Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Ерзакова, О разрешимости уравнений с частично аддитивными операторами, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 69–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3004>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:15:47

Определим последовательность норм $\{\|\cdot\|_m\}_{m=0}^\infty$ на пространстве финитных векторов c_{00} . Если $x = \sum_n \alpha_n e_n \in c_{00}$, то

$$\|x\|_0 = \max_n |\alpha_n|, \quad \|x\|_{m+1} = \max \left(\|x\|_m, \frac{1}{2} \max_{c \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{\text{card } c} \|x \chi_{c[j]}\|_m \right), \quad m \geq 0,$$

где χ_E — характеристическая функция множества E . Тогда c_{00} с нормой $\|\cdot\|_m$ является нормированной решеткой, инвариантной относительно сдвига, и $\|x\|_{c_0} \leq \|x\|_m \leq \|x\|_{l_1}$ ($x \in c_{00}$). Поскольку $\|x\|_{m+1} \geq \|x\|_m$ для любого x , существует предел $\|x\|_{\mathcal{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x\|_m$. Пополнение пространства c_{00} по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ обозначим через F . Нетрудно показать, что для любого $x \in F$

$$\|x\|_{\mathcal{A}} = \max \left(\|x\|_{c_0}, \frac{1}{2} \sup_{c \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{\text{card } c} \|x \chi_{c[j]}\|_{\mathcal{A}} \right).$$

Теорема 2. *Банахова решетка F сепарабельна, инвариантна относительно сдвига, обладает свойствами (RSP), (LSP) и не совпадает с l_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0 .*

Следствие 1. *Банахова пара $(F, F(2^{-k}))$ $\mathcal{K}_u$ -монотонна, но не является равномерным частичным ретрактом никакой весовой L_p -пары.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, 1, North-Holland, Amsterdam, 1991. [2] N. J. Kalton, *Studia Math.*, **106**:3 (1993), 233–277. [3] M. Cwikel, P. Nilsson, in: *Interpolation Spaces and Allied Topics in Analysis* (Lund, 1984), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1070, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 54–65. [4] А. А. Седаев, Докл. АН СССР, **209**:4 (1973), 798–800. [5] В. И. Дмитриев, С. Г. Крейн, В. И. Овчинников, в кн.: *Геометрия линейных пространств и теория операторов*, Ярослав. гос. ун-т, Ярославль, 1977, 31–74. [6] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980. [7] P. G. Casazza, T. J. Shura, *Tsirelson's Space*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1363, Springer-Verlag, Berlin, 1989. [8] T. Figiel, W. B. Johnson, *Compositio Math.*, **29** (1974), 179–190.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Самарский госуниверситет
e-mail: ktikhomirov@yandex.ru

Поступило в редакцию
18 сентября 2008 г.

УДК 517.988.63+517.988.521

О разрешимости уравнений с частично аддитивными операторами

© 2010. Н. А. ЕРЗАКОВА

1. Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем $\mu(\Omega) < \infty$, μ — непрерывная мера; u_0, u_{01} — измеримые функции с положительными значениями (единицы), θ — функция, равная нулю п. в., $P_D u$ — функция, совпадающая с u для всех $s \in D$

и равная 0, если $s \notin D$, для произвольной измеримой функции u на Ω и произвольного измеримого подмножества $D \subset \Omega$; $D(u, T, u_0) = \{s : |u(s)| > Tu_0\}$ для произвольного числа $T > 0$; $M(u_0)$ — банахово пространство всех измеримых комплекснозначных функций на Ω , для которых имеет смысл и конечна норма $\|u\|_{M(u_0)} = \inf\{\lambda : |u| \leq \lambda u_0 \text{ п. в.}\}$ [1]; E, E_1 — правильные пространства функций на Ω , т. е. идеальные пространства с абсолютно непрерывной нормой (см., например, [1]). Примерами правильных пространств, наряду с пространствами Лоренца и пространствами Орлича, N -функция которых удовлетворяет Δ_2 -условию, могут служить пространства $L_p(\Omega, u_0)$ ($1 \leq p < \infty$) с нормой $\|u\|_{L_p(\Omega, u_0)} = \|u/u_0\|_{L_p(\Omega)}$. Напомним также, что оператор $A: E \rightarrow E_1$ называется частично аддитивным, если $A(v_1 + \dots + v_k) = A(v_1) + \dots + A(v_k) - (k-1)A(\theta)$ для всех функций $v_1, \dots, v_k$ из E , которые имеют непересекающиеся носители. Примерами частично аддитивных операторов могут служить, помимо линейных операторов, нелинейный оператор суперпозиции и интегральный оператор Урысона [2]. Для произвольного подмножества $U \subset E$, неограниченного по норме пространства $M(u_0)$, положим

$$\varkappa(U, A) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U, \|P_{D(u, T, u_0)} u\|_E \neq 0} \frac{\|A(P_{D(u, T, u_0)} u)\|_{E_1}}{\|P_{D(u, T, u_0)} u\|_E}. \quad (1)$$

Если $U \subset E$ — ограниченное по норме пространства $M(u_0)$ подмножество в E , то полагаем $\varkappa(U, A) = 0$. Напомним, что мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi_E(U)$ множества U называется нижняя грань всех $\varepsilon > 0$, при которых U имеет в E конечную ε -сеть. Непрерывный оператор $A: E \rightarrow E_1$ называется уплотняющим, если для любого ограниченного подмножества U из E , замыкание которого некомпактно, выполняется неравенство $\chi_{E_1}(A(U)) < \chi_E(U)$. Непрерывный оператор $A: E \rightarrow E_1$ называется (k, χ) -ограниченным, если существует такая постоянная $k > 0$, что для всех подмножеств U из E выполняется неравенство $\chi_{E_1}(A(U)) \leq k\chi_E(U)$ [3]. Для любого ограниченного подмножества правильного пространства имеет место неравенство $\nu_E(U) \leq \chi_E(U)$, где $\nu_E(U)$ обозначает меру неравностепенной абсолютной непрерывности норм элементов подмножества U правильного пространства E : $\nu_E(U) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U} \|P_{D(u, T, u_0)} u\|_E$ ([4]–[6]). Характеристика, подобная ν (для подмножеств пространства Лебега), впервые введена в [7] и независимо в [8]. Назовем подмножества U_1 и U_2 пространства E *сравнимыми*, $U_1 \leq U_2$, если в E существует такая функция $b(s)$, что для любой функции $u \in U_1$ найдется функция $v \in U_2$, для которой п. в. выполняется неравенство $|u(s)| \leq |b(s)| + |v(s)|$. Аналогично, два оператора F_1 и F_2 , действующих из правильного пространства E в правильное пространство E_1 , назовем *сравнимыми*, $F_1 \leq F_2$, если $F_1(U) \leq F_2(U)$ для каждого подмножества U из E . В силу того, что норма в правильном пространстве E удовлетворяет условию $\|u\|_E \leq \|v\|_E$ для всех $v \in E$ и измеримых функций u , если $|u| \leq |v|$ п. в., и определения величины ν_E

$$U_1 \leq U_2 \implies \nu_E(U_1) \leq \nu_E(U_2).$$

Уравнение вида $u = A(u; \lambda)$, рассмотренное в теореме 1 настоящей работы, возникает во многих задачах нелинейной механики: отыскание критических нагрузок и форм потери устойчивости упругих систем, исследование автоколеба-

тельных процессов, исследование процесса рождения волн и движущейся жидкости и т. д. В подобных задачах роль параметра λ могут играть нагрузки, частоты автоколебаний, скорости движения жидкости и т. п. [2]. В теореме 2 обобщен результат из [6], который, в свою очередь, обобщает еще более ранний результат автора настоящей работы об операторе Гаммерштейна (опубликован, в частности, в [3, 4.9.1]). Уравнение вида $u = KF(u) + f$, исследуемое в теореме 3, встречается в дифференциальной геометрии, физике, астрономии [9]. В отличие от аналогичного результата из [6], посвященного ε -разрешимости этого уравнения, здесь оператор K не обязательно линейный.

2. Формулировка результатов.

Теорема 1. Пусть непрерывный оператор $A: E \rightarrow E$, где E — правильное пространство, обладает свойством частичной аддитивности и к тому же является вполне непрерывным как оператор из $M(u_0)$ в E . Пусть существует шар $B_E(f, r)$, для которого величина $\varkappa(B_E(f, r), A)$ конечна. Тогда существует такое число $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda \leq \lambda_0$ уравнение $u = \lambda Au + f$ имеет хотя бы одно решение.

Теорема 2. Пусть непрерывный оператор $K: L_p(\Omega, u_0) \rightarrow L_q(\Omega, u_{01})$ ($1 \leq p < q < \infty$) обладает свойством частичной аддитивности. Пусть, кроме того, K является вполне непрерывным как оператор из $M(u_0)$ в $L_q(\Omega, u_{01})$. Пусть непрерывный оператор $F: L_q(\Omega, u_{01}) \rightarrow L_p(\Omega, u_0)$ для любой функции $u \in L_q(\Omega, u_{01})$ удовлетворяет условию

$$|F(u)(s)| \leq |b(s)| + au_0(s)|u(s)/u_{01}(s)|^{q/p}, \quad (2)$$

где $b(s) \in L_p(\Omega, u_0)$ — фиксированная функция и a — положительная постоянная. Тогда оператор KF является (k, χ) -ограниченным на каждом шаре $B_{L_q(\Omega, u_{01})}(u_1, r)$ с постоянной $k = a\chi(F(B_{L_q(\Omega, u_{01})}(u_1, r)), K)r^{q/p-1}$, если величина $\varkappa(F(B_{L_q(\Omega, u_{01})}(u_1, r)), K)$ конечна. Кроме того, если существует производная Фреше оператора KF , то она вполне непрерывна.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения теоремы 2, причем для некоторого $r > 0$ величина $\varkappa(F(B_{L_q(\Omega, u_{01})}(\theta, r)), K)$ конечна. Пусть непрерывный оператор F удовлетворяет условию (2) с $b(s) \equiv \theta$.

1. Если $K(\theta) = \theta$, то существует такое $r_0 > 0$, что для любого $0 < r \leq r_0$ и произвольной функции $f \in L_q(\Omega, u_{01})$ существует такое $\kappa > 0$, что для произвольного измеримого подмножества $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$, $\mu(\tilde{\Omega}) < \kappa$, уравнение $u = P_{\tilde{\Omega}}KF(u) + P_{\tilde{\Omega}}f$ имеет хотя бы одно решение в шаре $B_{L_q(\Omega, u_{01})}(\theta, r)$.

2. Если оператор F частично аддитивен и $K(v)(s) = 0$, когда $v(s) = 0$, то для произвольной функции $f \in L_q(\Omega, u_{01})$ уравнение $u = KF(u) + f$ имеет хотя бы одно решение $u \in L_q(\Omega, u_{01})$.

3. Схемы доказательства результатов. В силу предположений относительно оператора A и алгебраической полуаддитивности величин ν_{E_1} и χ_{E_1} , учитывая определение величины $\nu_E(U)$ и формулу (1), получаем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть оператор $A: E \rightarrow E_1$ переводит каждое множество, ограниченное в $M(u_0)$, в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в E_1 . Тогда для каждого ограниченного подмножества U

из E имеет место неравенство $\nu_{E_1}(A(U)) \leq \varkappa(U, A)\nu_E(U)$, а если A вполне непрерывен как оператор из $M(u_0)$ в E_1 , то $\chi_{E_1}(A(U)) \leq \varkappa(U, A)\nu_E(U)$.

Схема доказательства теоремы 1. Применяя лемму 1 и учитывая, что по предположению величина $\varkappa(B_E(f, r), A)$ конечна, доказываем, что оператор $\lambda A(u) + f$ является уплотняющим относительно χ на шаре $B_E(f, r)$. Утверждение теоремы 1 получаем из обобщения теоремы Шаудера на случай уплотняющих операторов [3, 1.5.11]. $\square$

Оператор F , удовлетворяющий предположению (2), сравним с оператором F_1 , определенным формулой $F_1(u)(s) = au_0(s)|u(s)/u_{01}(s)|^{q/p}$, $F \leq F_1$. Поэтому справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. Пусть непрерывный оператор $F: L_q(\Omega, u_{01}) \rightarrow L_p(\Omega, u_0)$ удовлетворяет условию (2) для всех $u(s) \in L_q(\Omega, u_{01})$, где a — положительная постоянная, $b(s) \in L_p(\Omega, u_0)$ — фиксированная функция. Тогда для любого подмножества $U \subset B_{L_q(\Omega, u_{01})}(u_1, r)$ справедливо неравенство $\nu_{L_p(\Omega, u_0)}(F(U)) \leq ar^{q/p-1}\nu_{L_q(\Omega, u_{01})}(U)$.

Схемы доказательства теорем 2 и 3. В силу предположений относительно операторов и утверждений лемм 1 и 2 оператор KF является (k, χ) -ограниченным на каждом шаре $B_{L_q(\Omega, u_{01})}(u_1, r)$ с $k = a\varkappa(F(B_{L_q(\Omega, u_{01})}(u_1, r)), K)r^{q/p-1}$, если величина $\varkappa(F(B_{L_q(\Omega, u_{01})}(u_1, r)), K)$ конечна. Завершается доказательство теоремы 2 применением рассуждений из [3, 1.5.9]. Первое утверждение теоремы 3 следует из обобщения теоремы Шаудера, так как в силу предположения относительно F , леммы 2 и теоремы 2 KF является (k, χ) -ограниченным оператором с $k = a\varkappa(F(B_{L_q(\Omega, u_{01})}(\theta, r)), K)r^{q/p-1}$ на шаре $B_{L_q(\Omega, u_{01})}(\theta, r)$. Поэтому можно выбрать такое $r_0 > 0$, что для всех $0 < r \leq r_0$ оператор $u \mapsto KF(u) + f$ является уплотняющим на шаре $B_{L_q(\Omega, u_{01})}(\theta, r)$. Доказательство второго утверждения опирается на дополнительное предположение относительно K и первое утверждение теоремы 3. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. П. Забрейко, Вестник Ярославского ун-та, 1974, № 8, 12–52.
- [2] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [3] Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский, *Меры некомпактности и уплотняющие операторы*, Наука, Новосибирск, 1986.
- [4] N. A. Yezakova, Z. Anal. Anwendungen, **15**:2 (1996), 299–307. [5] Н. А. Ерзакова, Сиб. матем. журн., **38**:5 (1997), 1071–1073. [6] Н. А. Ерзакова, Научный вестник МГТУ ГА, сер. матем. физ., 2009, № 140, 57–64. [7] Н. А. Ерзакова, Об уплотняющих операторах в пространствах L_p , Деп. в ВИНТИ 05.05.83, No. 2850-83, 1983. [8] J. Appell, E. De Pascale, Boll. Unione Mat. Ital. B, **3**:2 (1984), 497–515. [9] N. J. Kalton, I. E. Verbitsky, Trans. Amer. Math. Soc., **351**:9 (1999), 3441–3497.