Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Соболев, Квазиклассическая асимптотика
псевдодифференциальных операторов с разрыв-
ными символами: гипотеза Видома, *Функц. анализ*
и его прил., 2010, том 44, выпуск 4, 86–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3013>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:42:28

492–508. [20] V. Kostrykin, K. Makarov, Proc. Amer. Math. Soc., **136**:6 (2008), 2067–2071. [21] М. Г. Крейн, Матем. сб., **33**:3 (1953), 597–626. [22] И. М. Лифшиц, ЖЭТФ, **17** (1947), 1076–1089. [23] И. М. Лифшиц, Успехи матем. наук, **7**:1 (1952), 171–180. [24] A. Pushnitski, Bull. London Math. Soc., **40**:2 (2008), 227–238. [25] A. Pushnitski, Ann. Henri Poincaré, **10**:4 (2009), 793–822. [26] A. Pushnitski, D. Yafaev, J. Funct. Anal., **259**:8 (2010), 1950–1973. [27] A. Pushnitski, The Birman–Schwinger principle on the essential spectrum, готовится к печати. [28] J. Robbin, D. Salamon, Bull. London Math. Soc., **27**:1 (1995), 1–33. [29] A. V. Sobolev, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **58**:1 (1993), 55–83. [30] Д. Р. Яфаев, Математическая теория рассеяния, Изд-во С.-Петербургского университета, С.-Петербург, 1994.

Department of Mathematics, King's College London
e-mail: alexander.pushnitski@kcl.ac.uk

Поступило в редакцию
13 января 2010 г.

УДК 517.984.42

Квазиклассическая асимптотика псевдодифференциальных операторов с разрывными символами: гипотеза Видома

© 2010. А. В. СОБОЛЕВ

Памяти Михаила Шлемовича Бирмана

1. Для (комплекснозначного) символа $a = a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, и произвольной функции u из класса Шварца введем в $L^2(\mathbb{R}^d)$ псевдодифференциальный оператор

$$(\text{Op}_\alpha a)u(\mathbf{x}) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^d \int e^{i\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

зависящий от большого параметра $\alpha > 0$. Пусть Λ , Ω — две области в $\mathbb{R}^d$ и $\chi_\Lambda(\mathbf{x})$, $\chi_\Omega(\boldsymbol{\xi})$ — их индикаторы. Мы используем обозначение $P_{\Omega,\alpha} = \text{Op}_\alpha(\chi_\Omega)$. В настоящей заметке изучаются оператор

$$T_\alpha(a) = T_\alpha(a; \Lambda, \Omega) = \chi_\Lambda P_{\Omega,\alpha} \text{Op}_\alpha(a) P_{\Omega,\alpha} \chi_\Lambda \quad (2)$$

и его симметризованный вариант

$$S_\alpha(a) = S_\alpha(a; \Lambda, \Omega) = \chi_\Lambda P_{\Omega,\alpha} \text{Re Op}_\alpha(a) P_{\Omega,\alpha} \chi_\Lambda.$$

Нас интересует двучленная асимптотика следов $\text{tr } g(T_\alpha)$, $\text{tr } g(S_\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ с подходящей гладкой функцией g , такой, что $g(0) = 0$. Введем асимптотические коэффициенты

$$\mathfrak{W}_0(a) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_\Lambda \int_\Omega a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \quad (3)$$

$$\mathfrak{W}_1(g; a) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\partial\Lambda} \int_{\partial\Omega} \mathfrak{A}(g; a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) |\mathbf{n}_{\partial\Lambda}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\xi})| dS_\boldsymbol{\xi} dS_\mathbf{x}, \quad (4)$$

где $\mathbf{n}_{\partial\Lambda}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{n}_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\xi})$ — единичные векторы внешних нормалей к границам $\partial\Lambda$ и $\partial\Omega$ в точках $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$ соответственно и

$$\mathfrak{A}(g; b) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^1 \frac{g(bt) - tg(b)}{t(1-t)} dt. \quad (5)$$

Коэффициент $\mathfrak{A}(g; b)$ корректно определен для любого комплексного (вещественного) числа b , если g является C^1 -функцией комплексной (вещественной) переменной.

Цель работы — установить двучленные асимптотические формулы, приведенные в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\Lambda, \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, — ограниченные области в $\mathbb{R}^d$ с C^1 - и C^3 -границами соответственно, и пусть $a \in C_0^{2(d+2)}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

(1) Пусть g аналитична в круге радиуса $R > 0$ и $g(0) = 0$. Если R достаточно велик, то

$$\operatorname{tr} g(T_\alpha(a)) = \alpha^d \mathfrak{W}_0(g(a)) + \alpha^{d-1} \log \alpha \mathfrak{W}_1(g; a) + o(\alpha^{d-1} \log \alpha) \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (6)$$

(2) Пусть $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $g(0) = 0$. Тогда след $\operatorname{tr} g(S_\alpha(a))$ удовлетворяет асимптотической формуле (6), в которой символ a заменен на $\operatorname{Re} a$.

Было бы естественно ожидать, что переменные $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$ в операторе $T_\alpha(a)$ равноправны. В самом деле, в работе [20, с. 173] с помощью элементарных вычислений было показано, что $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$ можно поменять местами. Вместе с тем условия на Λ и Ω в теореме 1 явно асимметричны. В настоящее время неясно, как исправить этот недостаток.

Теорема 1 позволяет вывести асимптотические формулы для функции распределения дискретного спектра оператора $S_\alpha(a)$, т.е. для числа его собственных значений на интервале $I = (\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\lambda_1 \lambda_2 > 0$:

$$n(\lambda_1, \lambda_2; \alpha) = \operatorname{tr} \chi_I(S_\alpha(a)).$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Предположим также, что $a_- < a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) < a_+$ для всех $\mathbf{x} \in \Lambda$, $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ с некоторыми $a_- > 0$, $a_+ < \infty$. Если $[a_-, a_+] \subset I$, то

$$n(\lambda_1, \lambda_2; \alpha) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^d |\Lambda| |\Omega| + \alpha^{d-1} \log \alpha \mathfrak{W}_1(\chi_I; a) + o(\alpha^{d-1} \log \alpha),$$

где коэффициент $\mathfrak{W}_1(\chi_I; a)$ определен в (4) и

$$\mathfrak{A}(\chi_I; a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{(2\pi)^2} \log \left(\frac{a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\lambda_1} - 1 \right) \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty.$$

Если $[\lambda_1, \lambda_2] \subset (0, a_-)$, то

$$n(\lambda_1, \lambda_2; \alpha) = \alpha^{d-1} \log \alpha \mathfrak{W}_1(\chi_I; a) + o(\alpha^{d-1} \log \alpha),$$

где

$$\mathfrak{A}(\chi_I; a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{(2\pi)^2} \log \frac{\lambda_2(a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \lambda_1)}{\lambda_1(a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \lambda_2)} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty.$$

Следствие 2 выводится из теоремы 1 путем аппроксимации χ_I функциями из класса C_0^∞ . Заметим, что в следствии 2 предполагается, что обе точки λ_1, λ_2 лежат вне области значений символа a . Это приводит к двучленной асимптотике

функции распределения. Если это ограничение на λ_1, λ_2 удалить, то теорема 1 обеспечивает только одночленную асимптотику с остатком вида $o(\alpha^d)$.

2. Интерес к псевдодифференциальным операторам с разрывными символами восходит к классической формуле Сегё для определителя тёплицевой матрицы, см. [16] и [7]. Обширная литература посвящена различным содержательным обобщениям формулы Сегё для одномерного случая, см. книги [1], [12] для ознакомления с предметом, обзор [3] результатов, полученных до 2001 г., и недавнюю работу [2], содержащую последние результаты и дополнительные ссылки. Многомерные обобщения *континуального* варианта формулы Сегё были получены в работах [11], [17], [18]. В статье [18] рассматривается более общая задача: вместо определителя изучаются подходящие аналитические функции оператора, а также допускаются матричные символы. Для $\Omega = \mathbb{R}^d$ и $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi})$ показано, что

$$\operatorname{tr} g(T_\alpha(a)) = \alpha^d V_0 + \alpha^{d-1} V_1 + o(\alpha^{d-1}) \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где коэффициенты V_0, V_1 вычислены явно, причем в скалярном случае $V_0 = \mathfrak{W}_0(g(a))$. Член порядка α^{d-2} был найден в работе [13] при дополнительных условиях гладкости на границу $\partial\Lambda$.

Когда $\Lambda \neq \mathbb{R}^d$ и $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, т.е. у символа есть скачки по обоим переменным, формула (7) неприменима. Вместо нее Видом в работе [19] предложил в качестве гипотезы формулу (6). Эта гипотеза была доказана в [19] для $d = 1$. В многомерном случае асимптотика (6) была обоснована в [20] при условии, что одна из областей — полупространство, а функция g аналитична в круге достаточно большого радиуса. После работы [20] было лишь небольшое число публикаций с частичными результатами. С помощью абстрактного варианта формулы Сегё с оценкой остатка (см. [9], [10]) в работах [4], [5] была установлена точная оценка

$$\operatorname{tr} g(T_\alpha(a)) - \alpha^d \mathfrak{W}_0(g(a)) = O(\alpha^{d-1} \log \alpha). \quad (8)$$

В статье [6] было замечено, что формула (6) связана с поведением энтропии сцепленности свободных фермионов в основном состоянии. Как объяснено в [6], изучаемая энтропия находится по формуле $\operatorname{tr} h(\chi_\Lambda P_{\Omega, \alpha} \chi_\Lambda)$ с некоторыми ограниченными областями Λ, Ω и функцией

$$h(t) = -t \log t - (1-t) \log(1-t), \quad t \in (0, 1). \quad (9)$$

Поскольку $h(0) = h(1) = 0$, главный член в (6), т.е. $\mathfrak{W}_0(h(1))$, обращается в нуль, и формула (6) дает $\alpha^{d-1} \log \alpha$ -асимптотику следа, которая совпадает с ожидаемым квазиклассическим ростом энтропии. Однако формула (6) неприменима к негладким функциям и, в частности, к функции (9). С другой стороны, в недавней статье [8] асимптотика (6) была доказана для квадратичной функции g . Если $g(t) = t - t^2$, то эта формула описывает рост дисперсии числа частиц, что обеспечивает правильную по порядку оценку снизу для энтропии сцепленности.

Ранее в [14] были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора $T_\alpha(1)$ в случае, когда обе области Λ и Ω — шары в $\mathbb{R}^d$. Однако эти результаты не помогают изучать след $\operatorname{tr} g(T_\alpha(1))$.

3. Полное доказательство теоремы 1 приведено в работе [15]. В настоящей заметке мы даем краткое описание его основных этапов. Доказательство распадается на две неравные части. Решающая, более трудная часть состоит в обосновании асимптотики (6) для полиномиальных функций g .

Теорема 3. Пусть области Λ , Ω и символ a такие же, как в теореме 1. Тогда асимптотика (6) справедлива при $g(t) = t^p$, где число $p = 1, 2, \dots$ произвольно.

Как только эта теорема доказана, асимптотика замыкается с помощью точной оценки (8), полученной в [4], [5].

Доказательство теоремы 3 включает следующие этапы:

1. Оценки ядерных норм псевдодифференциальных операторов с разрывными символами.
2. Анализ задачи для $d = 1$.
3. Геометрическая оценка.
4. Сведение исходной задачи к случаю $d = 1$.

Наиболее сложным и важным является шаг 4. Здесь мы делим область Λ на *граничный слой*, который дает вклад в первый и во второй члены асимптотики (6), и *внутреннюю часть*, которая влияет только на главный член. Затем мы строим две функции (обозначаемые через $q^\downarrow = q^\downarrow(\mathbf{x})$ и $q^\uparrow = q^\uparrow(\mathbf{x})$ соответственно), образующие разбиение единицы, подчиненное соответствующему покрытию области. Интересно отметить, что толщина граничного слоя не зависит от α . Асимптотика $\text{tr}(q^\uparrow g(T_\alpha))$, $\alpha \rightarrow \infty$, не «чувствует» границы, и относительно стандартные квазиклассические соображения приводят к формуле

$$\text{tr}(q^\uparrow g(T_\alpha)) = \alpha^d \mathfrak{W}_0(q^\uparrow g(a)) + O(\alpha^{d-1}), \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Чтобы справиться со следом $\text{tr}(q^\downarrow g(T_\alpha))$, мы строим покрытие граничного слоя открытыми множествами специальной формы. Для каждого из этих множеств граница $\partial\Lambda$ аппроксимируется касательной гиперплоскостью, что позволяет рассмотреть оператор T_α как псевдодифференциальный оператор на граничной гиперплоскости, символ которого является оператором того же типа, но в размерности один. Эта редукция приводит к шагу 2 нашего плана. Одномерная ситуация была изучена в работе [19]. Хотя ее результаты не применимы напрямую, предложенный в ней метод позволяет вывести требуемую асимптотику. Это приводит к формуле

$$\text{tr}(q^\downarrow g(T_\alpha)) = \alpha^d \mathfrak{W}_0(q^\downarrow g(a)) + \alpha^{d-1} \log \alpha \mathfrak{W}_1(\mathfrak{A}(g; a)) + o(\alpha^{d-1} \log \alpha), \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Складывая (10) и (11), получаем (6).

Сведение к одномерной задаче опирается на результат геометрического характера, который стоит в приведенном списке под номером 3. Он состоит в следующем. Представляя $\xi \in \mathbb{R}^d$ в виде $\xi = (\hat{\xi}, t)$, где $\hat{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$, $t = \xi_d$, введем для каждого $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$ множество

$$\Omega(\hat{\xi}) = \{t : (\hat{\xi}, t) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}.$$

Если оно непусто, это счетное объединение открытых интервалов, длины которых мы обозначаем через $\rho_j = \rho_j(\hat{\xi})$, $j = 1, 2, \dots$. В случае если $\Omega(\hat{\xi})$ пусто, положим $\rho_j(\hat{\xi}) = \infty$. Решающее наблюдение состоит в том, что при достаточной гладкости границы $\partial\Omega$ функция

$$m_\delta(\hat{\xi}) = \sum_j \rho_j(\hat{\xi})^{-\delta} \quad (12)$$

принадлежит $L^1(\mathbb{R}^{d-1})$ для любого $\delta \in (0, 2)$.

С технической точки зрения шаги 2 и 4 основаны на оценках ядерных норм, полученных на первом шаге. Здесь нам приходится строить квазиклассическое исчисление псевдодифференциальных операторов с разрывными символами с явным контролем их свойств относительно масштабных преобразований.

Уместно сравнить наше доказательство с приведенным в работе Видома [20], в которой асимптотика (6) была обоснована в случае, когда Λ (или Ω) — полупространство. Наш план совпадает с планом Видома в [20]. С другой стороны, относительный вес четырех составляющих меняется. Так, если Λ — полупространство, то сведение к одномерному случаю (т.е. шаг 4) происходит практически мгновенно, тогда как в настоящей работе в случае произвольных Λ такое сведение вызывает серьезные затруднения. Далее, в [20] на шаге 3 было достаточно получить геометрическую оценку для $\delta = 1$. Нам такая оценка необходима для $\delta > 1$. Кроме того, вывод оценок ядерных норм в [20] опирается на предположение, что Λ — полупространство, а этого, очевидно, недостаточно для наших рассуждений. Что касается асимптотики для одномерного случая (т.е. шага 2), то наши оценки, по-видимому, более информативны, так как помимо зависимости от параметра α они позволяют следить за зависимостью от масштабных преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2006. [2] P. Deift, A. Its, I. Krasovsky, <http://arxiv.org/abs/0905.0443v2>. [3] T. Ehrhardt, in: Recent Advances in Operator Theory (Groningen, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 124, Birkhäuser, Basel, 2001, 217–241. [4] D. Gioev, *Generalizations of Szegő Limit Theorem: Higher Order Terms and Discontinuous Symbols*, PhD Thesis, Dept. of Math., Royal Inst. of Technology (KTH), Stockholm, 2001. [5] D. Gioev, Int. Math. Res. Not., 2006, Art. ID 95181. [6] D. Gioev, I. Klich, Phys. Rev. Lett., **96**:10 (2006), id. 100503. [7] U. Grenander, G. Szegő, *Toeplitz Forms and Their Applications*, Univ. of California Press, Berkeley–Los Angeles, 1958. [8] R. C. Helling, H. Leschke, W. L. Spitzer, <http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnq085>. [9] A. Laptev, Yu. Safarov, in: Contemporary Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 69–79. [10] A. Laptev, Yu. Safarov, J. Funct. Anal., **138**:2 (1996), 544–559. [11] И. Ю. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., **39**:6 (1975), 1393–1403. [12] N. K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems: an Easy Reading. Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002. [13] R. Roccaforte, Trans. Amer. Math. Soc., **285**:2 (1984), 581–602. [14] D. Slepian, Bell System Tech. J., **43** (1964), 3009–3057. [15] A. V. Sobolev, <http://arxiv.org/1004.2576v1>. [16] G. Szegő, Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem., 1952, Suppl. vol. M. Riesz, 228–238. [17] H. Widom, Trans. Amer. Math. Soc., **94**:1 (1960), 170–180. [18] H. Widom, J. Funct. Anal., **39** (1980), 182–198. [19] H. Widom, in: Toeplitz Centennial (Tel Aviv, 1981), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 4, Birkhäuser, Basel–Boston, Mass., 1982, 477–500. [20] H. Widom, J. Funct. Anal., **88**:1 (1990), 166–193.