberg, Н. Kesten, Ann. Math. Statist., **31** (1960), 457–469.
 [2] В. Н. Тутубалин, ТВП, **10:1** (1965), 19–32. [3] В. И. Оселедец, Труды ММО, **19** (1968), 179–210. [4] E. Le Page, in: Probability Measures on Groups (Oberwolfach, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 928, 1982, 258–303. [5] W. C. Watkins, Contemp. Math., **50** (1986), 5–29. [6] И. Я. Гольдштейн, Г. А. Маргулис, УМН, **44:5** (1989), 13–60. [7] E. S. Key, J. Theor. Probab., **3:3** (1990), 477–488. [8] Y. Peres, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **28:1** (1992), 131–148. [9] Н. Hennon, Ann. Probab., **25:4** (1997), 1545–1587. [10] В. Ю. Протасов, Изв. РАН, сер. матем., **68:3** (2004), 27–68. [11] Н. Е. Барабанов, Автом. и телемех., 1988, № 2, 40–46. [12] V. Yu. Protasov, Linear Algebra Appl., **428:10** (2008), 2339–2356.

Московский государственный университет
 e-mail: v-protasov@yandex.ru

Поступило в редакцию
 2 декабря 2009 г.

УДК 515.16

Индексы примыкания особенностей волновых фронтов в пространствах небольших размерностей*

© 2010. В. Д. СЕДЫХ

Сначала мы напомним основные понятия теории особенностей лежандровых отображений (подробности см. в [1]).

Пусть E — гладкое (класса C^∞) многообразие нечетной размерности $2n - 1$. Контактными элементами на E называются пары вида (π, x) , где $x \in E$, а $\pi \subset T_x E$ — касательная гиперплоскость в точке x .

Гладкое поле контактных элементов на E называется контактной структурой, если $\omega \wedge (d\omega)^{n-1} \neq 0$ для любой гладкой 1-формы ω , такой, что поле задается (локально) уравнением $\omega = 0$. Интегральные многообразия контактной структуры на E , имеющие наивысшую размерность (равную $n - 1$), называются лежандровыми.

Зафиксируем контактную структуру на многообразии E . Гладкое расслоение $\rho: E \rightarrow B$ называется лежандровым, если все его слои являются лежандровыми подмногообразиями в E . Размерность базы B такого расслоения равна n .

*Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00388.