Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, Об асимптотике спектра оператора Штурма–Лиувилля с точечным взаимодействием, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 4, 14–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 06:50:17

Об асимптотике спектра оператора Штурма–Лиувилля с точечным взаимодействием*

© 2010. Р. С. ИСМАГИЛОВ, А. Г. КОСТЮЧЕНКО

Посвящается памяти М. Ш. Бирмана

Для оператора Штурма–Лиувилля с точечным взаимодействием найдены слабые асимптотики дискретного спектра. Указан класс операторов, для которых точка нуль есть единственная точка накопления спектра.

1. Введение. Оператор, указанный в названии работы, был предметом ряда исследований; см. [1]–[6]. Напомним его определение. Возьмем точки $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, $x_k \rightarrow +\infty$, числа $\alpha_k \in \mathbb{R}$ и линейное пространство $\mathcal{L}$ непрерывных функций $y(x)$, $x \geq 0$, с компактным носителем, гладких в каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ и удовлетворяющих условиям $y'(x_k+0) - y'(x_k-0) = \alpha_k y(x_k)$, $k \geq 1$, $y(0) = 0$. Рассмотрим замыкание в $L_2(0, +\infty)$ оператора, заданного соответствием $y \mapsto -y''$, $y \in \mathcal{L}$ (здесь берется вторая производная при $x \notin \{x_k\}$). Через A обозначим этот оператор, если он самосопряжен; в противном случае A будет означать некоторое его самосопряженное расширение. Связанная с A форма $y \mapsto (Ay, y)$, $y \in \mathcal{L}$, имеет вид

$$K(y) = \int_0^\infty |y'(x)|^2 dx + \sum_{k=0}^\infty \alpha_k |y(x_k)|^2. \quad (1)$$

Она распространяется на пространство всех непрерывных функций $y(x)$ с компактным носителем, имеющих кусочно непрерывную производную на $[0, +\infty) \setminus \{x_k\}$ и удовлетворяющих условию $y(0) = 0$.

В этой работе содержатся результаты двух типов. Прежде всего, рассматривается случай $\alpha_k < 0$. При некоторых условиях спектр оператора A оказывается дискретным (см. [5]). Мы укажем асимптотические оценки спектра (это будут «слабые» асимптотики — без точных значений постоянных множителей). Мы не касаемся более простого случая $\alpha_k > 0$, где применимы традиционные «вариационные» методы.

Далее, изучается случай (несколько необычный для рассматриваемого круга задач), когда точка $\lambda_0 = 0$ есть единственная точка непрерывного спектра оператора A (предельная точка множества его собственных значений). Мы укажем достаточно простой класс операторов с этим свойством.

В работах первого автора [7]–[9] рассматривалась родственная задача — о спектре обычного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом, сосредоточенным в объединении интервалов, удаляющихся в бесконечность, длины которых стремятся к нулю. В данной работе мы применяем (с необходимыми модифи-

*Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00595 и НШ 2372.2008.1.

кациями) метод исследования, использованный в указанных работах. Нужные результаты из [6]–[8] приведены (в удобной для наших целей форме) в разд. 3.

Возвращаясь к оператору A , отметим, что замыкание оператора $y \mapsto -y''$, $y \in \mathcal{L}$, является самосопряженным, если выполняется условие $\sum_k d_k^2 = +\infty$, $d_k = x_k - x_{k-1}$. Этот результат доказан в [5] и может быть также установлен методом из [10], где аналогичное условие получено для обычного (непрерывного) потенциала.

Подчеркнем сугубо элементарный характер используемых нами методов исследования.

2. Описание результата.

2а. Дискретность спектра. В предложении 5.18 из работы [5] доказано, что для дискретности спектра оператора, введенного в разд. 1, достаточно выполнения условий

$$d_n \rightarrow 0, \quad \frac{|\alpha_n|}{d_n} \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{d_n \alpha_n} \rightarrow c > -\frac{1}{4} \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

первое из этих ограничений, как показано в [5], необходимо для дискретности спектра, а ограничение $c > -1/4$ является точным. В следующей теореме 1 рассматривается вопрос о дискретности спектра при дополнительном ограничении $\alpha_k < 0$, $k = 1, 2, \dots$; оно мотивировано тем, что последующее исследование асимптотики спектра будет проведено именно при этом ограничении. Таким образом, результат теоремы 1 по существу имеет только методическое значение (как приложение методов исследования, описанных в [7], [8]; эти методы воспроизведены в разд. 3). Заметим, что при принятом нами ограничении $\alpha_k < 0$ признаки дискретности, указанные в теореме 1 и в работе [5], различаются. Итак, в теоремах 1 и 2 ниже числа α_k отрицательны.

Теорема 1. Пусть $\alpha_k = -h_k$, $h_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть $d_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\frac{h_k}{d_k + d_{k+1}} - \frac{2}{d_k d_{k+1}} \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Тогда спектр оператора A дискретен и не ограничен снизу (и, разумеется, также сверху).

2б. Асимптотика дискретного спектра. В дальнейшем запись $f \asymp g$ (здесь f, g — функции одного знака) будет означать, что $C \leq f/g \leq B$ для некоторых положительных постоянных B, C .

Для любого интервала (α, β) обозначим через $N(\alpha, \beta)$ число точек спектра оператора A , заключенных в (α, β) (разумеется, это число может быть и бесконечным). В следующей теореме 2 оцениваются величины $N(-t, 0)$, $N(0, t)$ при $t \rightarrow +\infty$. В этой теореме на величины d_n , h_n налагаются следующие ограничения:

$$d_k \asymp d_{k-1} \quad \text{при } k \rightarrow +\infty; \quad (3)$$

$$d_k \geq M_1 d_n, \quad h_k \leq M_2 h_n \quad \text{при } k \leq n; \quad (4)$$

$$h_k d_k > 4 + \epsilon_0, \quad h_k d_{k+1} > 4 + \epsilon_0, \quad \epsilon_0 > 0; \quad (5)$$

существуют такие функции $t \mapsto F(t)$, $t \mapsto G(t)$, $t > 0$, что $F(t) \nearrow +\infty$, $G(t) \nearrow +\infty$, $F(at) \asymp F(t)$, $G(at) \asymp G(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ для любого $a > 0$ и

$$F(h_k) \asymp k, \quad G(1/d_k) \asymp x_k, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Теорема 2. Если выполнены указанные условия, то

$$N(-t, 0) \asymp F(\sqrt{t}), \quad N(0, t) \asymp G(\sqrt{t})\sqrt{t} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

2с. Спектр с единственной предельной точкой. Обратимся ко второй теме — случаю спектра с единственной предельной точкой множества собственных значений. (Для обычного оператора Штурма–Лиувилля простые примеры такого рода указаны в работе [9].)

Возьмем последовательность x_k , $k = 1, 2, \dots$, и ее часть $c_j = x_{m_j}$, $j = 1, 2, \dots$, где $m_1 < m_2 < \dots$. Возьмем далее последовательность $\{\alpha_k\}$, такую, что $\alpha_{m_j} = 0$ и $\alpha_k > 0$ при $k \notin \{m_j\}$, а также последовательность $\{\beta_j > 0\}$. Зададим оператор A так, чтобы соответствующая ему форма (1) имела вид

$$K(f) = \int_0^\infty |y'(x)|^2 dx + \sum_{k=0}^\infty \alpha_k |y(x_k)|^2 - \sum_{j=0}^\infty \beta_j |y(c_j)|^2. \quad (7)$$

Опишем условия, которые приведут к спектру с указанным свойством; они состоят, грубо говоря, в том, что величины d_k , α_k «слабо колеблются» при $m_{j-1} < k < m_{j+1}$, а величины β_j близки к предписанным значениям.

Пусть даны величины D_j , A_j , удовлетворяющие следующим ограничениям:

- 1) $D_j \rightarrow 0$, $D_j \asymp D_{j+1}$, $A_j \asymp D_j^{-1}$;
- 2) $|d_k/D_j - 1| \leq MD_j^{2+\theta}$, $|\alpha_k/A_j - 1| \leq MD_j^{2+\theta}$ при $m_{j-1} < k < m_j$ и $m_j < k < m_{j+1}$;
- 3) $c_j - c_{j-1} \rightarrow +\infty$, $A_j/(c_{j+1} - c_j) \rightarrow +\infty$.

Введем величины $K_j = \sqrt{A_j D_j + (A_j D_j/2)^2} - A_j D_j/2$ и подчиним величины β_j следующим ограничениям:

$$K_j/D_j - M_1 D_j^{1+\gamma_1} \leq \beta_j \leq K_j/D_j - M_0 D_j^{1+\gamma_0}. \quad (8)$$

Здесь M , M_i , γ_i , θ — положительные постоянные, $\gamma_1 < \gamma_0 < \theta$.

Теорема 3. При указанных условиях спектр оператора A ограничен снизу и точка $\lambda_0 = 0$ есть единственная предельная точка множества собственных значений.

В качестве примера можно взять $x_k = k^r$, $\alpha_k = k^{1-r}$, $m_j = j^s$, где $r \in (3/4, 1)$, $s \in (r^{-1}, (2r-1)^{-1})$, $\beta_j = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)j^{s(1-r)}$.

Доказательства приведены в разд. 4, необходимые леммы — в разд. 3.

3. Предварительные леммы. Мы используем форму (1). Для любого отрезка $\Delta \subset [0, +\infty)$ положим $\lambda(\Delta) = \inf \{K(y) : y \in C_0^\infty(\Delta), \|y\| = 1\}$.

В следующих леммах 1, 2 и 3 последовательности $a_k \nearrow +\infty$, $b_k \nearrow +\infty$ являются перемежающимися, начиная с номеров m и n ; последнее означает, что $a_{m+i} < b_{n+i} < a_{m+i+1}$ при $i \geq 0$. Эти леммы доказаны в статьях [7], [8] для обычного оператора Штурма–Лиувилля; доказательство легко переносится на рассматриваемый сейчас случай.

Лемма 1. Пусть $\alpha < \beta$. Если $\lambda(a_{k-1}, a_k) \leq \alpha$ и $\lambda(b_{k-1}, b_k) \geq \beta$ для всех k , то $N(\alpha, \beta) \leq n - m + 1$.

Если $\lambda(a_{k-1}, a_k) \geq \alpha$ и $\lambda(b_{k-1}, b_k) \leq \beta$ для всех k , то $N(\alpha, \beta) \geq n - m - 1$.

Лемма 2. Если $\lambda(a_{k-1}, a_k) \rightarrow -\infty$ и $\lambda(b_{k-1}, b_k) \rightarrow +\infty$, то спектр оператора A дискретен и не ограничен снизу.

Лемма 3. Пусть $\lambda(a_{k-1}, a_k) \rightarrow +\infty$, $\lambda(b_{k-1}, b_k) \rightarrow 0$ и расстояния между двумя различными точками множества $\{a_i\} \cup \{b_j\}$ стремятся к бесконечности при удалении этой пары точек в бесконечность. Тогда спектр оператора A ограничен снизу и точка $\lambda_0 = 0$ есть единственная предельная точка множества его собственных значений.

Следующая лемма доказана в [6].

Лемма 4. Пусть интервал $\Delta = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, покрыт интервалами Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, причем $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $|i - j| > 1$ и $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \delta_i \neq \emptyset$. Предположим, что выполнены неравенства $\lambda(\Delta_i) - 32|\Delta_i|^{-2} \geq r$ и $\lambda(\delta_i) - 32|\delta_i|^{-2} \geq r$, $i = 1, 2, \dots$ (для некоторого r). (Здесь $|\Delta_j|$, $|\delta_i|$ — это длины интервалов Δ_j , δ_i .) Тогда $\lambda(\Delta) \geq r$.

Для следующей леммы возьмем отрезок Δ , разделенный точкой c на отрезки длины a и b . Рассмотрим величину $\lambda = \lambda(a, b; h) = \inf\{\int_{\Delta} |y'(x)|^2 dx - h|y(c)|^2 : y \in C_0^\infty(\Delta), \|y\| = 1\}$. Пусть $h > 1/a + 1/b$. Несложное вычисление показывает, что тогда $\lambda = -\mu^2$, где μ — единственный положительный корень уравнения $\mu = h \operatorname{sh} \mu a \operatorname{sh} \mu b / \operatorname{sh} \mu(a + b)$.

Лемма 5. Пусть величины a , b , h меняются таким образом, что $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ и $h/(a + b) - 1/(ab) \rightarrow +\infty$. Тогда $\mu \rightarrow +\infty$.

Если, кроме того, $a \asymp b$ и $h \min(a, b) \geq 2 + \epsilon_0$ (для некоторого $\epsilon_0 > 0$), то $\mu \asymp h$.

Допустив, что первое утверждение неверно, применим к функции sh формулу Тейлора–Пеано. Тогда уравнение для μ приводит к соотношению $h = 1/a + 1/b + (a + b)O(\mu^2)$. Это противоречит предположениям леммы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что величина $\mu = \mu(a, b, h)$ убывает при возрастании одной из величин a , b , что сводит дело к случаю $a = b$, т. е. к уравнению $\mu = (h/2) \operatorname{th} \mu a$. Отсюда вытекает второе утверждение.

4. Доказательства теорем. Докажем теорему 1. Положим $y_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, $k = 1, 2, \dots$, $x_0 = y_0 = 0$. Так как $d_k \rightarrow 0$, то $\lambda(x_{k-1}, x_k) \rightarrow +\infty$. Далее, из леммы 5 и предположений теоремы 1 следует, что $\lambda(y_k, y_{k+1}) \rightarrow -\infty$. Применяя лемму 2, получаем теорему 1.

Обратимся к теореме 2. Начнем с предварительных замечаний. Из леммы 5 и предположений теоремы 2 следует, что $\lambda(y_{k-1}, y_k) \asymp -h_k^2$. Таким образом, можно считать, что

$$-L_1 h_k^2 < \lambda(y_{k-1}, y_k) < -L_0 h_k^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

(заменяв, если необходимо, полуось $[0, +\infty)$ полуосью $[l, +\infty)$ с достаточно большим l , что не повлияет на асимптотику спектра).

Здесь и далее через M_i , L_i обозначаются положительные константы, зависящие только от последовательностей $\{x_k\}$, $\{h_k\}$, задающих оператор A .

Оценим $N(-t, 0)$ сверху. Для этого возьмем последовательности $0, x_1, x_2, \dots$ и $0, y_n, y_{n+1}, \dots$, где n — наименьшее натуральное число, такое, что $\lambda(y_{k-1}, y_k) \leq -t$ при $k \geq n$. Они перемежаются, начиная с номеров n , 1 (это свойство разъяснено перед леммой 1), и для них и интервала $(-t, 0)$ выполнены условия леммы 1. Поэтому $N(-t, 0) \leq n$. Найдем n . Из (9) видно, что указанное ограничение на n выполняется при $h_k \geq \sqrt{t/L_0}$, $k \geq n$, что равносильно условию $F(h_k) \geq F(\sqrt{t/L_0})$, или (если вспомнить свойства функции F) условию $k \geq L_2 F(\sqrt{t})$, $k \geq n$. Отсюда следует, что $n \asymp F(\sqrt{t})$, а потому

$N(-t, 0) \leq L_3 F(\sqrt{t})$, что и требовалось (здесь L_2, L_3 — некоторые постоянные).

Оценим величину $N(-t, 0)$ снизу. С этой целью применим второе утверждение леммы 1 к последовательностям $0, y_1, y_2, \dots$ и $0, x_n, x_{n+1}, \dots$; число n выберем ниже. Тогда $\lambda(y_{k-1}, y_k) < 0$, и чтобы применить лемму 1 (ее второе утверждение), осталось выбрать число n так, чтобы величины $\lambda(0, x_n)$ и $\lambda(x_k, x_{k+1})$, $k \geq n$, превосходили число $-t$. Разумеется, достаточно оценить первую из них (ибо остальные положительны). Для этого применим лемму 4. Последовательно применяя условия (9), (5) и (4), приходим к неравенству $\lambda(y_{k-1}, y_k) - 32|y_k - y_{k-1}|^{-2} \geq -L_4 h_n^2$ при $k \leq n$. Аналогичное неравенство верно и для интервала (y_k, x_k) . Применив лемму 4, получаем, что $\lambda(0, x_n) > -L_4 h_n^2$. Выберем в качестве n наименьшее число, для которого $L_4 h_n^2 \leq t$. Тогда $\lambda(0, x_n) \geq -t$. Лемма 1 дает неравенство $N(-t, 0) \geq n$. Далее, $h_n \asymp \sqrt{t}$, откуда вытекает, что $n \asymp F(\sqrt{t})$. Приходим к неравенству $N(-t, 0) \geq L_5 F(\sqrt{t})$, что и требовалось.

Оценим сверху величину $N(0, t)$, $t > 0$. Для этого применим лемму 1 к следующим двум последовательностям. В качестве первой возьмем последовательность $0, y_n, y_{n+1}, \dots$, где n — наименьшее число, для которого $c_0/d_n^2 \geq t$, $c_0 = \pi^2$. Тогда $d_n \asymp t^{-1/2}$. Далее, разобьем каждый интервал (x_{k-1}, x_k) , $k \leq n$, на N_k равных частей, где N_k — наименьшее число, для которого $c_0(N_k/d_k)^2 \geq t$. Точки деления, дополненные точками x_k , $k > n$, и образуют вторую из последовательностей. Тогда $N_k \asymp d_k \sqrt{t}$, откуда следует, что $N(0, t) \leq N_1 + \dots + N_n \asymp x_n \sqrt{t}$. Но $x_n \asymp G(1/d_n) \asymp G(\sqrt{t})$. Итак, $N(0, t) \leq L_6 G(\sqrt{t}) \sqrt{t}$.

Оценим величину $N(0, t)$ снизу. Применим лемму 1 к следующим последовательностям. Прежде всего, это последовательности $0 = x_0, x_1, \dots$. Далее, выберем некоторую точку y_n и разобьем отрезок $[0, y_n]$ на N равных частей, где N — наибольшее число, для которого $c_0(N/y_n)^2 \leq t$; точки деления, продолженные далее точками y_k , $k > n$, возьмем в качестве второй последовательности. Лемма 1 дает неравенство $N(0, t) \geq N - n$. Ясно, что $N \asymp x_n \sqrt{t}$. Итак, $N(0, t) \geq L_7 x_n \sqrt{t} - n$. В качестве n возьмем наибольшее число, для которого $d_n \sqrt{t} \geq E$, где $E = 2/L_7 M_1$ (число M_1 взято из первого из неравенств (4)). Оценим сверху число n . Просуммировав по $k \in \{1, \dots, n\}$ первое из неравенств (4), приходим к неравенству $x_n \geq M_1 n d_n$, откуда получаем, что $n \leq x_n / (M_1 d_n) \leq x_n \sqrt{t} / (E M_1) = L_7 x_n \sqrt{t} / 2$. Отсюда вытекает, что $N(0, t) \geq L_8 x_n \sqrt{t} / 2 \geq L_8 G(1/d_n) \sqrt{t} \geq L_9 G(\sqrt{t}) \sqrt{t}$. Теорема 2 доказана.

Докажем теорему 3. Положим $b_j = (c_{j-1} + c_j)/2$. Согласно лемме 3, достаточно доказать, что

$$\lambda(b_j, b_{j+1}) \rightarrow 0, \quad \lambda(c_{j-1}, c_j) \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

Нам понадобится величина

$$\Phi(m, L) = \min \left(\sum_{k=1}^m (s_k - s_{k-1})^2 + L \sum_{k=1}^{m-1} s_k^2 \right), \quad s_0 = 0, \quad s_m = 1.$$

(Здесь $m = 1, 2, \dots$, $L > 0$.) Она вычисляется явно; выписанный минимум достигается на последовательности $s_k = (\lambda_1^k - \lambda_2^k) / (\lambda_1^m - \lambda_2^m)$, где λ_1, λ_2 — корни уравнения $\lambda^2 - (L+2)\lambda + 1 = 0$. Отсюда легко получается асимптотическая

формула

$$\Phi(m, L) = \sqrt{(L/2)^2 + L} - L/2 + O((1 + \epsilon_0)^{-m}); \quad (11)$$

она выполняется равномерно по всем $m = 1, 2, \dots$ и всем L , удовлетворяющим условию $L > \epsilon_0$ для фиксированного ϵ_0 . С ее помощью мы исследуем форму

$$R_j(y) = \int_{b_j}^{b_{j+1}} |y'(x)|^2 dx + \sum_k \alpha_k |y(x_k)|^2, \quad y \in C_0^\infty(b_j, b_{j+1}),$$

точнее, изучим величину $\beta_j^0 = \inf\{R_j(y), y \in C_0^\infty(b_j, b_{j+1}), y(c_j) = 1\}$.

Лемма 6. *Справедливо соотношение $\beta_j^0 = K_j/D_j + O(D_j^{1+\theta})$. (Величина K_j указана перед формулировкой теоремы 3.) Функция y_j^0 , на которой достигается указанная нижняя грань, удовлетворяет условию $\|y_j^0\|^2 \asymp D_j$, $j = 1, 2, \dots$*

Наметим доказательство. Ясно, что выписанная нижняя грань достигается на функции, линейной на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$; такую функцию можно отождествить с последовательностью $s_k = y(x_k)$. Используя условия теоремы 3, легко свести дело к асимптотической формуле (11). Из нее получаем указанный вид для β_j^0 , а также указанное асимптотическое соотношение для экстремальной функции y_j^0 . Это доказывает лемму.

Обратимся к ограничению формы (7) на $C_0^\infty(b_j, b_{j+1})$, т. е. к форме $T_j(y) = R_j(y) - \beta_j |y(c_j)|^2$. Из определения величины β_j^0 следует, что указанная форма ограничена снизу величиной $(\beta_j^0 - \beta_j) |y(c_j)|^2$. Лемма 6 и неравенства (8) приводят к неравенству $\beta_j^0 - \beta_j > 0$; это доказывает, что $\lambda(b_j, b_{j+1}) > 0$.

Далее, подставив экстремальную функцию y_j^0 в форму T_j , получаем $T_j(y_j^0) = R_j(y_j^0) - \beta_j |y_j^0(c_j)|^2 = \beta_j^0 - \beta_j \leq M_1 D_j^{1+\gamma_1} + O(D_j^{1+\theta}) \leq M_2 D_j^{1+\gamma_1}$. Учитывая соотношение $\|y_j^0\|^2 \asymp D_j$, приходим к неравенству $\lambda(b_j, b_{j+1}) \leq M_3 D_j^{\gamma_1}$. Этим доказано первое из соотношений (10).

Чтобы вывести второе из них, воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 7. *Если $y \in C_0^\infty(a, b)$, $\|y\| = 1$, $L > 0$ и x_k — точки из (a, b) , то*

$$\int_a^b |y'(x)|^2 dx + L \sum_k |y(x_k)|^2 \geq \frac{\gamma_0}{(b-a)} \sqrt{\frac{L}{\delta}}, \quad \delta = \max\{x_k - x_{k-1}\}.$$

Здесь γ_0 — абсолютная константа.

Доказательство. Обозначим левую часть этого неравенства через s . Ясно, что $|y(x_0)| = (b-a)^{-1/2}$ для некоторой точки x_0 . Далее, $|y(x) - y(x_0)| \leq \sqrt{c|x - x_0|}$, откуда следует, что $|y(x)| \geq (1/2)(b-a)^{-1/2}$ в некотором интервале длины $(4(b-a)c)^{-1}$. (Заметим, что $c \geq (\pi/(b-a))^2$; поэтому этот интервал можно выбрать внутри интервала (a, b) .) Значит, $L \sum_k |y(x_k)|^2 \leq s$, где суммирование производится по точкам из указанного интервала. Число таких точек не меньше, чем $(4(b-a)cd)^{-1}$. Поэтому $L(4(b-a))^{-1}(4(b-a)cd)^{-1} \leq s$. Это доказывает лемму.

Из этой леммы следует, что если $y \in C_0^\infty(c_{j-1}, c_j)$, $\|y\| = 1$, то

$$\int_{c_{j-1}}^{c_j} |y'(x)|^2 dx + \sum_k \alpha_k |y(x_k)|^2 \geq \frac{\gamma_0}{c_j - c_{j-1}} \sqrt{\frac{A_j}{D_j}}.$$

Используя ограничения 1) и 3) из п. 2с, приходим ко второму из соотношений (10).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Albeverio, F. Gestztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] J. F. Brasche, *Perturbation of Schrodinger Hamiltonians by measures—selfadjointness and lower semiboundedness*, J. Math. Phys., **26**:4 (1985), 621–626.
- [3] А. Н. Кочубей, *Одномерные точечные взаимодействия*, Укр. матем. ж., **41**:10 (1989), 1391–1395.
- [4] В. А. Михайлец, *Критерий дискретности спектра одномерного оператора Шрёдингера с δ -взаимодействиями*, Функц. анализ и его прил., **28**:4 (1994), 85–87.
- [5] A. Kostenko, M. Malamud, *1-D Schrodinger operators with local point interactions on a discrete set*, J. Differential Equations, **249**:2 (2010), 253–304.
- [6] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*, Труды ММО, **64** (2003), 159–212.
- [7] Р. С. Исмагилов, *Условия полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов*, Докл. АН СССР, **140**:1 (1961), 33–36.
- [8] Р. С. Исмагилов, *О спектре уравнения Штурма–Лиувилля с колеблющимся потенциалом*, Матем. заметки, **37**:6 (1985), 869–879.
- [9] Р. С. Исмагилов, *О непрерывном спектре обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка*, Матем. заметки, **3**:4 (1983), 535–547.
- [10] Р. С. Исмагилов, *О самосопряженности оператора Штурма–Лиувилля*, УМН, **18**:5 (1963), 161–166.

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ismagil@mx.bmstu.ru
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
12 мая 2010 г.