Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, Индексы примыкания особенностей волновых фронтов в пространствах небольших размерностей, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 3, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3012>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 02:51:40

Теорема 3. При условиях (а)–(с) для любого k

$$\sup_{v \in \text{int } \mathbb{R}_+^d} F_1^{(k)}(v) \leq \lambda \leq \inf_{v \in \text{int } \mathbb{R}_+^d} F_2^{(k)}(v). \quad (4)$$

При $k \rightarrow \infty$ левая и правая части неравенства стремятся к λ со скоростью $O(k^{-1})$.

Комментарий. Оценки (4) уже при $k = 1$ улучшают известные оценки для показателя Ляпунова [7]. Функция $F_1(v)$ квазивогнута на $\text{int } \mathbb{R}_+^d$; функция $F_2(e^u)$, где $e^u = (e^{u_1}, \dots, e^{u_d})$, выпукла на $\mathbb{R}^d$. Поэтому обе оценки в (4) при каждом k эффективно вычисляются методами выпуклого программирования даже для больших размерностей d .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Furstenberg, Н. Kesten, Ann. Math. Statist., **31** (1960), 457–469.
 [2] В. Н. Тутубалин, ТВП, **10:1** (1965), 19–32. [3] В. И. Оселедец, Труды ММО, **19** (1968), 179–210. [4] E. Le Page, in: Probability Measures on Groups (Oberwolfach, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 928, 1982, 258–303. [5] W. C. Watkins, Contemp. Math., **50** (1986), 5–29. [6] И. Я. Гольдштейн, Г. А. Маргулис, УМН, **44:5** (1989), 13–60. [7] E. S. Key, J. Theor. Probab., **3:3** (1990), 477–488. [8] Y. Peres, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **28:1** (1992), 131–148. [9] Н. Hennon, Ann. Probab., **25:4** (1997), 1545–1587. [10] В. Ю. Протасов, Изв. РАН, сер. матем., **68:3** (2004), 27–68. [11] Н. Е. Барабанов, Автом. и телемех., 1988, № 2, 40–46. [12] V. Yu. Protasov, Linear Algebra Appl., **428:10** (2008), 2339–2356.

Московский государственный университет
 e-mail: v-protasov@yandex.ru

Поступило в редакцию
 2 декабря 2009 г.

УДК 515.16

Индексы примыкания особенностей волновых фронтов в пространствах небольших размерностей*

© 2010. В. Д. СЕДЫХ

Сначала мы напомним основные понятия теории особенностей лежандровых отображений (подробности см. в [1]).

Пусть E — гладкое (класса C^∞) многообразие нечетной размерности $2n - 1$. Контактными элементами на E называются пары вида (π, x) , где $x \in E$, а $\pi \subset T_x E$ — касательная гиперплоскость в точке x .

Гладкое поле контактных элементов на E называется контактной структурой, если $\omega \wedge (d\omega)^{n-1} \neq 0$ для любой гладкой 1-формы ω , такой, что поле задается (локально) уравнением $\omega = 0$. Интегральные многообразия контактной структуры на E , имеющие наивысшую размерность (равную $n - 1$), называются лежандровыми.

Зафиксируем контактную структуру на многообразии E . Гладкое расслоение $\rho: E \rightarrow B$ называется лежандровым, если все его слои являются лежандровыми подмногообразиями в E . Размерность базы B такого расслоения равна n .

*Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00388.

Пусть ρ — лежандрово расслоение и L — гладкое лежандрово подмногообразие в E . Тогда отображение $f = \rho \circ i: L \rightarrow B$, где $i: L \rightarrow E$ — тождественное вложение, называется лежандровым. Образ отображения f называется (волновым) фронтом. Далее мы рассматриваем лишь собственные лежандровы отображения.

Два лежандровых отображения $f_1 = \rho \circ i_1$ и $f_2 = \rho \circ i_2$ называются лежандрово эквивалентными, если существуют диффеоморфизмы $\Phi: E \rightarrow E$, $\varphi: B \rightarrow B$ и $\varepsilon: L \rightarrow L$, такие, что Φ сохраняет контактную структуру на E , а диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{i_1} & E & \xrightarrow{\rho} & B \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi \\ L & \xrightarrow{i_2} & E & \xrightarrow{\rho} & B \end{array}$$

коммутативна. Класс эквивалентности ростка лежандрова отображения называется (лежандровой) особенностью. Мультиособенностью отображения f в точке $y \in B$ называется неупорядоченный набор особенностей f в попарно различных точках $x \in f^{-1}(y)$.

Снабдим пространство W всех вложений $i: L \rightarrow E$ тонкой C^∞ -топологией Уитни. Мы говорим, что утверждение, касающееся лежандровых отображений, справедливо для отображения $f = \rho \circ i$ общего положения, если существует открытое всюду плотное подмножество $U \subset W$, такое, что это утверждение имеет место для любого $i \in U$.

Согласно [1], особенности лежандровых отображений общего положения в пространстве размерности $n \leq 6$ определяются ростками в нуле лежандровых отображений вида

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\bar{t}, \bar{q}) \mapsto \left(-S(\bar{t}, \bar{q}) + \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} S(\bar{t}, \bar{q}), -\frac{\partial}{\partial \bar{t}} S(\bar{t}, \bar{q}), \bar{q} \right), \quad (1)$$

где $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $\bar{q} = (q_{k+1}, \dots, q_{n-1})$, а $S = S(\bar{t}, \bar{q})$ — гладкая функция одного из следующих типов (μ целое):

$$A_\mu: \quad S = S(t_1, \bar{q}) = t_1^{\mu+1} + q_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + \dots + q_2 t_1^2, \quad 1 \leq \mu \leq n;$$

$$D_\mu^\pm: \quad S = S(t_1, t_2, \bar{q}) = t_1^2 t_2 \pm t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \dots + q_3 t_2^2, \quad 4 \leq \mu \leq n;$$

$$E_6: \quad S = S(t_1, t_2, \bar{q}) = t_1^3 + t_2^4 + q_5 t_1 t_2^2 + q_4 t_1^2 t_2 + q_3 t_2^2, \quad \mu = 6 \leq n.$$

Число μ называется коразмерностью особенности. Если μ нечетно, то особенности типов D_μ^+ и D_μ^- лежандрово эквивалентны (обозначаются через D_μ). В остальных случаях лежандровы особенности перечисленных типов попарно лежандрово не эквивалентны.

Пусть $\mathbb{S}$ — свободная абелева мультипликативная полугруппа, образующими которой служат символы A_μ ($\mu = 1, 2, \dots$), D_{2+2k}^- , D_{2+2k}^+ , D_{3+2k} ($k = 1, 2, \dots$), E_6 . Рассмотрим произвольный неединичный элемент $\mathcal{A} = X_1 \cdots X_p \in \mathbb{S}$, где $X_1, \dots, X_p$ — любой набор образующих полугруппы $\mathbb{S}$.

Отображение f имеет мультиособенность типа $\mathcal{A}$ в точке $y \in B$, если

- 1) $f^{-1}(y)$ состоит из p попарно различных точек;
- 2) существует порядок $x_1, \dots, x_p$ точек из $f^{-1}(y)$, такой, что f имеет в этих точках особенности типов $X_1, \dots, X_p$ соответственно.

Число p точек в $f^{-1}(y)$ обозначается через $\#(\cdot|\mathcal{A})$. Сумма коразмерностей особенностей типов $X_1, \dots, X_p$ называется коразмерностью мультиособенности типа $\mathcal{A}$ и обозначается через $\text{codim } \mathcal{A}$. По определению в точках из дополнения $B \setminus f(L)$ отображение f имеет мультиособенность типа $1_{\mathbb{S}}$ ($1_{\mathbb{S}}$ — единица полугруппы $\mathbb{S}$).

Для лежандрова отображения f общего положения множество $\mathcal{A}_f$ точек $y \in B$, в которых f имеет мультиособенность типа $\mathcal{A}$, является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в B . Мультиособенности лежандровых отображений общего положения в пространство размерности $n \leq 6$ являются мультиособенностями типов $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, у которых $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{S}$ и $\text{codim } \mathcal{B} = c$. Предположим, что отображение f имеет мультиособенность типа $\mathcal{B}$ в точке $y \in B$. Выберем окрестность V начала координат 0 в $\mathbb{R}^c$ и гладкое вложение $h: V \rightarrow B$ так, что $h(0) = y$, а подмногообразие $h(V) \subset B$ трансверсально многообразию $\mathcal{B}_f$ в точке y . Через S_ε обозначим $(c-1)$ -мерную сферу в $\mathbb{R}^c$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в 0 .

Для лежандрова отображения f общего положения существует $\varepsilon_0(f, y, h) > 0$, такое, что все связные компоненты пересечения $h(S_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$ стягиваемы, а их число $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ не зависит от f, y, h и ε , если $\varepsilon < \varepsilon_0(f, y, h)$ (см. §5.3 в [1]). Число $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ называется индексом примыкания мультиособенностей типа $\mathcal{B}$ к мультиособенностям типа $\mathcal{A}$. Говорят, что мультиособенности типа $\mathcal{B}$ примыкают к мультиособенностям типа $\mathcal{A}$, если $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \neq 0$.

Все возможные примыкания мультиособенностей рассматриваемого типа можно найти методами работ [3], [4]. Однако индексы многих из них не были вычислены. Например, в [2, §14] указаны лишь четности индексов примыкания мультиособенностей соседних коразмерностей. В настоящей заметке приводятся формулы, которые позволяют вычислять индексы примыкания всех мультиособенностей коразмерности не выше 6.

Пусть

$$\tilde{J}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \begin{cases} J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), & \text{если } \mathcal{A} \neq \mathcal{B}, \\ 1, & \text{если } \mathcal{A} = \mathcal{B}. \end{cases}$$

Теорема 1. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{S}$ справедливы следующие соотношения:

- 1)
$$\sum_{X \in \mathbb{S}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) J_X(\mathcal{B}) = \begin{cases} 2(-1)^{\text{codim } \mathcal{B}-1} J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), & \text{если } \text{codim } \mathcal{B} \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}, \\ 0, & \text{если } \text{codim } \mathcal{B} \equiv \text{codim } \mathcal{A} + 1 \pmod{2}; \end{cases}$$
- 2)
$$\sum_{X \in \mathbb{S}} (-1)^{\text{codim } X} \tilde{J}_X(\mathcal{A}) = 1;$$
- 3)
$$\sum_{X \in \mathbb{S} \setminus \{1_{\mathbb{S}}\}} (-1)^{\text{codim } X} \#(\cdot|X) \tilde{J}_X(\mathcal{A}) = -\#(\cdot|\mathcal{A});$$
- 4)
$$\tilde{J}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = \sum_{(X,Y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}: X \cdot Y = \mathcal{A}} \tilde{J}_X(\mathcal{B}) \tilde{J}_Y(\mathcal{C}).$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1}^{k_1} \dots A_{\mu_p}^{k_p} \in \mathbb{S}$, где $\mu_1, \dots, \mu_p$ — попарно различные целые положительные числа. Тогда для любого целого положительного μ

$$\tilde{J}_{\mathcal{A}}(A_{\mu}) = \sum_{\substack{0 \leq k_0 \leq N \\ k_0 \equiv N \pmod{2}}} \frac{(k_0 + k_1 + \dots + k_p)!}{k_0! k_1! \dots k_p!}, \quad \text{где } N = \mu + 1 - \sum_{i=1}^p k_i(\mu_i + 1).$$

Теорема 3. *Ненулевые индексы $J_{\mathcal{A}}(D_{\mu}^{\pm})$, $\mu \leq 6$, указаны в следующих таблицах:*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathcal{A} & 1_{\mathbb{S}} & A_1 & A_2 & A_1^2 & A_3 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(D_4^+) & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{array};$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathcal{A} & 1_{\mathbb{S}} & A_1 & A_2 & A_1^2 & A_3 & A_1^3 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(D_4^-) & 7 & 14 & 6 & 9 & 6 & 2 \end{array};$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \mathcal{A} & 1_{\mathbb{S}} & A_1 & A_2 & A_1^2 & A_3 & A_2 A_1 & A_1^3 & D_4^+ & D_4^- & A_4 & A_3 A_1 & A_2 A_1^2 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(D_5) & 6 & 15 & 9 & 12 & 8 & 6 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array};$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \mathcal{A} & 1_{\mathbb{S}} & A_1 & A_2 & A_1^2 & A_3 & A_2 A_1 & A_1^3 & D_4^+ & D_4^- & A_4 & A_3 A_1 & A_2^2 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(D_6^+) & 6 & 16 & 10 & 14 & 10 & 10 & 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 2 \end{array},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathcal{A} & A_2 A_1^2 & D_5 & D_4^+ A_1 & A_3 A_2 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(D_6^+) & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array};$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \mathcal{A} & 1_{\mathbb{S}} & A_1 & A_2 & A_1^2 & A_3 & A_2 A_1 & A_1^3 & D_4^+ & D_4^- & A_4 & A_3 A_1 & A_2^2 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(D_6^-) & 11 & 34 & 20 & 40 & 20 & 26 & 18 & 1 & 3 & 6 & 18 & 4 \end{array},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \mathcal{A} & A_2 A_1^2 & A_1^4 & D_5 & D_4^- A_1 & A_5 & A_3 A_2 & A_3 A_1^2 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(D_6^-) & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}.$$

Теорема 4. *Ненулевые индексы $J_{\mathcal{A}}(E_6)$ указаны в следующей таблице:*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \mathcal{A} & 1_{\mathbb{S}} & A_1 & A_2 & A_1^2 & A_3 & A_2 A_1 & A_1^3 & D_4^+ & D_4^- & A_4 & A_3 A_1 & A_2^2 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(E_6) & 5 & 15 & 11 & 17 & 10 & 16 & 6 & 1 & 1 & 6 & 6 & 2 \end{array},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathcal{A} & A_2 A_1^2 & D_5 & A_5 & A_4 A_1 & A_2^2 A_1 \\ \hline J_{\mathcal{A}}(E_6) & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}.$$

Формулы теоремы 1 следуют из аддитивности эйлеровой характеристики. Теорема 2 определяется свойствами вещественных корней вещественных многочленов от одной переменной. Доказательство основных теорем 3 и 4 сводится к изучению многообразий $f^{-1}(\mathcal{A}_f) \subset L$, $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, таких, что $\dim \mathcal{A}_f = 3$, в случае когда отображение f вида (1) имеет особенность одного из типов $D_4^{\pm}$, D_5 , $D_6^{\pm}$, E_6 в нуле. А именно, мы описываем разбиения замыканий $\bar{f}^{-1}(\mathcal{A}_f)$ на связные компоненты многообразий вида $f^{-1}(\mathcal{B}_f)$, $\mathcal{B} \in \mathbb{S}$ (эти разбиения являются полуалгебраическими стратификациями Уитни).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.
 [2] В. А. Васильев, *Лагранжесвы и лежандровы характеристические классы*, МЦНМО, М., 2000. [3] О. В. Ляшко, Функц. анализ и его прил., **10:2** (1976), 49–56.
 [4] Ю. С. Численко, Функц. анализ и его прил., **22:4** (1988), 52–67.