Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Сафаров, Н. Д. Филонов, Асимптотические оценки разности считающих функций задач Дирихле и Неймана, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 4, 54–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:34:30

Асимптотические оценки разности считающих функций задач Дирихле и Неймана*

© 2010. Ю. Г. САФАРОВ, Н. Д. ФИЛОНОВ

Памяти М. Ш. Бирмана

В работе рассматриваются задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в ограниченной области в евклидовом пространстве. Обсуждаются оценки для разности считающих функций $N_N(\lambda) - N_D(\lambda)$.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — открытое ограниченное множество, $d \geq 2$, и пусть Δ_D и Δ_N — операторы Лапласа в Ω с краевыми условиями Дирихле и Неймана соответственно. Напомним, что самосопряженные неотрицательные операторы $-\Delta_D$ и $-\Delta_N$ порождаются квадратичной формой $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ с областями определения $W_{2,0}^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$. Здесь $W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева, а $W_{2,0}^1(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме W_2^1 . Отметим, что эти операторы корректно определены даже для негладкой границы $\partial\Omega$.

В дальнейшем мы используем индекс В вместо D или N, когда соответствующие результаты применимы и в случае задачи Дирихле, и в случае задачи Неймана. Обозначим через $N_B(\lambda)$ функцию распределения собственных значений (*считающую функцию*) оператора $-\Delta_B$,

$$N_B(\lambda) := \text{rank } P_\lambda(-\Delta_B),$$

где $P_\lambda(-\Delta_B)$ — спектральный проектор оператора $-\Delta_B$, отвечающий интервалу $[0, \lambda^2)$. Поскольку вложение $W_{2,0}^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно, число $N_D(\lambda)$ конечно при всех λ . Считающая функция $N_N(\lambda)$ может обращаться в бесконечность. Например, если Ω является объединением счетного числа открытых непересекающихся множеств, то $\dim \ker(-\Delta_N) = \infty$ и $N_N(\lambda) = \infty$ при всех $\lambda > 0$.

Целью настоящей работы является получение двусторонних оценок разности $N_N(\lambda) - N_D(\lambda)$ при больших λ . Если граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая и билиардный поток в Ω удовлетворяет условию неперiodичности (см. §1), то выполняются асимптотические формулы Вейля

$$N_D(\lambda) = \kappa_d |\Omega|_d \lambda^d - \frac{1}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega|_{d-1} \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (0.1)$$

$$N_N(\lambda) = \kappa_d |\Omega|_d \lambda^d + \frac{1}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega|_{d-1} \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (0.2)$$

Здесь $|\cdot|_n$ обозначает n -мерный объем множества, $\kappa_n := (2\pi)^{-n} \omega_n$, а ω_n — объем n -мерного единичного шара. Из этих формул вытекает, что

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) = \frac{1}{2} \kappa_{d-1} |\partial\Omega|_{d-1} \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

*Работа выполнена при поддержке EPSRC, грант GR/T25552/01.

Однако (0.1) и (0.2) могут нарушаться по следующим причинам:

(а) Граница $\partial\Omega$ не является достаточно гладкой. Известно множество примеров областей с негладкой границей, для которых двучленная вейлевская формула неверна.

(б) Граница $\partial\Omega$ гладкая, но условие неперериодичности не выполнено. Не исключено, что это препятствие чисто техническое, так как неизвестно, существуют ли такие области (см. замечание 1.3).

В настоящей работе мы докажем следующие оценки:

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \leq C_\Omega \lambda^{(d-1)/\alpha} \quad \text{при } \partial\Omega \in C^\alpha, \alpha \in (0, 1),$$

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \leq C_\Omega \lambda^{d-1} \ln \lambda, \quad \text{если } \partial\Omega \text{ липшицева,}$$

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \geq C_\Omega \lambda^{d-4} |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d^{-1} \quad \text{для произвольной области } \Omega,$$

где $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon\}$. Из последнего неравенства вытекает, в частности, что

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \rightarrow \infty \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \text{ для всех } d \geq 4.$$

Для областей с гладкой границей мы получим более точную оценку:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega|_{d-1} \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}) &\leq N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \\ &\leq \frac{3}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega|_{d-1} \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

не накладывая условие неперериодичности.

Через C_d и C_Ω мы обозначаем различные постоянные, зависящие от размерности d или от области Ω .

§1. Асимптотические формулы Вейля

Предположим, что граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, и обозначим через n_x единичный вектор внутренней нормали к границе в точке x . Через $S\overline{\Omega}$ обозначим расслоение сфер над $\overline{\Omega}$,

$$S\overline{\Omega} := \{(x, \xi) : x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| = 1\},$$

и положим

$$S_+ \overline{\Omega} := \{(x, \xi) \in S\overline{\Omega} : \text{либо } x \in \Omega, \text{ либо } x \in \partial\Omega \text{ и } \xi \cdot n_x > 0\}.$$

Для $(x, \xi) \in S_+ \overline{\Omega}$ рассмотрим траекторию

$$(x(t), \xi(t)) := (x + t\xi, \xi) = (x(t), \dot{x}(t)), \quad t > 0.$$

Ясно, что $(x(t), \xi(t)) \in S_+ \overline{\Omega}$ при достаточно малых t . Если траектория $x(t)$ достигает границы в момент t_0 , мы отражаем ее от границы по законам геометрической оптики и при $t > t_0$ определяем $\xi(t)$ как единичный касательный вектор отраженной траектории. Продолжая эту процедуру, мы получим билиардную траекторию $(x(t), \xi(t))$ в $S_+ \overline{\Omega}$, состоящую из отрезков вида $(x + t\xi, \xi)$. Билиардным потоком называется семейство отображений $\Phi_t : S_+ \overline{\Omega} \mapsto S_+ \overline{\Omega}$, определяемых формулой $\Phi_t(x, \xi) := (x(t), \xi(t))$. Известно, что отображения Φ_t корректно определены для всех $t \geq 0$ на множестве полной меры и что Φ_t сохраняет стандартную меру $dx d\xi$ на $S_+ \overline{\Omega}$. Точные определения и доказательства этих результатов можно найти, например, в [1, гл. 6] или [10].

Точка $(x, \xi) \in S_+ \overline{\Omega}$ называется периодической, если $\Phi_T(x, \xi) = (x, \xi)$ при некотором $T > 0$. Пусть $\Pi \subset S_+ \overline{\Omega}$ — множество периодических точек потока Φ_t . Условие непериодичности состоит в том, что

$$|\Pi|_{2d-1} := \int_{\Pi} dx d\xi = 0.$$

Теорема 1.1. *Если бильiardный поток Φ_t удовлетворяет условию непериодичности, то выполняются асимптотические формулы Вейля (0.1) и (0.2).*

Замечание 1.2. Теорема 1.1 была доказана Иврием в [5] для бесконечно гладких границ $\partial\Omega$ (детальное и относительно простое доказательство можно найти также в [10]). Позднее Иврий распространил результат на множества Ω с границами из гёльдерова класса C^α , $\alpha > 1$ (см. [6]).

Замечание 1.3. Правдоподобна гипотеза, что $|\Pi|_{2d-1} = 0$ для всех областей Ω с достаточно гладкой границей. Не известно ни одного контрпримера, и вместе с тем авторам известны только два результата в положительном направлении. А именно, $|\Pi|_{2d-1} = 0$, если

- (i) $\partial\Omega$ аналитична и выпукла (см. [12] или [10, лемма 1.3.19]);
- (ii) $\partial\Omega$ кусочно гладкая и вогнутая (см. [11, теорема 2]). В частности, это верно для многогранников.

При $|\Pi|_{2d-1} > 0$ асимптотическое поведение считающих функций может зависеть от свойств периодических траекторий. Оказывается, есть две характеристики, влияющие на второй член асимптотики. Первая из них — наименьший период $T(x, \xi)$ периодической траектории, начинающейся из $(x, \xi) \in \Pi$. Вторая — так называемый полный сдвиг фазы $q_B(x, \xi)$ вдоль периодической траектории $\gamma(x, \xi) := \{\Phi_t(x, \xi)\}_{t \in [0, T(x, \xi)]}$. Сдвиг фазы зависит от граничных условий. Точное определение сдвига фазы $q_B(x, \xi)$ дано в [10], где также показано, что множество Π и функции $T(x, \xi)$, $q_B(x, \xi)$ измеримы.

Для $\tau \in \mathbb{R}$ положим $\{\tau\}_{2\pi} = \tau + 2\pi k$, где k — такое целое число, что $\tau + 2\pi k \in (-\pi, \pi]$. Введем обозначение

$$Q_B(\lambda) := (2\pi)^{-d} \int_{\Pi} \frac{\{\pi - q_B(x, \xi) - \lambda T(x, \xi)\}_{2\pi}}{T(x, \xi)} dx d\xi. \quad (1.1)$$

Следующая теорема доказана в [4] (см. также [10, разд. 1.7]).

Теорема 1.4. *Если $\partial\Omega \in C^\infty$, то существует такая функция $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, что*

$$N_D(\lambda) \leq \kappa_d |\Omega| \lambda^d - \frac{1}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega| \lambda^{d-1} + Q_D(\lambda + h(\lambda)) \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad (1.2)$$

$$N_D(\lambda) \geq \kappa_d |\Omega| \lambda^d - \frac{1}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega| \lambda^{d-1} + Q_D(\lambda - h(\lambda)) \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad (1.3)$$

$$N_N(\lambda) \leq \kappa_d |\Omega| \lambda^d + \frac{1}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega| \lambda^{d-1} + Q_N(\lambda + h(\lambda)) \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad (1.4)$$

$$N_N(\lambda) \geq \kappa_d |\Omega| \lambda^d + \frac{1}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega| \lambda^{d-1} + Q_N(\lambda - h(\lambda)) \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}) \quad (1.5)$$

и $h(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Отметим, что функция Q_B может быть разрывной. Поэтому, вообще говоря, из правых частей неравенств нельзя исключить $h(\lambda)$ (см. обсуждение в [10, разд. 1.7]).

§2. Оценки для областей с гладкой границей

Теорема 2.1. Если $\partial\Omega \in C^\infty$, то

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \leq \frac{3}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega|_{d-1} \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \geq \frac{1}{4} \kappa_{d-1} |\partial\Omega|_{d-1} \lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Доказательство. Обозначим через $B_{\partial\Omega}$ множество пар (x', ξ') , таких, что $x' \in \partial\Omega$, а ξ' является касательным вектором к $\partial\Omega$ в точке x' , причем $|\xi'| < 1$. Для каждой пары $(x', \xi') \in B_{\partial\Omega}$ существует единственный вектор $\theta(\xi')$, такой, что $(x', \theta(\xi')) \in S_+ \overline{\Omega}$ и вектор $\theta(\xi') - \xi'$ ортогонален к $\partial\Omega$ и направлен внутрь множества Ω . Биллиардные траектории $\Phi_t(x', \theta(\xi'))$, начинающиеся из всех таких точек, покрывают в $S_+ \overline{\Omega}$ множество полной меры. Более того, если мы параметризуем $S_+ \overline{\Omega}$ числом $t \in \mathbb{R}$ и парой $(x', \xi') \in B_{\partial\Omega}$, то $dx d\xi = dt dx' d\xi'$, где dx' — стандартная мера на $\partial\Omega$ [1, гл. 6].

Пусть $\Pi_k \subset S_+ \overline{\Omega}$ — множество таких точек $(x, \xi) \in \Pi$, что соответствующие минимальные траектории $\gamma(x, \xi)$ содержат ровно k отражений. Положим

$$M_k = \{(x', \xi') \in B_{\partial\Omega} : (x', \theta(\xi')) \in \Pi_k\}.$$

Рассмотрим множество

$$\widehat{\Pi}_k := \{(t, x', \xi') : (x', \xi') \in M_k, 0 \leq t < T(x', \theta(\xi'))\}$$

и отображение $\Psi_k : (t, x', \xi') \mapsto (x, \xi) := \Phi_t(x', \theta(\xi'))$ из $\widehat{\Pi}_k$ в Π_k . Ясно, что прообраз $\Psi_k^{-1}(x, \xi)$ любой точки $(x, \xi) \in \Pi_k$ состоит из k различных точек множества $\widehat{\Pi}_k$. Далее,

$$\int_V dt dx' d\xi' = \int_{\Psi_k(V)} dx d\xi$$

для любого измеримого множества $V \subset \widehat{\Pi}_k$, такого, что сужение $\Psi_k|_V$ является биекцией. Следовательно,

$$\int_{\Pi_k} f(x, \xi) dx d\xi = k^{-1} \int_{\widehat{\Pi}_k} f(\Psi_k(t, x', \xi')) dt dx' d\xi'$$

для всех измеримых функций $f : \Pi_k \mapsto \mathbb{R}_+$.

В частности, если $f(x, \xi) = 1/T(x, \xi)$, то, интегрируя по t , получаем

$$\int_{\Pi_k} \frac{dx d\xi}{T(x, \xi)} = k^{-1} \int_{\widehat{\Pi}_k} \frac{dt dx' d\xi'}{T(\Psi_k(t, x', \xi'))} = k^{-1} \int_{M_k} dx' d\xi'.$$

Множества Π_k не пересекаются, поэтому интеграл в правой части (1.1) равен сумме интегралов по Π_k . Учитывая неравенство $|\{\pi - q_B(x, \xi) - \lambda T(x, \xi)\}_{2\pi}| \leq \pi$ и предыдущее тождество, получим

$$|Q_B(\lambda)| \leq (2\pi)^{-d} \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \int_{M_k} dx' d\xi'. \quad (2.3)$$

Очевидно, что $M_1 = \emptyset$. Легко показать, что $|M_2|_{2d-2} = 0$. Наконец, согласно [13], $|M_3|_{2d-2} = 0$. Таким образом,

$$|Q_B(\lambda)| \leq (2\pi)^{-d} \frac{\pi}{4} \sum_{k=4}^{\infty} \int_{M_k} dx' d\xi' \leq (2\pi)^{-d} \frac{\pi}{4} \int_{B_{\partial\Omega}} dx' d\xi' = \frac{1}{8} \kappa_{d-1} |\partial\Omega|.$$

Эта оценка и формулы (1.2)–(1.5) завершают доказательство. $\square$

Замечание 2.2. По-видимому, теорема 1.4 верна при $\partial\Omega \in C^\alpha$ с $\alpha > 1$ (ср. замечание 1.2). Если это так, то и теорема 2.1 остается в силе для таких областей.

Замечание 2.3. Теорему 1.4 можно распространить на случай оператора Лапласа на римановом многообразии Ω с краем. Если мера множества периодических траекторий, лежащих внутри $\Omega \setminus \partial\Omega$, равна нулю, то те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.1, приводят к (2.3). В этом случае, сделав дополнительные предположения о мере множеств Π_k при малых k , можно доказать неравенства, аналогичные (2.1) и (2.2).

§3. Негладкие границы: оценки сверху

Чтобы оценить разность $N_N - N_D$ сверху, мы оценим функцию N_D снизу, а N_N сверху. Первое сравнительно просто (см. [8, теорема 1.8], а также [9, (3.18)]).

Теорема 3.1 [8]. *Для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*

$$|N_D(\lambda) - \kappa_d |\Omega|_d \lambda^d| \leq C_d \lambda^{d-1} \int_0^\lambda |\Omega_{t-1}| dt \quad \forall \lambda > 0, \quad (3.1)$$

где

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon\}.$$

Если граница $\partial\Omega$ липшицева, то $|\Omega_\varepsilon|_d \sim \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и

$$\lambda^{d-1} \int_0^\lambda |\Omega_{t-1}| dt = O(\lambda^{d-1} \ln \lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Если $\partial\Omega \in C^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, то

$$\lambda^{d-1} \int_0^\lambda |\Omega_{t-1}| dt = O(\lambda^{d-\alpha}), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

(см. [8, лемма 4.4]).

Оценить функцию N_N в случае негладких областей существенно труднее. Наиболее общие результаты в этом направлении, насколько известно авторам, получены в [8] и [7]. Формулировки этих результатов достаточно сложны; оказывается, что асимптотическое поведение функции $N_N(\lambda)$ зависит от тонких свойств границы. В частности, в [8] содержится следующая

Теорема 3.2. *Если граница $\partial\Omega$ липшицева, то*

$$N_N(\lambda) = \kappa_d |\Omega|_d \lambda^d + O(\lambda^{d-1} \ln \lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Если $\partial\Omega \in C^\alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$, то

$$N_N(\lambda) = \kappa_d |\Omega|_d \lambda^d + O(\lambda^{(d-1)/\alpha}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Поскольку $(d-1)/\alpha \geq d-\alpha$ при всех $\alpha \in (0, 1)$, из оценок (3.1), (3.3) и (3.5) вытекает, что

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \leq C_\Omega \lambda^{(d-1)/\alpha} \quad \forall \lambda > 1, \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad (3.6)$$

если $\partial\Omega \in C^\alpha$. Из (3.1), (3.2) и (3.4) следует, что для областей с липшицевой границей

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \leq C_\Omega \lambda^{d-1} \ln \lambda \quad \forall \lambda > 2. \quad (3.7)$$

§ 4. Негладкие границы: оценки снизу

Теорема 4.1. При $d \geq 4$ существует такая константа $C_\Omega > 0$, что

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \geq C_\Omega \lambda^{d-4} |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d^{-1} \quad \forall \lambda > 0. \quad (4.1)$$

Отметим, что $|\Omega_\varepsilon|_d \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как $\bigcap_{\varepsilon > 0} \Omega_\varepsilon = \emptyset$, $|\Omega_\varepsilon|_d \leq |\Omega|_d < \infty$ и $\Omega_\delta \subset \Omega_\varepsilon$ при $\delta \leq \varepsilon$. Таким образом, из теоремы 4.1 вытекает, что

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty \quad \forall d \geq 4. \quad (4.2)$$

В случае липшицевых границ (4.1) означает, что

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \geq C_\Omega \lambda^{d-3}. \quad (4.3)$$

Замечание 4.2. В размерностях $d = 2, 3$ оценки (4.1) и (4.3) не содержательны, так как $N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \geq 1$ при всех $d \geq 2$ (это неравенство доказано в [3] для областей Ω с гладкой границей, а в [2] распространено на случай произвольных ограниченных открытых множеств Ω).

Замечание 4.3. Логично предположить, что разность $N_N(\lambda) - N_D(\lambda)$ растет тем быстрее, чем меньше гладкость границы Ω . Поэтому, ввиду теоремы 2.1, вероятно, что (4.2) верно во всех размерностях $d \geq 2$. Более того, гипотетически $N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \geq C_\Omega \lambda^{d-1}$ при всех $d \geq 2$ для любого ограниченного открытого множества Ω . Однако на данный момент мы не видим способов доказательства этих гипотез.

Замечание 4.4. Напомним, что $W_{2,0}^1(\Omega)$ является подпространством пространства $W_2^1(\Omega)$ бесконечной коразмерности. Можно было бы предположить, что разность считающих функций двух неотрицательных операторов, порожденных одной и той же квадратичной формой с двумя такими областями определения, всегда стремится к бесконечности. Однако это не так. Можно предъявить положительную функцию g на $\mathbb{R}$ и два плотных линейала D_1, D_2 в $L_2(\mathbb{R})$, такие, что

- D_1 является подпространством в D_2 бесконечной коразмерности;
- $\int_{\mathbb{R}} g(t) |u'(t)|^2 dt < \infty$ для всех $u \in D_2$;
- D_1 и D_2 замкнуты по отношению к форме $\int_{\mathbb{R}} g(t) |u'(t)|^2 dt$;
- считающие функции операторов, отвечающих сужениям этой формы на D_1 и D_2 , совпадают на неограниченном подмножестве множества $\mathbb{R}_+$.

Доказательство теоремы 4.1 проводится в несколько шагов.

Шаг 1. Обозначим через $L_D(\lambda)$ подпространство пространства $W_{2,0}^1(\Omega)$, натянутое на собственные функции оператора $-\Delta_D$, отвечающие собственным значениям $\lambda_k < \lambda^2$. Предположим, что L — такое подпространство в $W_2^1(\Omega)$, что

$$L \cap L_D(\lambda) = \{0\}, \quad -\Delta v = \lambda^2 v \quad \text{и} \quad \lambda^2 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 > \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \text{при всех } v \in L \setminus \{0\}. \quad (4.4)$$

Если $u \in L_D(\lambda)$, $v \in L$ и $u + v \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \|\nabla(u+v)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \nabla u, \nabla v \rangle) dx \\ &< \lambda^2 \int_{\Omega} (|u|^2 + |v|^2) dx - 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} u \overline{\Delta v} dx = \lambda^2 \|u+v\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ясно, что $\dim(L_D(\lambda) + L) = N_D(\lambda) + \dim L$. В силу вариационного принципа

$$N_N(\lambda) = \max\{\dim F : F \subset W_2^1(\Omega), \|\nabla f\|^2 < \lambda^2 \|f\|^2 \text{ при всех } f \in F \setminus \{0\}\},$$

откуда следует, что

$$N_N(\lambda) \geq N_D(\lambda) + \dim L. \quad (4.5)$$

На пятом шаге мы построим подпространство L , удовлетворяющее условиям (4.4), и оценим его размерность. Оно состоит из некоторых линейных комбинаций функций специального вида $u_{\sigma_m, j}$, которые мы построим на следующем шаге.

Шаг 2. Пусть $\hat{\chi}$ — преобразование Фурье характеристической функции χ множества Ω . Фиксируем положительные константы δ и $C_{\delta, \Omega}$ так, чтобы

$$|\hat{\chi}(\theta)| \geq C_{\delta, \Omega} \quad \text{при } |\theta| \leq \delta$$

(это возможно, так как функция $\hat{\chi}$ непрерывна и $\hat{\chi}(0) = (2\pi)^{-d/2} |\Omega|_d > 0$).

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^d$ и $|\xi| = \lambda$, $\lambda > \delta/2$. Положим

$$S_\delta(\xi) := \{\eta \in \mathbb{R}^d : |\eta| = |\xi|, |\eta - \xi| = \delta\}.$$

Ясно, что $S_\delta(\xi)$ — это $(d-2)$ -мерная сфера, объем которой не зависит от ξ . Будем писать $|S_\delta(\lambda)|_{d-2} := |S_\delta(\xi)|_{d-2}$.

Теперь рассмотрим наборы $\sigma_m := \{\xi_j^{(p)}\}_{j=1, \dots, m}^{p=1, 2}$, состоящие из $2m$ точек $\xi_j^{(p)} \in \mathbb{R}^d$, причем $|\xi_j^{(p)}| = \lambda$ и $\xi_j^{(2)} \in S_\delta(\xi_j^{(1)})$. Такие наборы образуют $(2d-3)m$ -мерное многообразие $\Sigma_{\delta, m}(\lambda)$, объем которого равен

$$|\Sigma_{\delta, m}(\lambda)|_{(2d-3)m} = ((d-1)\omega_{d-1}\lambda^{d-1}|S_\delta(\lambda)|_{d-2})^m.$$

Для данного набора $\sigma_m = \{\xi_j^{(p)}\}_{j=1, \dots, m}^{p=1, 2} \in \Sigma_{\delta, m}(\lambda)$ определим функции

$$u_{\sigma_m, j}(x) = (2\pi)^{-d/4} (e^{ix \cdot \xi_j^{(1)}} + \zeta(\xi_j^{(2)} - \xi_j^{(1)}) e^{ix \cdot \xi_j^{(2)}}), \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\zeta(\theta) := \hat{\chi}(\theta)|\hat{\chi}(\theta)|^{-1}$. Поскольку $\lambda^2 - \xi_j^{(p)} \cdot \xi_k^{(q)} = \frac{1}{2} |\xi_j^{(p)} - \xi_k^{(q)}|^2$, имеем

$$\begin{aligned} & |\lambda^2 (u_{\sigma_m, j}, u_{\sigma_m, k})_{L_2(\Omega)} - (\nabla u_{\sigma_m, j}, \nabla u_{\sigma_m, k})_{L_2(\Omega)}| \\ & \leq (2\pi)^{-d/2} \sum_{p, q=1, 2} |\lambda^2 (e^{ix \cdot \xi_j^{(p)}}, e^{ix \cdot \xi_k^{(q)}})_{L_2(\Omega)} - (\nabla e^{ix \cdot \xi_j^{(p)}}, \nabla e^{ix \cdot \xi_k^{(q)}})_{L_2(\Omega)}| \\ & = \frac{1}{2} \sum_{p, q=1, 2} |\xi_j^{(p)} - \xi_k^{(q)}|^2 |\hat{\chi}(\xi_j^{(p)} - \xi_k^{(q)})| \end{aligned} \quad (4.6)$$

при всех $j \neq k$ и

$$\lambda^2 \|u_{\sigma_m, j}\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|\nabla u_{\sigma_m, j}\|_{L_2(\Omega)}^2 = |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|^2 |\hat{\chi}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})| \geq C_{\delta, \Omega} \delta^2 \quad \forall j \quad (4.7)$$

благодаря выбору δ .

Шаг 3. Пусть L'_{σ_m} — подпространство в $W_2^1(\Omega)$, натянутое на все функции $u_{\sigma_m,j}$. Очевидно, что $-\Delta u = \lambda^2 u$ при $u \in L'_{\sigma_m}$. Если все точки $\xi_j^{(p)}$, $p = 1, 2$, $j = 1, \dots, m$, в σ_m различны, то функции $u_{\sigma_m,j}$ линейно независимы и $\dim L'_{\sigma_m} = m$. Обозначим множество точек $\sigma_m \in \Sigma_{\delta,m}(\lambda)$, таких, что

$$\dim L'_{\sigma_m} = m \quad \text{и} \quad L'_{\sigma_m} \cap L_D(\lambda) = \{0\},$$

через $\Sigma_{\delta,m}^{(1)}(\lambda)$. Это множество всюду плотно в $\Sigma_{\delta,m}(\lambda)$.

Если $v \in L'_{\sigma_m}$ и $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_{\sigma_m,j}$, то

$$\lambda^2 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 = (B_{\sigma_m} \vec{\alpha}, \vec{\alpha})_{C^m}, \quad (4.8)$$

где $\vec{\alpha}$ — это столбец $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$, а B_{σ_m} — эрмитова $m \times m$ -матрица с элементами

$$b_{jk} := \lambda^2 (u_{\sigma_m,j}, u_{\sigma_m,k})_{L_2(\Omega)} - (\nabla u_{\sigma_m,j}, \nabla u_{\sigma_m,k})_{L_2(\Omega)}.$$

Пусть $\tilde{B}_{\sigma_m}$ — диагональная матрица с элементами $b_{11}, \dots, b_{mm}$. Согласно (4.7),

$$\tilde{B}_{\sigma_m} \geq C_{\delta,\Omega} \delta^2 I. \quad (4.9)$$

Из оценки (4.6) вытекает, что

$$\|B_{\sigma_m} - \tilde{B}_{\sigma_m}\|_2^2 = \sum_{j \neq k} |b_{jk}|^2 \leq \sum_{j \neq k} \sum_{p,q=1,2} |\xi_j^{(p)} - \xi_k^{(q)}|^4 |\hat{\chi}(\xi_j^{(p)} - \xi_k^{(q)})|^2,$$

где $\|\cdot\|_2$ — норма Гильберта–Шмидта.

Шаг 4. При $d \geq 3$ и $\lambda > 0$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{\delta,m}(\lambda)} \left(\sum_{j \neq k} \sum_{p,q=1,2} |\xi_j^{(p)} - \xi_k^{(q)}|^4 |\hat{\chi}(\xi_j^{(p)} - \xi_k^{(q)})|^2 \right) d\xi_1^{(1)} d\xi_1^{(2)} \dots d\xi_m^{(1)} d\xi_m^{(2)} \\ & \leq C_d |\Sigma_{\delta,m}(\lambda)|_{(2d-3)m} m^2 \lambda^{4-d} |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Доказательство оценки (4.10) проводится прямым вычислением (см. §5).

Шаг 5. Из оценки (4.10) вытекает, что существует такое непустое открытое множество $\Sigma_{\delta,m}^{(2)}(\lambda) \subset \Sigma_{\delta,m}(\lambda)$, что

$$\|B_{\sigma_m} - \tilde{B}_{\sigma_m}\|_2^2 < C_d m^2 \lambda^{4-d} |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d \quad \forall \sigma_m \in \Sigma_{\delta,m}^{(2)}(\lambda). \quad (4.11)$$

Напомним, что квадрат нормы Гильберта–Шмидта матрицы совпадает с суммой квадратов ее собственных значений. Поэтому оценка (4.11) означает, что количество собственных значений матрицы $B_{\sigma_m} - \tilde{B}_{\sigma_m}$, лежащих в интервале $(-\infty, -C_{\delta,\Omega} \delta^2]$, не превосходит $C'_{\delta,\Omega} \delta^{-4} m^2 \lambda^{4-d} |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d$. Отсюда и из (4.9) следует, что B_{σ_m} имеет по крайней мере $m - C'_{\delta,\Omega} \delta^{-4} m^2 \lambda^{4-d} |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d$ положительных собственных значений при $\sigma_m \in \Sigma_{\delta,m}^{(1)}(\lambda) \cap \Sigma_{\delta,m}^{(2)}(\lambda)$.

Фиксируем $\sigma_m \in \Sigma_{\delta,m}^{(1)}(\lambda) \cap \Sigma_{\delta,m}^{(2)}(\lambda)$. Пусть L_{σ_m} — подпространство в $W_2^1(\Omega)$, натянутое на соответствующие собственные векторы матрицы B_{σ_m} . Тогда, согласно (4.8), L_{σ_m} удовлетворяет условиям (4.4) и

$$\dim L_{\sigma_m} \geq m - C'_{\delta,\Omega} \delta^{-4} m^2 \lambda^{4-d} |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d.$$

Оптимизируя правую часть по m , получим $\dim L_{\sigma_m} \geq C\Omega\lambda^{d-4}|\Omega_{\lambda^{-1}}|_d^{-1}$ при достаточно больших λ . Эта оценка и (4.5) завершают доказательство неравенства (4.1). $\square$

§5. Приложение. Доказательство неравенства (4.10)

Мы выведем (4.10) из следующих двух лемм.

Лемма 5.1. *При всех $d \geq 1$ и $\lambda > 0$ выполняется оценка*

$$\int_{|\theta| \leq 2\lambda} |\theta|^2 |\hat{\chi}(\theta)|^2 d\theta \leq 9\lambda^2 |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d.$$

Доказательство. Введем функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \setminus \Omega_{\lambda^{-1}}, \\ \lambda \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), & x \in \Omega_{\lambda^{-1}}, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \lambda|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d;$$

поэтому $\psi \in W_\infty^1(\mathbb{R}^d)$ и $\|\nabla\psi\|_{L_\infty} = \lambda$. Функция $\chi - \psi$ равна нулю вне $\Omega_{\lambda^{-1}}$, откуда вытекает, что

$$\int_{|\theta| \leq 2\lambda} |\theta|^2 |\hat{\chi}(\theta) - \hat{\psi}(\theta)|^2 d\theta \leq 4\lambda^2 \|\hat{\chi} - \hat{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = 4\lambda^2 \|\chi - \psi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 4\lambda^2 |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d.$$

Градиент $\nabla\psi$ также равен нулю вне $\Omega_{\lambda^{-1}}$, следовательно,

$$\int_{|\theta| \leq 2\lambda} |\theta|^2 |\hat{\psi}(\theta)|^2 d\theta \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\theta|^2 |\hat{\psi}(\theta)|^2 d\theta = \|\nabla\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \lambda^2 |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d.$$

Эти оценки и элементарное неравенство $|\hat{\chi}|^2 \leq 3|\hat{\psi}|^2 + \frac{3}{2}|\hat{\chi} - \hat{\psi}|^2$ доказывают лемму. $\square$

Лемма 5.2. *Если $d \geq 2$, то*

$$\int_{|\xi|=\lambda} \int_{|\eta|=\lambda} f(\xi - \eta) d\xi d\eta = (d-1)\omega_{d-1}\lambda^2 \int_{|\theta| \leq 2\lambda} f(\theta)|\theta|^{-1}(\lambda^2 - |\theta|^2/4)^{(d-3)/2} d\theta \quad (5.1)$$

при всех $\lambda > 0$, $f \in C(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Пусть $r \in (0, \lambda]$. Сначала рассмотрим интеграл от $f(\xi - \eta)$ по произведению шаров $\{\xi : |\xi| < \lambda\}$ и $\{\eta : |\eta| < r\}$. Делая замену $\xi = \eta + \theta$, получаем

$$\int_{|\xi| < \lambda} \int_{|\eta| < r} f(\xi - \eta) d\xi d\eta = \int_{|\theta| < \lambda+r} f(\theta) F(\theta) d\theta, \quad (5.2)$$

где $F(\theta)$ — объем пересечения шаров $\{\eta \in \mathbb{R}^d : |\eta| < r\}$ и $\{\eta \in \mathbb{R}^d : |\theta + \eta| < \lambda\}$.

Ясно, что $F(\theta) = \omega_d r^d$ при $|\theta| \leq \lambda - r$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$F(\theta) = (d-1)\omega_{d-1} \left(\int_0^{\rho} (\sqrt{\lambda^2 - s^2} + \sqrt{r^2 - s^2} - |\theta|) s^{d-2} ds + 2 \int_{\rho}^r \sqrt{r^2 - s^2} s^{d-2} ds \right)$$

при $\lambda - r < |\theta| \leq \sqrt{\lambda^2 - r^2}$ и

$$F(\theta) = (d-1)\omega_{d-1} \int_0^\rho (\sqrt{\lambda^2 - s^2} + \sqrt{r^2 - s^2} - |\theta|) s^{d-2} ds$$

при $\sqrt{\lambda^2 - r^2} < |\theta| \leq \lambda + r$, где введено обозначение

$$\rho = \rho(\lambda, r, \theta) := (2|\theta|)^{-1} \sqrt{2\lambda^2 r^2 + 2\lambda^2 |\theta|^2 + 2r^2 |\theta|^2 - \lambda^4 - r^4 - |\theta|^4}. \quad (5.3)$$

Дифференцируя (5.2) по λ и учитывая полученную для F формулу, имеем

$$\int_{|\xi|=\lambda} \int_{|\eta|<r} f(\xi - \eta) d\xi d\eta = (d-1)\omega_{d-1} \lambda \int_{\lambda-r < |\theta| < \lambda+r} f(\theta) \left(\int_0^\rho \frac{s^{d-2} ds}{\sqrt{\lambda^2 - s^2}} \right) d\theta. \quad (5.4)$$

Наконец, дифференцируя (5.4) по r , приходим к равенству

$$\int_{|\xi|=\lambda} \int_{|\eta|=r} f(\xi - \eta) d\xi d\eta = (d-1)\omega_{d-1} \lambda r \int_{\lambda-r < |\theta| < \lambda+r} f(\theta) |\theta|^{-1} \rho^{d-3} d\theta. \quad (5.5)$$

Подставляя $r = \lambda$ в (5.3) и (5.5), получаем (5.1). $\square$

При $d \geq 3$ правая часть формулы (5.1) не превосходит

$$(d-1)\omega_{d-1} \lambda^{d-1} \int_{|\theta| \leq 2\lambda} f(\theta) |\theta|^{-1} d\theta.$$

Поэтому из леммы 5.1 и леммы 5.2, примененной к функции $f(\theta) = |\theta|^4 |\hat{\chi}(\theta)|^2$, вытекает, что

$$\int_{|\eta|=\lambda} \int_{|\xi|=\lambda} |\xi - \eta|^4 |\hat{\chi}(\xi - \eta)|^2 d\xi d\eta \leq 18(d-1)\omega_{d-1} \lambda^{d+2} |\Omega_{\lambda^{-1}}|_d \quad (5.6)$$

при всех $d \geq 3$ и $\lambda > 0$.

Чтобы доказать (4.10), заметим, что

$$\int_{|\xi|=\lambda} d\xi \int_{\eta \in S_\delta(\xi)} g(\xi) d\eta = |S_\delta(\lambda)|_{d-2} \int_{|\xi|=\lambda} g(\xi) d\xi = \int_{|\xi|=\lambda} d\xi \int_{\eta \in S_\delta(\xi)} g(\eta) d\eta$$

для всех непрерывных функций g . Следовательно, для всех непрерывных f имеем

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi^{(1)}|=\lambda} d\xi^{(1)} \int_{\xi^{(2)} \in S_\delta(\xi^{(1)})} d\xi^{(2)} \int_{|\eta^{(1)}|=\lambda} d\eta^{(1)} \int_{\eta^{(2)} \in S_\delta(\eta^{(1)})} d\eta^{(2)} \sum_{p,q=1,2} f(\xi^{(p)} - \eta^{(q)}) \\ & = 4|S_\delta(\lambda)|_{d-2}^2 \int_{|\xi|=\lambda} \int_{|\eta|=\lambda} f(\xi - \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_{\delta,m}(\lambda)} \sum_{j \neq k} \sum_{p,q=1,2} f(\xi_j^{(p)} - \xi_k^{(q)}) d\xi_1^{(1)} \dots d\xi_m^{(2)} \\
 &= m(m-1) \int_{\Sigma_{\delta,m}(\lambda)} \sum_{p,q=1,2} f(\xi_1^{(p)} - \xi_2^{(q)}) d\xi_1^{(1)} \dots d\xi_m^{(2)} \\
 &= 4m(m-1)((d-1)\omega_{d-1}\lambda^{d-1})^{m-2} |S_\delta(\lambda)|_{d-2}^m \int_{|\xi|=\lambda} \int_{|\eta|=\lambda} f(\xi - \eta) d\xi d\eta \\
 &= 4m(m-1)((d-1)\omega_{d-1}\lambda^{d-1})^{-2} |\Sigma_{\delta,m}(\lambda)|_{(2d-3)m} \int_{|\xi|=\lambda} \int_{|\eta|=\lambda} f(\xi - \eta) d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Подставляя в это равенство $f(\theta) = |\theta|^4 |\hat{\chi}(\theta)|^2$ и применяя (5.6), приходим к (4.10).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
- [2] Н. Филонов, *Об одном неравенстве на собственные числа задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа*, Алгебра и анализ, **16**:2 (2004), 172–176.
- [3] L. Friedlander, *Some inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal., **116**:2 (1991), 153–160.
- [4] Т. Е. Гуреев, Ю. Г. Сафаров, *Точная асимптотика спектра оператора Лапласа на многообразии с периодическими геодезическими*, в сб.: Краевые задачи математической физики, 13, Труды МИАН СССР, **179** (1988), 36–53.
- [5] В. Я. Иврий, *О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа–Бельтрами на многообразиях с краем*, Функц. анализ и его прил., **14**:2 (1980), 25–34.
- [6] V. Ivrii, *Sharp spectral asymptotics for operators with irregular coefficients. II. Domains with boundary and degeneration*, Comm. Partial Differential Equations, **28**:1–2 (2003), 103–128.
- [7] Yu. Netrusov, *Sharp remainder estimates in the Weyl formula for the Neumann Laplacian on a class of planar regions*, J. Funct. Anal., **250**:1 (2007), 21–41.
- [8] Yu. Netrusov, Yu. Safarov, *Weyl asymptotic formula for the Laplacian on domains with rough boundaries*, Commun. Math. Phys., **253**:2 (2005), 481–509.
- [9] Yu. Safarov, *Fourier Tauberian theorems and applications*, J. Funct. Anal., **185**:1 (2001), 111–128.
- [10] Yu. Safarov, D. Vassiliev, *The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators*, Translation of Math. Monographs, vol. 155, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [11] Д. Г. Васильев, *Двулученная асимптотика спектра краевой задачи в случае кусочно гладкой границы*, Докл. АН СССР, **286**:5 (1986), 1043–1046.
- [12] Д. Г. Васильев, *Двулученная асимптотика спектра краевой задачи при внутреннем отражении общего вида*, Функц. анализ и его прил., **18**:4 (1984), 1–13.
- [13] Я. Б. Воробец, *О мере множества периодических точек бильярда*, Матем. заметки, **55**:5 (1994), 25–35.

Department of Mathematics, King's College London,
e-mail: yuri.safarov@kcl.ac.uk

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
e-mail: filonov@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
1 января 2010 г.