Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Киселев, М. М. Фаддеев, О задаче подобия для несамосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:02:56

6. Другие примеры вычисления индуктивных пределов. Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная простая алгебра Ли, $\text{Ab}(\mathfrak{g})$ — семейство ее абелевых подалгебр (гомоморфизмы — это включения). Требуется найти индуктивный предел семейства $\text{Ab}(\mathfrak{g})$. Чтобы избежать патологических явлений, здесь следует внести в определение индуктивного предела естественные топологические ограничения. В случае $\mathfrak{g} = \text{su}(n)$, $n \geq 3$, искомый индуктивный предел — это алгебра Ли многочленов $x_1 T + \dots + x_r T^r$, $x_i \in \mathfrak{g}$, с вложениями $x \mapsto xT$, $x \in L$, $L \in \text{Ab}(\mathfrak{g})$.

В работах [2, 3] рассмотрены индуктивные пределы групп диффеоморфизмов и алгебр Ли векторных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Серр Ж. П. Математика (сб. переводов), **18**, № 1, 3–51 (1974).
2. Исмагилов Р. С. Изв. АН СССР, сер. матем., **44**, № 4, 831–867 (1980).
3. Исмагилов Р. С. Функциональный анализ и его прил., **26**, вып. 1, 66–68 (1992).

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступило в редакцию
30 апреля 1998 г.

УДК 517.9

О задаче подобию для несамосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром*

© 2000. А. В. КИСЕЛЕВ, М. М. ФАДДЕЕВ

Оператор L , действующий в гильбертовом пространстве H , подобен самосопряженному, если существуют такие самосопряженный оператор A и ограниченный ограниченно обратимый оператор X в H , что $L = X^{-1}AX$. При условии вещественности спектра оператора L для подобию оператора L самосопряженному необходимо и достаточно [1, 2], чтобы

$$\sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon \int \| (L - k - i\varepsilon)^{-1} u \|^2 dk \leq C \| u \|^2 \quad (1)$$

и оценка (1) выполнялась также с заменой оператора L на L^* . Данные оценки могут быть выписаны [3] в терминах функциональной модели оператора, однако их вид становится чрезвычайно громоздким. Мы можем привести их к значительно более простой форме, если на исследуемый оператор налагается дополнительное условие абсолютной непрерывности его спектра. В этом случае оказывается возможным привести указанные оценки к паре эквивалентных оценок уже для граничных значений резольвенты исследуемого оператора на вещественной оси, фактически реализовав в (1) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, что, вообще говоря, затруднительно без предположения об абсолютной непрерывности спектра оператора.

Опишем вкратце функциональную модель исследуемого оператора в форме Б. С. Павлова (см. [4, 5, 6]). Рассмотрим наряду с оператором $L = A + iV \equiv A + i\alpha J\alpha/2$, где $A = A^*$, $\alpha = \alpha^* \geq 0$, оператор V является (A) -ограниченным

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-01149) и INTAS (грант 95-0414).

с относительной границей, меньшей 1 (т.е. $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(V)$ и для некоторых $a, b, a < 1, \|Vu\| \leq a\|Au\| + b\|u\|, u \in \mathcal{D}(A)$), $J = J^*, J^2 = \text{Id}(E)$ ($\mathcal{X}_\pm \equiv (I \pm J)/2$), $E = \overline{\mathcal{R}(\alpha)} \subset H$, диссипативный оператор $L^\parallel \equiv A + i\alpha^2/2$ и сопряженный к нему $L^{-\parallel} \equiv (L^\parallel)^*$. Определим характеристическую функцию оператора $L^\parallel$ по формуле $S(\lambda) \equiv I + i\alpha(L^{-\parallel} - \lambda)^{-1}\alpha$. Она является сжимающей аналитической оператор-функцией в верхней полуплоскости, действующей в гильбертовом пространстве E . Ее граничные значения на вещественной оси, понимаемые в сильном смысле, будем обозначать $S(k), k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ двухкомпонентных вектор-функций $\begin{pmatrix} \tilde{g}^{(k)} \\ g^{(k)} \end{pmatrix}$ со значениями в пространстве E с метрикой

$$\left(\begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} I & S^*(k) \\ S(k) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \right)_{E \oplus E} dk$$

(предполагается, что по множеству элементов, норма которых обращается в нуль, проведена факторизация). Это пространство — пространство самосопряженной дилатации оператора $L^\parallel$ [4, 5]. Подпространство $K = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : \tilde{g} + S^*g \in H_-^2(E), S\tilde{g} + g \in H_+^2(E) \right\}$ является модельным пространством оператора $L^\parallel$, т.е. оператор $(L^\parallel - \lambda)^{-1}$ унитарно эквивалентен оператору $P_K(k - \lambda)^{-1}|_K$ для всех $\lambda, \text{Im } \lambda < 0$.

Характеристическая функция исходного оператора L , определяемая формулой $\Theta(\lambda) \equiv I + iJ\alpha(L^* - \lambda)^{-1}\alpha, \text{Im } \lambda \neq 0$ (см. [7]), является аналитической в верхней и нижней полуплоскостях и J -сжимающей в верхней полуплоскости ($\Theta^*(\lambda)J\Theta(\lambda) \leq J$) оператор-функцией. Абсолютно непрерывным подпространством $H_{\text{a.c.}}$ оператора L называется [6] замыкание множества гладких векторов оператора, т.е. таких векторов $u \in H$, для которых $\alpha(L - \lambda)^{-1}u \in H_\pm^2(E)$.

Будем называть несамосопряженный оператор L , действующий в гильбертовом пространстве H , оператором, имеющим лишь абсолютно непрерывный спектр, если выполнено условие $H_{\text{a.c.}} = H$.

Используя данную функциональную модель, мы можем доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *При условии абсолютной непрерывности спектра оператора L следующие условия эквивалентны:*

- (а) оператор L подобен самосопряженному;
- (б) на всех векторах $u \in H$ выполнены следующие оценки:

$$\begin{aligned} \int ((\Theta(k - i0)J\Theta^*(k - i0) - J)\mathcal{X}_+\alpha(L^{-\parallel} - k - i0)^{-1}u, \\ \mathcal{X}_+\alpha(L^{-\parallel} - k - i0)^{-1}u) dk \leq C\|u\|^2, \\ \int ((J - \Theta^*(k + i0)J\Theta(k + i0))\mathcal{X}_-\alpha(L^{-\parallel} - k - i0)^{-1}u, \\ \mathcal{X}_-\alpha(L^{-\parallel} - k - i0)^{-1}u) dk \leq C\|u\|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

В силу теоремы 1 справедливы следующие простые достаточные условия подобия оператора, имеющего лишь абсолютно непрерывный спектр, самосопряженному (см. также [8] и [9, 10], где приведены подобные условия без проекторов $\mathcal{X}_+, \mathcal{X}_-$):

СЛЕДСТВИЕ. Для подобия несамосопряженного оператора, имеющего лишь абсолютно непрерывный спектр, самосопряженному достаточно, чтобы $\|\mathcal{X}_+(\Theta(k-i0)J\Theta^*(k-i0)-J)\mathcal{X}_+\| \leq C$, $\|\mathcal{X}_-(J-\Theta^*(k+i0)J\Theta(k+i0))\mathcal{X}_-\| \leq C$ для почти всех $k \in \mathbb{R}$.

Условия теоремы 1 можно преобразовать к виду, в котором фигурируют резольвента исходного оператора L и характеристическая функция $S(k)$ оператора $L^\parallel$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. При условии абсолютной непрерывности спектра оператора L следующие условия эквивалентны:

- (а) оператор L подобен самосопряженному;
- (б) на всех векторах $u \in H$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \int ((I - S^*(k)S(k))\mathcal{X}_+\alpha(L - k - i0)^{-1}u, \mathcal{X}_+\alpha(L - k - i0)^{-1}u) dk &\leq C\|u\|^2, \\ \int ((I - S^*(k)S(k))\mathcal{X}_-\alpha(L^* - k - i0)^{-1}u, \mathcal{X}_-\alpha(L^* - k - i0)^{-1}u) dk &\leq C\|u\|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Что касается вопроса о подобии несамосопряженного оператора общего вида самосопряженному без предположения о структуре его спектра, то условия теорем 1, 2 уже не будут, вообще говоря, необходимыми и достаточными для указанного подобия, но будут давать *необходимые* для него условия. Отметим также, что в силу положительной определенности и ограниченности оператора $I - S^*S$ условие

$$\int (\|\mathcal{X}_+\alpha(L - k - i0)^{-1}u\|^2 + \|\mathcal{X}_-\alpha(L^* - k - i0)^{-1}u\|^2) dk \leq C\|u\|^2 \quad (4)$$

является достаточным для выполнения оценок (3). Последний результат может быть применен к анализу одномерного возмущения оператора умножения на независимую переменную на вещественной оси

$$(Lu)(x) = xu(x) + \psi(x) \int u(t)\overline{\varphi(t)} dt, \quad u, \varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}). \quad (5)$$

Определитель возмущения $D(\lambda)$ в этом случае выражается следующей формулой: $D(\lambda) = 1 + \int \overline{\varphi(t)}\psi(t)(t - \lambda)^{-1} dt$. Для упрощения выкладок (вычисления операторов α и $\mathcal{X}_\pm$) наложим следующее дополнительное условие на функции φ, ψ : $(\varphi, \psi) = 0$.

Обозначим через $H_+^{p,\text{loc}}$ ($H_-^{p,\text{loc}}$) пространство аналитических в верхней (нижней) полуплоскости функций f , удовлетворяющих условию

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{(\varepsilon < 0)} |f(k + i\varepsilon)|^p \frac{dk}{1 + k^2} < \infty.$$

Справедлива следующая лемма, дающая характеристику структуры спектра исследуемого оператора:

ЛЕММА. (i) Пусть спектр оператора (5) абсолютно непрерывен. Тогда $(D(\lambda))^{-1} \in H_\pm^{2,\text{loc}}$, $(D(\lambda))^{-1}(\psi(t)(t - \lambda)^{-1}, \psi(t)) \in H_\pm^2$.

(ii) Пусть выполнены следующие условия: (а) $(D(\lambda))^{-1} \in H_\pm^{2+\delta,\text{loc}}$, $\delta > 0$, (б) $\psi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$. Тогда спектр оператора (5) абсолютно непрерывен.

В завершение отметим, что условие (4) для оператора (5) сводится к проверке ограниченности некоторых сингулярных интегральных операторов в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Если спектр одномерного возмущения оператора умножения на независимую переменную (5) абсолютно непрерывен и $(\varphi, \psi) = 0$, то для подобия этого оператора самосопряженному оператору достаточно, чтобы сингулярные интегральные операторы с ядрами*

$$\begin{aligned} T_1(k, t) &= \frac{i \overline{\psi(t)}}{t - k - i0} + \frac{1 - i \|\varphi\| \|\psi\|^{-1} (\psi(x)(x - k - i0)^{-1}, \psi(x))}{D(k + i0)} \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - k - i0}, \\ T_2(k, t) &= \frac{i \overline{\varphi(t)}}{t - k - i0} + \frac{1 - i \|\psi\| \|\varphi\|^{-1} (\varphi(x)(x - k - i0)^{-1}, \varphi(x))}{D_*(k + i0)} \frac{\overline{\psi(t)}}{t - k - i0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $D_*(\lambda) \equiv \overline{D(\overline{\lambda})}$, были ограничены в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Авторы выражают благодарность С. Н. Набоко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Набоко С. Н. Функци. анализ и его прил., **18**, вып. 1, 16–27 (1984).
2. Van Casteren J. Pacif. J. Math., **104**, No. 1, 241–255 (1983).
3. Фаддеев М. М. Функци. анализ и его прил., **26**, вып. 4, 80–83 (1992).
4. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1970.
5. Павлов Б. С. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, 123–148 (1975).
6. Набоко С. Н. Труды ММО, **147**, 86–114 (1980).
7. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Наука, М., 1969.
8. Сажнович Л. А. Изв. АН СССР, сер. матем., **33**, № 1, 52–64 (1969).
9. Веселов В. Ф. Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 4, 19–24 (1988).
10. Веселов В. Ф. Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 2, 11–17 (1988).

Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет

Поступило в редакцию
14 августа 1998 г.

УДК 513.881

Существование базисов в ядерных дополняемых подпространствах пространств степенных рядов бесконечного типа*

© 2000. В. П. Кондаков

Проблема существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве ядерного пространства степенных рядов бесконечного типа, поставленная Б. С. Митягиным, решалась в работах [1–3] только при различных добавочных ограничениях на пространства или на их дополняемые подпространства.

Конкретными и широко используемыми в исследованиях пространствами степенных рядов бесконечного типа являются пространство быстро убывающих функций или его реализация в виде пространства s быстро убывающих

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 97-01-00215.