Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Колмогоров, Отзыв о работах И. М. Гельфанда
(в связи с его выдвижением в действительные члены
АН СССР), *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37,
выпуск 4, 8–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3010>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:38:13

Отзыв о работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка по унитарным представлениям групп Ли

Наиболее глубокие конкретные математические вопросы связаны с линейными представлениями групп Ли. В коммутативном и компактном случае все такие представления разлагаются на неприводимые конечномерные, т. е. осуществимые при помощи матриц. Но уже имеющая фундаментальное значение для физики группа Лоренца, группа движений плоскости Лобачевского и ряд других классических групп имеют только очень бедный запас конечномерных представлений, из которых, например, нельзя получить «регулярное» представление функциями с интегрируемым квадратом, заданными на самой группе.

Поэтому возникает задача найти для основных классических групп Ли все их бесконечномерные неприводимые унитарные представления (конечномерные уже были известны) и исследовать возможность разложения любых унитарных представлений на неприводимые. Эта задача и была разрешена после преодоления больших трудностей И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком. Их работы имеют вполне классический характер по методам, конкретности результатов, данных в виде явных формул, и широте полученных и ожидаемых применений.

Особый интерес для современной физики имеет нахождение всех неприводимых унитарных представлений группы Лоренца и получение из них всех унитарных представлений этой группы. Эта задача решена в работе [1]. О ее значении для физики см. [3]. Важность вопроса была ясна и зарубежным ученым. Но Дирак в 1945 году смог только указать несколько случайных бесконечномерных представлений группы Лоренца, которые все оказались разложимыми. Только после работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка возникла обширная литература за рубежом.

С математической стороны еще большие трудности преодолены в фундаментальной монографии [3], вышедшей в 1950 году. Построенная в ней теория обобщенных «сферических функций» и многие другие результаты представляются нам весьма существенными для анализа.

В целом эти исследования представляют собой одно из самых замечательных явлений в современной математике вообще.

1. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления группы Лоренца. Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 411–504 (1947).
2. Гельфанд И. М., Яглом А. М. Общие инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца. ЖЭТФ, **18**, 703–733 (1948).
3. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления классических групп. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **36**, 1–288 (1950).

Отзыв о работах И. М. Гельфанда (в связи с его выдвижением в действительные члены АН СССР)

Основные научные достижения Израиля Моисеевича Гельфанда относятся к функциональному анализу, а в той или иной мере связаны с использованием методов и идей функционального анализа почти все его работы. После того

как фундаментальное значение и даже центральное положение функционального анализа в значительной части математических наук выяснилось в классических трудах Вольтерра, Адамара, Гильберта, а общие логические основы его (определения и основные свойства функциональных пространств, функционалов, операторов) были построены Риссом, Банахом и др., в двадцатых годах нашего столетия начался современный этап развития функционального анализа, в течение которого были разработаны и созданы спектральная теория операторов в гильбертовом пространстве, теория колец операторов и бесконечных представлений групп, общая теория банаховых алгебр (нормированных колец), теория обобщенных функций с их разнообразными приложениями к задачам классического анализа (краевые задачи для дифференциальных уравнений и т. п.). Ввиду тесного переплетения классических методов с функциональными почти все представители анализа вообще в течение этих последних десятилетий являлись и специалистами в функциональном анализе, внося в его развитие новые идеи, часто первостепенной важности.

Естественно, однако, что в этот период функциональный анализ нуждался в крупных математиках, для которых общие идеи функционального анализа являлись бы исходным пунктом их интересов и которые способны были бы предвидеть и направлять развитие функционального анализа в целом, владея всеми его основными разделами. Среди математиков этого типа вслед за недавно умершим фон Нейманом в первую очередь следует назвать Израиля Моисеевича Гельфанда. Чтобы убедиться в этом, достаточно перечислить те направления функционального анализа, которые были им созданы или в создании которых он принимал решающее участие¹⁾.

I. В работе [1] дана наиболее полная и совершенная теория абстрактных функций, т. е. функций с действительным аргументом и значениями в линейном пространстве.

II. В работах [2] и [3] излагаются итоги исследований по нормированным кольцам, или, как их теперь называют, банаховым алгебрам. Центральная идея этих работ — возможность представления абстрактной банаховой алгебры как кольца функций на максимальных идеалах — была предвосхищена аналогичной конструкцией Стоуна для булевых алгебр, но в применении к алгебрам над полем действительных или комплексных чисел принадлежит И. М. Гельфанду. Построенная Гельфандом и его продолжателями теория содержит много замечательных глубоких результатов и допускает много применений (у самого И. М. Гельфанда к теории абсолютной сходимости рядов Фурье, почти периодическим функциям и т. д.). Эта теория систематически излагается в некоторых современных руководствах (например, в известной книге Хилле²⁾).

¹⁾ Далее указываются основные полные и обзорные публикации данного направления без указания примыкающих к ним или предшествующих им коротких заметок.

²⁾ Имеется в виду книга Hille E., Phillips R. S. *Functional Analysis and Semi-Groups*. AMS, Providence, RI, 1957; русский перевод: Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы*. Мир, М., 1962. — А. III.

III. Теория бесконечномерных унитарных представлений локально компактных групп имеет своим исходным пунктом работу И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова [4], в которой было установлено существование достаточной системы неприводимых представлений. Основное значение эта теория имеет в применении к группам Ли, а для физики особенно существен случай группы Лоренца. Этой более классической проблематикой занималось много крупных математиков различных стран, но работы И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [5–9] во всем этом большом направлении занимают бесспорное первое место. Дальнейшее их развитие дано в работах И. М. Гельфанда и М. И. Граева [10, 11].

IIIа. Знание унитарных представлений группы Лоренца дает систематический метод изучения релятивистски инвариантных уравнений, которому посвящены работы И. М. Гельфанда и А. М. Яглома [12] и др.

IIIб. Представления групп, действующих в однородных пространствах, позволяют систематически изучать сферические функции на однородных пространствах и многие вопросы интегральной геометрии [13–16].

IIIв. С теорией представлений связан существенный прогресс, достигнутый в последнее время в теории автоморфных функций, чему посвящена совместная статья И. М. Гельфанда и И. И. Пятецкого-Шапиро [17].

IIIг. Теория представлений позволила достичь замечательных успехов в анализе поведения некоторых динамических систем с непрерывным спектром, что является темой совместной работы И. М. Гельфанда и С. В. Фомина [18]

Работы всего этого цикла (бесконечномерные представления групп) рассматриваются обычно как самый существенный вклад И. М. Гельфанда в математику.

IV. Работы И. М. Гельфанда и его сотрудников по теории обобщенных функций [19–21] начали систематически публиковаться лишь с 1956 года, и полная их оценка еще принадлежит будущему, однако несомненно, что они содержат ряд замечательных идей и результатов. Серия монографий [20–22] переводится сейчас на английский (в США), французский, немецкий и японский языки. Одним из конкретных аспектов этих исследований являются применения к изучению задачи Коши для уравнений в частных производных, которые разрабатываются И. М. Гельфандом совместно с Г. Е. Шиловым, еще начиная с более ранней работы [23].

V. К последним годам относятся и работы И. М. Гельфанда по мерам и интегрированию в функциональных пространствах ([24] и примыкающие короткие публикации). К конкретному вычислению такого рода интегралов сводится ряд задач квантовой физики. Меры в функциональных пространствах рассматривались И. М. Гельфандом, с другой стороны, как аппарат для изучения так называемых обобщенных случайных процессов и работ по теории передачи информации (совместная с А. М. Ягломом работа [25] и др.).

Труднее проследить по печатным публикациям другую сторону научных достижений И. М. Гельфанда: его работы по более специальным вопросам дифференциальных уравнений, вычислительной математике и конкретным задачам физики и механики (см. [26] и [27–30]). Для меня нет, однако, сомнения, что И. М. Гельфанд соединяет в себе исключительный талант математика-теоретика

с незаурядными способностями к решению более грубыми методами, опирающимися на хорошо развитую геометрическую, механическую и физическую интуицию, конкретных задач прикладного характера.

Я считаю, что И. М. Гельфанд уже давно является естественным кандидатом для избрания в действительные члены АН СССР.

А. Колмогоров

1 мая 1960 г.

**Список работ И. М. Гельфанда, упоминаемых
в отзыве А. Н. Колмогорова**

1. Abstrakte funktionen und lineare Operatoren. Матем. сб., **4** (**46**), № 2, 235–286 (1938).
2. Нормированные кольца. Матем. сб., **9** (**51**), № 1, 3–24 (1941).
3. Основная серия представлений комплексной унитарной группы. ДАН СССР, **56**, № 1 (1946) (совм. с М. А. Наймарком).
4. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп. Матем. сб., **13** (**55**), № 2–3, 301–316 (1943) (совм. с Д. А. Райковым).
5. Унитарные представления группы Лоренца. Изв. АН СССР, **2**, 411–504 (1947) (совм. с М. А. Наймарком).
6. Унитарные представления полупростых групп Ли. 1. Матем. сб., **21** (**63**), № 3, 405–434 (1947) (совм. с М. А. Наймарком).
7. Нормированные кольца с инволюцией. Изв. АН СССР, сер. матем., **12**, 445–480 (1948) (совм. с М. А. Наймарком).
8. Унитарные представления классических групп. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **36**, 1–288 (1950) (совм. с М. А. Наймарком).
9. Унитарные представления унитарной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы. Труды ММО, **1**, 423–473 (1952) (совм. с М. А. Наймарком).
10. Унитарные представления вещественной унитарной группы (основные невырожденные серии). Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, № 3, 189–249 (1953) (совм. с М. И. Граевым).
11. Аналог формулы Планшереля для классических групп. Труды ММО, **4**, 375–404 (1955) (совм. с М. И. Граевым).
12. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца. ЖЭТФ, **18**, № 8, 703–733 (1948) (совм. с А. М. Ягломом).
13. Сферические функции на симметрических римановых пространствах. ДАН СССР, **70**, № 1, 5–8 (1950).
14. Несколько замечаний к теории сферических функций на симметричных римановых многообразиях. Труды ММО, **5**, 311–351 (1956) (совм. с Ф. А. Березиным).
15. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. Труды ММО, **8**, 321–390 (1959) (совм. с М. И. Граевым).
16. О разложении представлений группы Лоренца в пространствах функций, заданных на симметрических пространствах, на неприводимые представления. ДАН СССР, **127**, № 2, 250–253 (1959) (совм. с М. И. Граевым).
17. Теория представлений и теория автоморфных функций. УМН, **14**, вып. 2 (86), 171–194 (1959) (совм. с И. И. Пятцким-Шапиро).
18. Геодезические потоки на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. УМН, **7**, вып. 1, 118–137 (1952) (совм. с С. В. Фоминым).
19. Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées. J. Math. Pures Appl., **35**, 383–413 (1956) (совм. с Г. Е. Шиловым).
20. Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции, вып. 1. М., Физматгиз, 1958 (совм. с Г. Е. Шиловым).
21. Пространства основных и обобщенных функций. Обобщенные функции, вып. 2. М., Физматгиз, 1958 (совм. с Г. Е. Шиловым).

22. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции, вып. 3. М., Физматгиз, 1958 (совм. с Г. Е. Шиловым).
23. Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. УМН, **8**, вып. 6, 3–54 (1953) (совм. с Г. Е. Шиловым).
24. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике. УМН, **11**, вып. 1 (67), 77–114 (1956) (совм. с А. М. Ягломом).
25. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции. УМН, **12**, вып. 1 (73), 3–52 (1957) (совм. с А. М. Ягломом).
26. Интегральные уравнения. БСЭ, изд. 2-е, т. 18, 1953.
27. О структуре областей устойчивости линейных канонических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. УМН, **10**, вып. 1, 3–40 (1955) (совм. с В. Б. Лидским).
28. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными, Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 3, 65–72, 1958 (совм. с И. Г. Петровским и Г. Е. Шиловым).
29. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений. УМН, **14**, вып. 2 (86), 321–390 (1959).
30. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Обобщенные функции, вып. 4. М., Физматлит, 1961 (совм. с Н. Я. Виленкиным).