Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Даниленко, В. В. Рыжиков, Спектральные кратности преобразований, сохраняющих бесконечную меру, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 1–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:29:33

Спектральные кратности преобразований, сохраняющих бесконечную меру*

© 2010. А. И. ДАНИЛЕНКО, В. В. РЫЖИКОВ

Любое непустое подмножество E натурального ряда $\mathbb{N}$ реализовано как множество кратностей спектра купмановского оператора, отвечающего эргодическому консервативному преобразованию, сохраняющему бесконечную меру.

Введение

Пусть T — эргодическое консервативное обратимое преобразование стандартного измеримого пространства $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, сохраняющее σ -конечную меру μ . Ему отвечает унитарный купмановский оператор U_T в гильбертовом пространстве $L^2(X, \mu)$:

$$U_T f := f \circ T.$$

В случае конечной меры μ действие оператора U_T обычно рассматривается только на ортогональном дополнении к пространству постоянных функций.

Общий вопрос спектральной теории динамических систем:

$$\text{какие унитарные операторы являются купмановскими?} \quad (0.1)$$

Хорошо известны такие частные случаи проблемы (0.1) для конечной меры μ , как задача Банаха о простом лебеговском спектре, задача Колмогорова о групповом свойстве спектра (см. [6], [28]), задача Рохлина об однородном спектре и более общий вопрос о множестве спектральных кратностей. Этот вопрос формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{какие подмножества множества } \mathbb{N} \\ &\text{реализуемы как } \mathcal{M}(T) \text{ для эргодического } T? \end{aligned} \quad (0.2)$$

Здесь $\mathcal{M}(T)$ обозначает множество существенных значений функции спектральной кратности для оператора U_T . Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в работах [3]–[5], [8], [10], [14], [18]–[26] и др., этот давний вопрос спектральной теории динамических систем с конечной инвариантной мерой остается открытым.

В настоящей статье вопрос (0.2) рассматривается в классе эргодических консервативных преобразований, сохраняющих бесконечную меру, и в этом классе получен полный ответ на него.

Теорема 0.1. *Для любого непустого множества $E \subset \mathbb{N}$ найдется эргодическое сохраняющее бесконечную меру преобразование T со свойством кратной рекуррентности, для которого $\mathcal{M}(T) = E$.*

*Работа второго из авторов частично поддержана грантами НШ 3038.2008.1 и НШ 8508.2010.1.

Пример такого преобразования в случае, когда при $p > 0$ число $p+1$ лежит в E , мы ищем в виде $T^{\odot p} \times T_\alpha$, где $T^{\odot p}$ — симметрическая степень подходящего преобразования T , а T_α — некоторое его компактное расширение. Если $E = \{p+1\}$, то примером служит произведение $T^{\odot p} \times T$. Для доказательства теоремы мы также модифицируем для случая бесконечных мер технику недавней работы [10] (которая, в свою очередь, использует методы большинства из упомянутых статей), развитую для систем, действующих на вероятностном пространстве.

В случае бесконечной меры обнаруживаются специфические явления, не имеющие места в случае вероятностной меры. Например, эргодичность не является спектральным свойством. К тому же нет *хорошего* определения слабого перемешивания. Действительно, для любого $p > 0$ найдется преобразование T , такое, что его p -я декартова степень $T^{\times p}$ эргодична, а степень $T^{\times(p+1)}$ нет [17]. Напомним, что преобразование T на (X, μ) называется *кратно рекуррентным* преобразованием, если для любого $A \subset X$ положительной меры и любого $p > 0$ найдется число $k > 0$, такое, что $\mu(A \cap T^k A \cap \dots \cap T^{kp} A) > 0$. Это понятие является естественным обобщением понятия консервативности (которая соответствует случаю $p = 1$). Фюрстенберг показал, что при $\mu(X) < \infty$ каждое μ -сохраняющее преобразование обладает свойством кратной рекуррентности [13]. Однако для бесконечных пространств известны эргодические преобразования (такие, что и все их декартовы степени эргодичны), которые не обладают свойством кратной рекуррентности [2]. Информацию об этих и других контрпримерах читатель найдет в [1], [9], [12].

Причина, по которой доказательство теоремы 1 не переносится на случай вероятностной меры, состоит в том, что у сомножителей $T^{\odot p}$ и T_α в произведении $T^{\odot p} \times T_\alpha$ в вероятностном случае появляются инвариантные одномерные пространства констант, которые добавляют лишние кратности.

§1. Задача Рохлина об однородном спектре для преобразований, сохраняющих бесконечную меру

Задача Рохлина формулируется следующим образом:

найдется ли для заданного $n > 1$ эргодическое преобразование с однородным спектром кратности n ?

Это частный случай проблемы (0.1), и ответ на поставленный здесь вопрос играет важную роль в доказательстве теоремы 0.1. Отметим, что в случае конечной меры задача Рохлина решена в [3], [24] для $n = 2$, а для произвольных n — в [4] и конструктивно в [8]. Чтобы решить задачу об однородном спектре для преобразований пространства с бесконечной мерой, достаточно рассмотреть естественные факторы их декартовых степеней (см. [18], [5]).

Лемма 1.1. Пусть Γ — подгруппа группы перестановок $\mathfrak{S}_k$. Пусть V — унитарный оператор с простым непрерывным спектром, причем спектр оператора $V^{\otimes k}$ является простым. Тогда ограничение $V_\Gamma^{\otimes k}$ оператора $V^{\otimes k}$ на подпространство Γ -инвариантных тензоров имеет однородный спектр кратности $k!/|\Gamma|$.

Доказательство. Пусть σ — мера максимального спектрального типа оператора V и $\pi: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}$ — гомоморфизм, заданный равенством $\pi(z_1, \dots, z_k) = z_1 \cdots z_k$.

Будем считать, что оператор V является оператором умножения на переменную z , $z \in \mathbb{T}$, в пространстве $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$. Так как мера σ непрерывна, группа

$\mathbb{S}_k$ действует свободно на почти всех слоях $\pi^{-1}(z)$, оснащенных условной мерой $\sigma^k|\pi^{-1}(z)$. Оператор $V^{\odot k}$ имеет простой спектр; следовательно, почти все условные меры сосредоточены в $k!$ точках положительной меры (набор точек зависит от слоя). Действие группы Γ на слое разбивает это множество точек на $k!/\#\Gamma$ орбит одинаковой мощности. Таким образом, оператор $V_\Gamma^{\otimes k}$ унитарно эквивалентен прямой сумме $k!/\#\Gamma$ копий оператора $V^{\odot k}$, причем каждая копия имеет простой спектр. $\square$

Следствие 1.2. Пусть T — эргодическое консервативное преобразование, сохраняющее бесконечную меру, причем оператор $U_T^{\odot k}$ имеет простой спектр. Тогда при $k > 1$ выполняется равенство $\mathcal{M}(T^{\odot(k-1)} \times T) = \{k\}$.

Доказательство. Так как преобразование T действует в пространстве с бесконечной мерой, оператор U_T обладает непрерывным спектром. Осталось заметить, что $U_{T^{\odot(k-1)} \times T} = U_T^{\odot(k-1)} \otimes U_T = (U_T)_{\mathbb{S}_{k-1}}^{\otimes k}$, и применить лемму 1.1. $\square$

Отметим, что следствие 1.2 пока не дает решения задачи Рохлина, так как не ясно, будет ли преобразование $U_{T^{\odot(k-1)} \times T}$ эргодическим. Требуемый пример будет построен в ходе доказательства теоремы 0.1.

§2. Предварительные сведения и обозначения

Пусть G — счетная абелева группа, H — ее подгруппа, $v: G \rightarrow G$ — групповой автоморфизм, а $\widehat{G}$ и $\widehat{v}$ обозначают дуальную группу к G и дуальный автоморфизм к v соответственно. Через $\#A$ обозначается мощность множества A . Положим

$$M_v^h := \#(\{v^i(h) \mid i \in \mathbb{Z}\} \cap H),$$

$$L(G, H, v) := \{M_h^v \mid h \in H \setminus \{0\}\},$$

$$\mathcal{G} := \{a \in \widehat{G} \mid \exists p > 0 \quad \widehat{v}^p(a) = a\},$$

$$l_g(a) := \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} a(v^i(g)) \quad \text{для всех } a \in \mathcal{G}, \text{ таких, что } \widehat{v}^p(a) = a, g \in G.$$

В этом параграфе мы приводим два вспомогательных утверждения, играющих ключевую роль при подсчете кратностей спектра изучаемых преобразований.

Лемма 2.1 (см. [10]). Для заданного произвольного множества $E \subset \mathbb{N}$ найдутся счетная абелева группа G , подгруппа $H \subset G$ и автоморфизм $v: G \rightarrow G$, такие, что $E = L(G, H, v)$. Кроме того, выполняются следующие условия:

- (i) подгруппа $\mathcal{G}$ счетна и плотна в $\widehat{G}$;
- (ii) $\#\{l_h(a) \mid a \in \mathcal{G}\} = \infty$ для любого $h \in H \setminus \{0\}$;
- (iii) если $g_1, g_2 \in G$ и $v^i(g_1) \neq g_2$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, то найдется $a \in \mathcal{G}$, такое, что $l_{g_1}(a) \neq l_{g_2}(a)$.

Следующая лемма доказана в [19] при несколько более сильных условиях. Мы даем другое, более короткое доказательство.

Лемма 2.2. Пусть V и W — унитарные операторы с простым спектром, действующие в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}$ соответственно. Предположим, что для каждого $i = 1, \dots, k$ найдутся последовательности $n_t^{(i)} \rightarrow \infty$,

$m_t^{(i)} \rightarrow \infty$ и три комплексных числа $\kappa_i, \tilde{\kappa}_i, \tilde{\kappa}_i \neq \kappa_i$, и δ_i , такие, что имеют место слабые сходимости

$$(i) \ V^{n_t^{(i)}} \rightarrow \kappa_i I + \delta_i V^*, \ W^{n_t^{(i)}} \rightarrow \kappa_i I + \delta_i W^*;$$

$$(ii) \ V^{m_t^{(i)}} \rightarrow \kappa_i I + \delta_i V^*, \ W^{m_t^{(i)}} \rightarrow \tilde{\kappa}_i I + \delta_i W^*.$$

Предположим, кроме того, что все числа κ_i/δ_i различны. Тогда $V^{\odot k} \otimes W$ имеет простой спектр.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}, \sigma_V)$, $\widetilde{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{T}, \sigma_W)$ и $Vf(z) = zf(z)$, $Wg(z) = zg(z)$ для всех $f \in \mathcal{H}$, $g \in \widetilde{\mathcal{H}}$, $z \in \mathbb{T}$. Здесь σ_V и σ_W обозначают меры максимального спектрального типа для операторов V и W соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\odot k} \otimes \widetilde{\mathcal{H}} &= L_{\text{sym}}^2(\mathbb{T}^k, \sigma_V^k) \otimes L^2(\mathbb{T}, \sigma_W), \\ (V^{\odot k} \otimes W)f(z_1, \dots, z_k, z) &= z_1 \cdots z_k z f(z_1, \dots, z_k, z) \end{aligned}$$

для всех $f \in \mathcal{H}^{\odot k} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра фон Неймана, порожденная оператором $V^{\odot k} \otimes W$. Мы рассматриваем элементы из $\mathcal{A}$ как ограниченные функции на $\mathbb{T}^{k+1}$, инвариантные относительно перестановок первых k координат. Из (i) и (ii) получаем, что обе функции

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_k, z) &\mapsto (\kappa_i + \delta_i z) \cdot \prod_{l=1}^k (\kappa_i + \delta_i z_l), \\ (z_1, \dots, z_k, z) &\mapsto (\tilde{\kappa}_i + \delta_i z) \cdot \prod_{l=1}^k (\tilde{\kappa}_i + \delta_i z_l) \end{aligned}$$

принадлежат $\mathcal{A}$ для каждого $i = 1, \dots, k$. Так как $\kappa_i \neq \tilde{\kappa}_i$, то алгебре $\mathcal{A}$ принадлежат функции

$$(z_1, \dots, z_k, z) \mapsto \prod_{l=1}^k \left(\frac{\kappa_i}{\delta_i} + z_l \right) = \sum_{l=0}^k \left(\frac{\kappa_i}{\delta_i} \right)^l P_l(z_1, \dots, z_k),$$

где $P_l(z_1, \dots, z_k)$ — основные симметрические многочлены, $i = 1, \dots, k$. Следовательно, многочлены $P_0, \dots, P_k$ также принадлежат алгебре $\mathcal{A}$ (по свойству детерминанта Вандермонда и условию леммы). Но $P_0, \dots, P_k$ порождают алгебру всех симметрических многочленов от k переменных. Обозначим через $\mathcal{Z}$ $(V^{\odot k} \otimes W)$ -циклическое пространство, порожденное постоянной функцией $1 \in \mathcal{H}^{\odot k} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}$. Поскольку $\mathcal{Z}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и линейное подпространство $\mathcal{P}_{\text{sym}}(k)1$ плотно в $L_{\text{sym}}^2(\mathbb{T}^k, \sigma_V^k)$, получаем, что $\mathcal{Z} \supset L_{\text{sym}}^2(\mathbb{T}^k, \sigma_V^k) \otimes 1$ и, следовательно,

$$\mathcal{Z} \supset L_{\text{sym}}^2(\mathbb{T}^k, \sigma_V^k) \otimes z^n.$$

Это приводит к равенству $\mathcal{Z} = L_{\text{sym}}^2(\mathbb{T}^k, \sigma_V^k) \otimes L^2(\mathbb{T}, \sigma_W)$. $\square$

Пусть E — подмножество в $\mathbb{N}$. Переходя к объектам, дуальным к группе, подгруппе и автоморфизму в утверждении леммы 2.1, получаем компактную метризуемую абелеву группу K , ее замкнутую подгруппу H и непрерывный автоморфизм v группы K , такие, что

$$E = L(\widehat{K}, \widehat{K/H}, \widehat{v}),$$

причем выполняются условия (i)–(iii) леммы 2.1. Подмножество v -периодических точек в K обозначим через $\mathcal{K}$ и будем придерживаться этого обозначения до конца работы.

Пусть T — некоторое эргодическое преобразование стандартного измеримого пространства (X, μ) , а $\mathcal{R} \subset X \times X$ — отношение T -орбитальной эквивалентности. Измеримое отображение α из $\mathcal{R}$ в K называется *коциклом* эквивалентности $\mathcal{R}$, если

$$\alpha(x, y)\alpha(y, z) = \alpha(x, z) \quad \text{для всех } (x, y), (y, z) \in \mathcal{R}.$$

Коциклы $\alpha, \beta: \mathcal{R} \rightarrow K$ *когомологичны*, если существуют измеримое отображение $\phi: X \rightarrow K$ и множество полной меры $B \subset X$, такие, что для всех $(x, y) \in \mathcal{R} \cap B \times B$

$$\alpha(x, y) = \phi(x)\beta(x, y)\phi(y)^{-1}.$$

Если преобразование S коммутирует с T (т.е. S принадлежит $C(T)$, центральному преобразованию T в группе всех сохраняющих меру преобразований), то коцикл $\alpha \circ S: \mathcal{R} \rightarrow K$ корректно определен равенством $(\alpha \circ S)(x, y) := \alpha(Sx, Sy)$.

Пусть $\lambda_{K/H}$ — мера Хаара на K/H . Обозначим через $T_{\alpha, H}$ следующее преобразование пространства $(X \times K/H, \lambda_{K/H})$:

$$T_{\alpha, H}(x, k + H) := (Tx, \alpha(Tx, x) + k + H).$$

Это преобразование является *косым произведением* над T . Для краткости $T_{\alpha, \{0\}}$ обозначается через T_α . Как и случае конечной меры, имеет место разложение оператора $U_{T_{\alpha, H}}$ в ортогональную сумму, $U_{T_{\alpha, H}} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{K/H}} U_{T, \chi}$, где $U_{T, \chi}$ — унитарный оператор в $L^2(X, \mu)$, определенный равенством

$$U_{T, \chi} f(x) = \chi(\alpha(Tx, x))f(Tx), \quad x \in X.$$

Замечание 2.3. Непосредственно проверяется следующее утверждение: если для некоторого $S \in C(T)$

$$\alpha \circ S \text{ когомологичен } v \circ \alpha,$$

то $U_{T, \chi}$ и $U_{T, \widehat{v}^i(\chi)}$ унитарно эквивалентны для всех $i \in \mathbb{Z}$.

§3. Конструкция базисного преобразования и коцикла

Для доказательства теоремы 0.1 мы воспользуемся (C, F) -конструкцией (см. [16], [7]–[9]). Предварительно дадим ее общее определение. Пусть заданы последовательности $(C_n)_{n>0}$ и $(F_n)_{n\geq 0}$ конечных подмножеств множества $\mathbb{Z}$, причем

- $F_n = \{0, 1, \dots, h_n - 1\}$, $h_0 = 1$, $\#C_n > 1$, $0 \in C_n$,
- $F_n + C_{n+1} \subset F_{n+1}$,
- $(F_n + c) \cap (F_n + c') = \emptyset$, если $c \neq c'$, $c, c' \in C_{n+1}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n / (\#C_1 \cdots \#C_n) = \infty$.

Пусть $X_n := F_n \times C_{n+1} \times C_{n+2} \times \dots$. Наделяем это множество компактной польской топологией прямого произведения. Отображение

$$(f_n, c_{n+1}, c_{n+2}) \mapsto (f_n + c_{n+1}, c_{n+2}, \dots)$$

является топологическим вложением пространства X_n в X_{n+1} . Теперь положим $X := \bigcup_{n \geq 0} X_n$, оснащая X (локально компактной польской) топологией индуктивного предела. При заданном $A \subset F_n$ обозначим через $[A]_n$ цилиндр

$\{x = (f, c_{n+1}, \dots) \in X_n \mid f \in A\}$. Тогда семейство $\{[A]_n \mid A \subset F_n, n > 0\}$ всех компактных открытых подмножеств в X является базой топологии на X . Обозначим через $\mathfrak{B}$ борелевскую σ -алгебру, порожденную этой топологией.

Пусть $\mathcal{R}$ обозначает *хвостовое* отношение эквивалентности на X : две точки $x, x' \in X$ являются $\mathcal{R}$ -эквивалентными, если найдется $n > 0$, такое, что

$$x = (f_n, c_{n+1}, \dots) \in X_n, \quad x' = (f'_n, c'_{n+1}, \dots) \in X_n$$

и $c_m = c'_m$ для всех $m > n$. Напомним, что мера на $(X, \mathfrak{B})$ является $\mathcal{R}$ -инвариантной, если она инвариантна относительно любого измеримого преобразования $S: X \rightarrow X$, график которого содержится в $\mathcal{R}$. Мера μ , являющаяся $\mathcal{R}$ -инвариантной, называется $\mathcal{R}$ -эргодичной, если каждое $\mathcal{R}$ -насыщенное подмножество множества X имеет полную или нулевую μ -меру. Существует единственная неатомическая борелевская σ -конечная мера μ на X , инвариантная и эргодическая относительно $\mathcal{R}$, такая, что $\mu(X_0) = 1$.

Определим преобразование T на (X, μ) , полагая

$$T(f_n, c_{n+1}, \dots) := (1 + f_n, c_{n+1}, \dots) \text{ при } f_n < h_n - 1, \quad n > 0.$$

Эта формула определяет T на X_n . Устремляя n к бесконечности, мы определяем отображение T на всем пространстве X (без счетного числа точек). Это отображение сохраняет меру μ . Более того, отношение T -орбитальной эквивалентности совпадает с $\mathcal{R}$ (на множестве, где T определено). Преобразование T будем называть (C, F) -преобразованием, ассоциированным с $(C_{n+1}, F_n)_{n \geq 0}$.

Напомним понятие (C, F) -коцикла (см. [8]). Пусть задана последовательность отображений $\alpha_n: C_n \rightarrow K$, $n = 1, 2, \dots$. Определим борелевский коцикл $\alpha: \mathcal{R} \cap (X_0 \times X_0) \rightarrow K$, положив

$$\alpha(x, x') := \sum_{n > 0} (\alpha_n(c_n) - \alpha_n(c'_n))$$

для $x = (0, c_1, c_2, \dots) \in X_0$, $x' = (0, c'_1, c'_2, \dots) \in X_0$, $(x, x') \in \mathcal{R}$. Чтобы определить коцикл α на всем $\mathcal{R}$, предварительно введем отображение $\pi: X \rightarrow X_0$ следующим образом. Для заданного $x \in X$ пусть n является наименьшим положительным натуральным числом, для которого $x \in X_n$. Тогда $x = (f_n, c_{n+1}, \dots) \in X_n$. Положим

$$\pi(x) := (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots) \in X_0.$$

Очевидно, что $(x, \pi(x)) \in \mathcal{R}$. Теперь для пар $(x, y) \in \mathcal{R}$ положим

$$\alpha(x, y) := \alpha(\pi(x), \pi(y)).$$

Нетрудно проверить, что α есть корректно определенный коцикл отношения $\mathcal{R}$ со значениями в K . Мы называем его (C, F) -коциклом, ассоциированным с $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$.

Пусть $\bar{z} = (z_n)_{n=1}^\infty$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Следующее утверждение является бесконечным аналогом леммы 4.11 из [8]. Важность этого утверждения для реализации требуемого набора кратностей спектра видна из замечания 2.3.

Лемма 3.1. Пусть выполняется условие $\sum_{n=1}^{\infty} \#(C_n \Delta (C_n - z_n)) / \#C_n < \infty$. Положим

$$X_n^{\bar{z}} := \{0, 1, \dots, h_n - z_1 - \dots - z_n\} \times \prod_{m>n} (C_m \cap (C_m - z_m)) \subset X_n.$$

Тогда преобразование $S_{\bar{z}}$ пространства (X, μ) корректно определено равенством

$$S_{\bar{z}}(x) := (z_1 + \dots + z_n + f_n, z_{n+1} + c_{n+1}, z_{n+2} + c_{n+2}, \dots) \quad (3.1)$$

для всех $x = (f_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots) \in X_n^{\bar{z}}$, $n = 1, 2, \dots$.

Более того, $S_{\bar{z}}$ коммутирует с T , причем $U_T^{z_1 + \dots + z_n}$ слабо сходится к $U_{S_{\bar{z}}}$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть α является (C, F) -коциклом, ассоциированным с последовательностью отображений $\alpha_n: C_n \rightarrow K$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $C_n^{\circ} := \{c \in C_n \cap (C_n - z_n) \mid \alpha_n(c + z_n) = v(\alpha_n(c))\}$. Если выполнено условие

$$\sum_{n>0} (1 - \#C_n^{\circ} / \#C_n) < \infty, \quad (3.2)$$

то коцикл $\alpha \circ S_{\bar{z}}$ когомологичен $v \circ \alpha$.

Доказательство. Проверим, что множество $D := \bigcup_{n>1} X_n^{\bar{z}}$ имеет полную меру в X . Фиксируем $n > 0$.

Предварительно отметим, что

$$(X_n, \mu \upharpoonright X_n) = (F_n, \nu_n) \otimes \bigotimes_{m>n} (C_m, \kappa_m),$$

где κ_m — равнораспределенная вероятностная мера на C_n , а ν_n — равнораспределенная конечная мера на F_n (см. [7]). Из леммы Бореля–Кантелли вытекает, что, с точностью до множества μ -меры нуль, имеет место включение

$$X_n \setminus D \subset \bigcup_{m>n} [\{h_m - z_1 - \dots - z_m + 1, \dots, h_m - 1\}]_m.$$

Поэтому

$$\mu(X_n \setminus D) \leq \sum_{m>n} \frac{z_1 + \dots + z_m}{h_m} \mu(X_m) = \sum_{m>n} \frac{z_1 + \dots + z_m}{\#C_1 \dots \#C_m} \mu(X_0) < 2 \sum_{m>n} \frac{z_m}{\#C_m}.$$

Так как $\sum_{m>1} z_m / \#C_m < \infty$, то $\mu(X_n \setminus D) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Второе утверждение леммы доказывается очевидной модификацией доказательства леммы 4.11 из [8]. $\square$

Теперь мы приступаем к конструкции специального (C, F) -преобразования и коцикла со значениями в K . Фиксируем разбиение

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{a \in \mathcal{K}} \mathcal{N}_a \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{b \in \mathcal{K}} \mathcal{M}_{b,k}$$

натурального ряда $\mathbb{N}$ на бесконечные множества. Напомним, что $\mathcal{K}$ обозначает подмножество v -периодических точек в K . Для $a \in \mathcal{K}$ число m_a обозначает наименьший положительный период элемента a под действием автоморфизма v .

Определим последовательность $(C_n, h_n, z_n, \alpha_n)_{n=1}^\infty$ по индукции. Предположим, что эта последовательность построена до индекса n . Рассматриваем далее два случая.

Случай I. Пусть $n+1 \in \mathcal{N}_a$ для некоторого $a \in \mathcal{K}$. Положим

$$\begin{aligned} z_{n+1} &:= 2m_a n h_n, & r_n &:= n^3 m_a, \\ C_{n+1} &:= 2h_n \cdot \{0, 1, \dots, r_n - 1\}, \\ h_{n+1} &:= 2r_n h_n. \end{aligned}$$

Выбираем в качестве $\alpha_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow K$ произвольное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(A1) $\alpha_{n+1}(c + z_{n+1}) = v \circ \alpha_{n+1}(c)$ для всех $c \in C_{n+1} \cap (C_{n+1} - z_{n+1})$;

(A2) для всех $0 \leq i < m_a$ найдется множество $C_{n+1,i} \subset C_{n+1}$, для которого

$$\begin{aligned} C_{n+1,i} - 2h_n &\subset C_{n+1}, \\ \alpha_{n+1}(c) &= \alpha_{n+1}(c - 2h_n) + v^i(a) \quad \text{для всех } c \in C_{n+1,i}, \\ \left| \frac{\#C_{n+1,i}}{\#C_{n+1}} - \frac{1}{m_a} \right| &< \frac{2}{nm_a}. \end{aligned}$$

Случай II. Пусть $n+1 \in \mathcal{M}_{b,k}$ для некоторых $b \in \mathcal{K}$ и $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$\begin{aligned} z_{n+1} &:= m_b n (2h_n(k+1) + k), & r_n &:= n^3(k+1)m_b, \\ D_{n+1} &:= 2h_n \cdot \{0, 1, \dots, nm_b - 1\} \sqcup ((2h_n + 1) \cdot \{1, 2, \dots, nkm_b\} + 2h_n(nm_b - 1)), \\ C_{n+1} &:= D_{n+1} + z_{n+1} \cdot \{0, 1, \dots, n^2 - 1\}, \\ h_{n+1} &:= 2r_n h_n + kr_n/(k+1). \end{aligned}$$

Выбираем в качестве $\alpha_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow K$ отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(A3) $\alpha_{n+1}(c + z_{n+1}) = v \circ \alpha_{n+1}(c)$ для всех $c \in C_{n+1} \cap (C_{n+1} - z_{n+1})$;

(A4) для любого i , $0 \leq i < m_b$, найдется множество $C_{n+1,i} \subset C_{n+1}$, такое, что

$$\begin{aligned} C_{n+1,i} - 2h_n &\subset C_{n+1}, \\ \alpha_{n+1}(c) &= \alpha_{n+1}(c - 2h_n) + v^i(b) \quad \text{для всех } c \in C_{n+1,i}, \\ \left| \frac{\#C_{n+1,i}}{\#C_{n+1}} - \frac{1}{(k+1)m_b} \right| &< \frac{2}{nm_b}; \end{aligned}$$

(A5) найдется множество $C_{n+1,\Delta} \subset C_{n+1}$, такое, что

$$\begin{aligned} C_{n+1,\Delta} - 2h_n - 1 &\subset C_{n+1}, \\ \alpha_{n+1}(c) &= \alpha_{n+1}(c - 2h_n - 1) \quad \text{для всех } c \in C_{n+1,\Delta}, \\ \left| \frac{\#C_{n+1,\Delta}}{\#C_{n+1}} - \frac{k}{k+1} \right| &< \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, $C_{n+1}, h_{n+1}, z_{n+1}, \alpha_{n+1}$ полностью определены.

Теперь положим $F_n := \{0, 1, \dots, h_n - 1\}$. Обозначим (C, F) -конструкцию, отвечающую последовательности $(C_{n+1}, F_n)_{n \geq 0}$, через (X, μ, T) . Так как из соотношения

$$\#F_{n+1} = h_{n+1} \geq 2r_n h_n = 2\#C_{n+1}\#F_n$$

следует, что $\mu(X_{n+1}) \geq 2\mu(X_n)$, то получаем $\mu(X) = \infty$.

Пусть $\mathcal{R}$ — хвостовая эквивалентность (или, иначе говоря, T -орбитальная эквивалентность) на X . Обозначим через $\alpha: \mathcal{R} \rightarrow K$ коцикл отношения $\mathcal{R}$, ассоциированный с последовательностью $(\alpha_n)_{n>0}$.

§4. Эргодичность и кратная рекуррентность преобразований $T^{\times p} \times T_\alpha$

Предложение 4.1. *Преобразование $T^{\times p} \times T_\alpha$ эргодично для любого $p > 0$.*

Доказательство. Сначала докажем эргодичность преобразования $T^{\times p}$. Для простоты рассмотрим случай $p = 2$. (Общий случай доказывается аналогично.) Заметим, что для каждого $n \in \mathcal{M}_{b,1} - 1$ найдутся множества C'_{n+1} и C''_{n+1} в C_{n+1} , такие, что

- (а) если $c \in C'_{n+1}$, то $2h_n + c \in C_{n+1}$,
- (б) если $c \in C''_{n+1}$, то $2h_n + 1 + c \in C_{n+1}$,
- (с) $\#C'_{n+1} \geq 1/3 \cdot \#C_{n+1}$ и $\#C''_{n+1} \geq 1/3 \cdot \#C_{n+1}$.

Пусть заданы произвольные $n > 0$ и $f, f', d, d' \in F_n$. Для определенности считаем, что $f \geq f'$ и $d \geq d'$. Положим $s := \max(f - f', d - d')$. Найдем $k > n$, такое, что пересечение $\{n+1, \dots, k\} \cap \bigcup_{b \in \mathcal{X}} (\mathcal{M}_{b,1} - 1)$ состоит из s точек, скажем, $l_1, \dots, l_s$. Положим $A := f + \sum_{i=1}^k A_i$ и $B := d + \sum_{i=1}^k B_i$, где

$$A_i := \begin{cases} C_i, & i \notin \{l_1, \dots, l_s\}, \\ C''_i, & i \in \{l_1, \dots, l_{f-f'}\}, \\ C'_i, & i \in \{l_{f-f'+1}, \dots, l_s\}, \end{cases} \quad B := \begin{cases} C_i, & i \notin \{l_1, \dots, l_s\}, \\ C''_i, & i \in \{l_1, \dots, l_{d-d'}\}, \\ C'_i, & i \in \{l_{d-d'+1}, \dots, l_s\}. \end{cases}$$

Из (а)–(с) несложно вывести, что

- $[A]_k \subset [f]_n$, $[B]_k \subset [d]_n$;
- $\mu([A]_k) \geq \frac{1}{3^s} \mu([f]_n)$, $\mu([B]_k) \geq \frac{1}{3^s} \mu([d]_n)$;
- $T^{2(h_{l_1}-1+\dots+h_{l_s}-1)}[A]_k \subset [f']_n$, $T^{2(h_{l_1}-1+\dots+h_{l_s}-1)}[B]_k \subset [d']_n$.

Осталось применить следующую лемму.

Лемма 4.2. *Пусть фиксированы число $p > 0$ и отображение $\delta: \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$, причем $\sum_{g \in \mathbb{Z}^p} \delta(g) < 1/2$. Если для каждого $n > 0$ и $f_1, \dots, f_p, f'_1, \dots, f'_p \in F_n$ найдутся множество $A \subset [f_1]_n \times \dots \times [f_p]_n$ и число $s \in \mathbb{Z}$, такие, что $T^{\times p} A \subset [f'_1]_n \times \dots \times [f'_p]_n$ и*

$$\mu(A) > \delta(f_1 - f'_1, \dots, f_p - f'_p) \mu([f_1]_n \times \dots \times [f_p]_n),$$

то преобразование $T^{\times p}$ эргодично.

Лемма 4.2 является частным случаем леммы 2.4 из [7] или леммы 5.2 из [11].

Теперь проверим, что произведение $T^{\times p} \times T_\alpha$ является эргодическим. Представим это преобразование в виде косоугольного произведения $(T^{\times(p+1)})_{1 \otimes \alpha}$. Для заданных $n > 0$, $f_1, \dots, f_{p+1} \in F_n$ и $a \in \mathcal{X}$ можно найти число $k > n$, такое, что $k+1 \in \mathcal{N}_a$. Положим

$$A_i := f_i + C_{n+1} + \dots + C_k + C_{k+1,0}, \\ A := [A_1]_{k+1} \times \dots \times [A_p]_{k+1} \subset [f_1]_n \times \dots \times [f_p]_n.$$

Из условия (А2) предыдущего параграфа вытекает, что

$$(T^{\times p})^{-2h_k}[A_1]_{k+1} \times \cdots \times [A_p]_{k+1} \subset [f_1]_n \times \cdots \times [f_p]_n,$$

$$\frac{\mu^p(A)}{\mu^p([f_1]_n \times \cdots \times [f_p]_n)} > \left(\frac{1}{2m_a} \right)^p,$$

а равенства

$$1 \otimes \alpha(x, (T^{\times p})^{-2h_k}x) = \alpha(x_{p+1}, T^{-2h_k}x_{p+1}) = a$$

выполняются для всех $x = (x_1, \dots, x_{p+1}) \in A$. Так как $\mathcal{K}$ плотно в K , из стандартного критерия эргодичности для коциклов [27] получим, что $1 \otimes \alpha$ эргодичен, т. е. преобразование $T^{\times p} \times T_\alpha$ эргодическое. $\square$

Замечание 4.3. Преобразование $T^{\times p}$ является кратно рекуррентным для любого $p > 0$, что следует из замечания 2.4(i) из [11]. Из [15] вытекает, что преобразование $T^{\times p} \times T_\alpha$ также обладает этим свойством.

§5. Доказательство основного результата

Так как случай $E = \{1\}$ тривиален (каждое преобразование ранга 1, сохраняющее бесконечную меру, имеет простой спектр), предположим, что $E \neq \{1\}$. Зафиксируем натуральное число m , такое, что $m+1 \in E$. Наша цель — показать, что $\mathcal{M}(T^{\odot m} \times T_{\alpha, H}) = E$, где объекты T, α, K, H были определены в §3.

Лемма 5.1. Пусть $a, b \in \mathcal{K}$. Тогда для каждого $\chi \in \widehat{K}$,

- (i) $U_{T, \chi}^{2h_n} \rightarrow l_\chi(a) \cdot I$ при $\mathcal{N}_a - 1 \ni n \rightarrow \infty$;
- (ii) $U_{T, \chi}^{2h_n} \rightarrow \frac{l_\chi(b)}{k+1} \cdot I + \frac{k}{k+1} U_{T, \chi}^*$ при $\mathcal{M}_{b, k} - 1 \ni n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Докажем только п. (ii), поскольку п. (i) доказывается аналогично. Пусть $n+1 \in \mathcal{M}_{b, k}$.

Рассмотрим произвольное множество $A \subset F_n$. Замечаем, что $[A]_n = [A + C_{n+1}]_{n+1}$. Поэтому из условия (А4) (см. §3) вытекает, что для любого $x \in T[F_n]_n$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} U_{T, \chi}^{2h_n} 1_{[A]_n}(x) &= \sum_{i=0}^{m_b-1} \chi(\alpha(T^{2h_n}x, x)) 1_{[A+C_{n+1, i}]_{n+1}}(T^{2h_n}x) \\ &\quad + \chi(\alpha(T^{2h_n}x, x)) 1_{[A+C_{n+1, \Delta}]_{n+1}}(T^{2h_n}x) + \bar{o}(1) \\ &= \sum_{i=0}^{m_b-1} \chi(v^i(b)) 1_{[A+C_{n+1, i-2h_n}]_{n+1}}(x) \\ &\quad + \chi(\alpha(T^{-1}x, x)) 1_{[A+C_{n+1, \Delta-2h_n-1}]_{n+1}}(T^{-1}x) + \bar{o}(1) \\ &= \sum_{i=0}^{m_b-1} \chi(v^i(b)) 1_{[A+C_{n+1, i-2h_n}]_{n+1}}(x) \\ &\quad + U_{T, \chi}^* 1_{[A+C_{n+1, \Delta-2h_n-1}]_{n+1}}(x) + \bar{o}(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$U_{T,\chi}^{2h_n} - \sum_{i=0}^{m_b-1} \chi(v^i(b)) 1_{[C_{n+1,i-2h_n}]_{n+1}} - U_{T,\chi}^* 1_{[C_{n+1,\Delta-2h_n-1}]_{n+1}} \rightarrow 0$$

при $\mathcal{M}_{b,k} - 1 \ni n \rightarrow \infty$. Здесь функции $1_{[C_{n+1,i-2h_n}]_{n+1}}$ и $1_{[C_{n+1,\Delta-2h_n-1}]_{n+1}}$ рассматриваются как операторы умножения (ортопроекции) в $L^2(X, \mu)$. Осталось воспользоваться неравенствами (A4), (A5) и тем фактом, что для любой последовательности $C'_n \subset C_n$ при условии, что $\#C'_n/\#C_n \rightarrow \delta$, мы имеем слабую сходимость

$$1_{[C'_n]_n} \rightarrow \delta I, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Доказательство теоремы 0.1. Из предложения 4.1 следует, что преобразование $T^{\odot m} \times T_{\alpha,H}$ эргодично.

Имеет место естественное разложение оператора $U_{T^{\odot m} \times T_{\alpha,H}}$ в ортогональную прямую сумму,

$$U_{T^{\odot m} \times T_{\alpha,H}} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{K/H}} (U_T^{\odot m} \otimes U_{T,\chi}).$$

Докажем следующие утверждения:

- (i) $U_T^{\odot m} \otimes U_T$ имеет однородный спектр кратности $m+1$,
- (ii) $U_T^{\odot m} \otimes U_{T,\chi}$ имеет простой спектр, если $\widehat{K/H} \ni \chi \neq 0$,
- (iii) $U_T^{\odot m} \otimes U_{T,\chi}$ и $U_T^{\odot m} \otimes U_{T,\xi}$ унитарно эквивалентны, если χ и ξ принадлежат одной $\widehat{v}$ -орбите,
- (iv) меры максимального спектрального типа операторов $U_T^{\odot m} \otimes U_{T,\chi}$ и $U_T^{\odot m} \otimes U_{T,\xi}$ взаимно сингулярны, если χ и ξ не принадлежат одной $\widehat{v}$ -орбите.

Из равенства $\mathcal{M}(U_T^{\odot m} \otimes U_T) = \mathcal{M}((U_T)^{\otimes(m+1)}_{\mathfrak{S}_m})$ и леммы 1.1 получаем (i). По лемме 5.1(ii) имеет место сходимость

$$U_T^{2h_n} \rightarrow \frac{1}{k+1} I + \frac{k}{k+1} U_T^* \quad (5.1)$$

при $\mathcal{M}_{b,k} - 1 \ni n \rightarrow \infty$ для всех $b \in \mathcal{K}$ и $k \in \mathbb{N}$. Из доказательства леммы 2.2 следует, что унитарный оператор $U_T^{\odot(m+1)}$ имеет простой спектр. Теперь п. (i) получается из следствия 1.2.

Так как T является преобразованием ранга 1 (см, например, [25] для определения ранга), а отображение $[f] \ni x \mapsto \alpha(Tx, x) \in K$ постоянно для каждого $f \in F_n \setminus \{h_n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, оператор $U_{T,\chi}$ имеет простой спектр. Если $\widehat{K/H} \ni \chi \neq 0$, то по лемме 2.1(ii) найдется такое $b \in \mathcal{K}$, что $l_\chi(b) \neq 1$.

Пункт (ii) леммы 5.1 приводит к сходимости

$$U_{T,\chi}^{2h_n} \rightarrow \frac{l_\chi(b)}{k+1} I + \frac{k}{k+1} U_{T,\chi}^* \quad (5.2)$$

при $\mathcal{M}_{b,k} - 1 \ni n \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, m$. Теперь (ii) следует из (5.1) и (5.2) и из леммы 2.2.

Так как

$$\sum_{n>0} \frac{\#(C_n \Delta (C_n - z_n))}{\#C_n} = \sum_{n>0} \frac{2}{n^2},$$

из леммы 3.1 вытекает, что преобразование $S_{\bar{z}}(X, \mu)$ корректно определено формулой (3.1), причем $S_{\bar{z}} \in C(T)$. Из условий (A1) и (A3) получаем, что условие (3.2) выполнено. Следовательно, из леммы 3.1 получаем, что

$$\alpha \circ S_{\bar{z}} \text{ когомологичен } v \circ \alpha,$$

и п. (iii) следует из замечания 2.3.

Пусть характеры $\chi, \xi \in \widehat{K}$ не принадлежат одной $\widehat{v}$ -орбите. По лемме 2.1(ii) найдется $a \in \mathcal{K}$, для которого $l_{\chi}(a) \neq l_{\xi}(a)$. Из леммы 5.1(i) теперь получаем

$$(U_T^{\odot m} \otimes U_{T,\chi})^{2h_n} \rightarrow l_{\chi}(a)I \quad \text{и} \quad (U_T^{\odot m} \otimes U_{T,\xi})^{2h_n} \rightarrow l_{\xi}(a)I$$

при $n \rightarrow \infty$ и $n \in \mathcal{N}_a - 1$. Это доказывает утверждение (iv). Из (i)–(iv) вытекает, что

$$\mathcal{M}(U_{T^{\odot m} \times T_{\alpha, H}}) = E. \quad \square$$

Авторы благодарят рецензента за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Aaronson, *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [2] T. Adams, N. Friedman, C. E. Silva, *Rank one power weak mixing nonsingular transformations*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **21**:5 (2001), 1321–1332.
- [3] O. N. Ageev, *On ergodic transformations with homogeneous spectrum*, J. Dynam. Control Systems, **5**:1 (1999), 149–152.
- [4] O. N. Ageev, *The homogeneous spectrum problem in ergodic theory*, Invent. Math., **160**:2 (2005), 417–446.
- [5] O. N. Ageev, *Mixing with staircase multiplicity function*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **28**:6 (2008), 1687–1700.
- [6] А. М. Вершик, И. П. Корнфельд, *Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. Глава 4. Периодические аппроксимации и их применения. Эргодические теоремы. Спектральная и энтропийная теория общих групп преобразований*, в кн.: Динамические системы-2. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, ВИНИТИ, М., 1985, 70–89.
- [7] A. I. Danilenko, *Funny rank one weak mixing for nonsingular Abelian actions*, Israel J. Math., **121** (2001), 29–54.
- [8] A. I. Danilenko, *Explicit solution of Rokhlin's problem on homogeneous spectrum and applications*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **26**:5 (2006), 1467–1490.
- [9] A. I. Danilenko, *(C, F)-actions in ergodic theory*, in: Geometry and Dynamics of Groups and Spaces, Progr. Math., vol. 265, Birkhauser, Basel, 2008, 325–351.
- [10] A. I. Danilenko, *On new spectral multiplicities for ergodic maps*, Studia Math., **197**:1 (2010), 57–68.
- [11] A. I. Danilenko, C. E. Silva, *Multiple and polynomial recurrence for Abelian actions in infinite measure*, J. London Math. Soc., **69**:1 (2004), 183–200.
- [12] A. I. Danilenko, C. E. Silva, *Ergodic theory: non-singular transformations*, in: Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer-Verlag, 2009, 3055–3083.
- [13] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [14] G. R. Goodson, J. Kwiatkowski, M. Lemańczyk, P. Liardet, *On the multiplicity function of ergodic group extensions of rotations*, Studia Math., **102**:2 (1992), 157–174.

- [15] K. Inoue, *Isometric extensions and multiple recurrence of infinite measure preserving systems*, Israel J. Math., **140** (2004), 245–252.
- [16] A. del Junco, *A simple map with no prime factors*, Israel J. Math., **104** (1998), 301–320.
- [17] S. Kakutani, W. Parry, *Infinite measure preserving transformations with mixing*, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 752–756.
- [18] A. B. Katok, *Combinatorial constructions in ergodic theory and dynamics*, University Lecture Series, vol. 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [19] A. Katok, M. Lemańczyk, *Some new cases of realization of spectral multiplicity function for ergodic transformations*, Fund. Math., **206** (2009), 185–215.
- [20] J. Kwiatkowski (jr), M. Lemańczyk, *On the multiplicity function of ergodic group extensions. II*, Studia Math., **116**:3 (1995), 207–215.
- [21] В. И. Оселедец, *О спектре эргодических автоморфизмов*, Докл. АН. СССР, **168** (1966), 1009–1011.
- [22] E. A. Robinson, *Ergodic measure-preserving transformations with arbitrary finite spectral multiplicities*, Invent. Math., **72**:2 (1983), 299–314.
- [23] E. A. Robinson, *Transformations with highly nonhomogeneous spectrum of finite multiplicity*, Israel J. Math., **56** (1986), 75–88.
- [24] V. V. Ryzhikov, *Transformations having homogeneous spectra*, J. Dynam. Control Systems, **5**:1 (1999), 145–148.
- [25] В. В. Рыжиков, *Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1*, Матем. сб., **198**:5 (2007), 137–159.
- [26] В. В. Рыжиков, *Спектральные кратности и асимптотические операторные свойства действий с инвариантной мерой*, Матем. сб., **200**:12 (2009), 107–120.
- [27] K. Schmidt, *Cocycles on ergodic transformation groups*, Macmillan Lectures in Math., vol. 1, Macmillan Company of India, Delhi, 1977.
- [28] А. М. Степин, *Спектральные свойства типичных динамических систем*, Изв. АН СССР, сер. матем., **50**:4 (1986), 801–834.

ФТИНТ НАНУ им. Б. И. Веркина, Харьков
e-mail: alexandre.danilenko@gmail.com

МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: vryzh@mail.ru

Поступило в редакцию
25 мая 2009 г.