Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Пушницкий, Целочисленная версия формулы
Бирмана–Крейна, *Функц. анализ и его прил.*, 2010,
том 44, выпуск 4, 80–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:41:24

Целочисленная версия формулы Бирмана–Крейна

© 2010. А. Б. Пушницкий

Посвящается памяти М. Ш. Бирмана

1. Введение. В классической работе [5] М. Ш. Бирмана и М. Г. Крейна было доказано следующее тождество (известное сейчас как формула Бирмана–Крейна):

$$e^{-2\pi i \xi(\lambda)} = \det S(\lambda). \quad (1)$$

Здесь $S(\lambda)$ и $\xi(\lambda)$ — матрица рассеяния и функция спектрального сдвига пары операторов в гильбертовом пространстве, а $\lambda \in \mathbb{R}$ — спектральный параметр; точные определения будут даны в разд. 2 и 3. Тождество (1) было впервые найдено в [22], [9], [10] в некоторых важных частных случаях; в работе [5] оно было выделено как абстрактная теорема математической теории рассеяния.

Формула Бирмана–Крейна инвариантна относительно добавления целочисленного слагаемого к $\xi(\lambda)$. Таким образом, можно сказать, что (1) зависит лишь от дробной части функции $\xi(\lambda)$; информация о ее целой части «теряется». Цель этой заметки — сформулировать и обсудить тождество (см. (18) ниже), которое может быть интерпретировано как целочисленный вариант формулы Бирмана–Крейна.

В разд. 2 и 3 даются необходимые определения. Основной результат сформулирован в разд. 4. Доказательства будут опубликованы в [27].

Автор благодарен Д. Р. Яфаеву, Т. А. Суслиной, Б. Дейвису и Н. Д. Филонову за полезные обсуждения и замечания по тексту работы.

2. Функции $\xi(\lambda)$ и $\Xi(\lambda)$.

2.1. Наивное определение. Всюду в дальнейшем A и B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$; мы предполагаем, что разность

$$V = B - A$$

является компактным оператором. Для простоты изложения мы также считаем, что A и B ограничены. Из компактности оператора V , в частности, вытекает, что существенные спектры операторов A и B совпадают: $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B)$. Обозначим через $E_A(\lambda)$ спектральный проектор оператора A , соответствующий интервалу $(-\infty, \lambda)$, и пусть

$$N_A(\lambda) := \text{rank } E_A(\lambda) = \text{Tr } E_A(\lambda) \leq \infty$$

— функция распределения спектра оператора A . При $\lambda < \inf \sigma_{\text{ess}}(A)$ разность

$$N_A(\lambda) - N_B(\lambda) \quad (2)$$

корректно определена, поскольку обе функции $N_A(\lambda)$ и $N_B(\lambda)$ конечны. Разность (2) описывает сдвиги собственных значений оператора B по отношению к

собственным значениям оператора A . Для $\lambda > \inf \sigma_{\text{ess}}(A)$ разность (2) формально дает $\infty - \infty$. Ниже мы обсуждаем две регуляризации функции (2): функцию спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ и функцию индекса $\Xi(\lambda)$.

2.2. Функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$. Предположим, что разность $V = B - A$ является ядерным оператором. Тогда (см. [23], [21]) имеет место следующая формула следов Лифшица–Крейна:

$$\text{Tr}(\varphi(B) - \varphi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t) \xi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (3)$$

Здесь $\xi(\cdot) = \xi(\cdot; B, A)$ — однозначно определенная функция класса $L^1(\mathbb{R})$, называемая функцией спектрального сдвига (ФСС). Подробное изложение теории ФСС можно найти в [6] или в [30, гл. 8].

Формально положив $\varphi = \chi_{(-\infty, \lambda)}$ (где $\chi_{(-\infty, \lambda)}$ — характеристическая функция интервала $(-\infty, \lambda)$), получим

$$\xi(\lambda; B, A) = \text{Tr}(E_A(\lambda) - E_B(\lambda)) = \text{Tr} E_A(\lambda) - \text{Tr} E_B(\lambda) = N_A(\lambda) - N_B(\lambda), \quad (4)$$

коль скоро правая часть корректно определена. В частности, это вычисление нетрудно обосновать при $\lambda < \inf \sigma_{\text{ess}}(A)$. Это показывает, что $\xi(\lambda)$ является естественной регуляризацией разности $N_A(\lambda) - N_B(\lambda)$.

2.3. Индекс пары проекторов. Пусть P, Q — ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве; рассмотрим спектр разности $P - Q$. Очевидно, что $\sigma(P - Q) \subset [-1, 1]$. Используя коммутационное соотношение

$$W(P - Q) = -(P - Q)W, \quad W = I - P - Q,$$

нетрудно показать (см. [3, теорема 4.2]), что

$$\dim \text{Ker}(P - Q - \lambda I) = \dim \text{Ker}(P - Q + \lambda I), \quad \lambda \neq \pm 1. \quad (5)$$

Пара P, Q называется *фредгольмовой*, если

$$\{1, -1\} \cap \sigma_{\text{ess}}(P - Q) = \emptyset. \quad (6)$$

В частности, если разность $P - Q$ компактна, то пара P, Q фредгольмова. Индекс фредгольмовой пары определяется формулой

$$\text{index}(P, Q) = \dim \text{Ker}(P - Q - I) - \dim \text{Ker}(P - Q + I). \quad (7)$$

Заметим, что $\text{index}(P, Q)$ совпадает с фредгольмовым индексом оператора QP , рассматриваемого как отображение из $\text{Ran } P$ в $\text{Ran } Q$, см. [3, предложение 3.1].

Если оператор $P - Q$ ядерный, то

$$\text{index}(P, Q) = \text{Tr}(P - Q), \quad (8)$$

поскольку в силу (5) все собственные значения оператора $P - Q$, кроме 1 и -1 , в ряде $\text{Tr}(P - Q) = \sum_k \lambda_k(P - Q)$ сокращаются. Следовательно, в простейшем случае проекторов P, Q конечного ранга имеем

$$\text{index}(P, Q) = \text{rank } P - \text{rank } Q. \quad (9)$$

2.4. Функция индекса $\Xi(\lambda)$. Предположим, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ пара $E_A(\lambda), E_B(\lambda)$ является фредгольмовой. Тогда будем говорить, что индекс $\Xi(\lambda) = \Xi(\lambda; B, A)$ существует, и определим его формулой

$$\Xi(\lambda; B, A) = \text{index}(E_A(\lambda), E_B(\lambda)). \quad (10)$$

Функция $\Xi(\lambda; B, A)$ уже возникала в литературе в различных формах (см., например, [1], [2], [4], [8], [11], [13]–[17], [19], [28], [29]); систематический обзор ее свойств с полными доказательствами можно найти в [25].

При $\lambda < \inf \sigma_{\text{ess}}(A)$ оба проектора $E_A(\lambda)$, $E_B(\lambda)$ имеют конечный ранг, и поэтому в силу (9)

$$\Xi(\lambda; B, A) = N_A(\lambda) - N_B(\lambda), \quad \lambda < \inf \sigma_{\text{ess}}(A).$$

Таким образом, функция $\Xi(\lambda)$, наряду с $\xi(\lambda)$, является естественной регуляризацией разности $N_A(\lambda) - N_B(\lambda)$. Используя интеграл Рисса для спектральных проекторов и резольвентное тождество, нетрудно доказать, что для всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(A)$ разность $E_A(\lambda) - E_B(\lambda)$ компактна и потому индекс $\Xi(\lambda)$ существует. Ниже также дается критерий существования индекса $\Xi(\lambda)$ на существенном спектре операторов A и B , см. теорему 1.

2.5. Сравнение функций ξ и Ξ .

1. Если V — ядерный оператор, то

$$\Xi(\lambda) = \xi(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(A).$$

В частности, это равенство верно при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, если $\dim \mathcal{H} < \infty$.

2. Функция $\Xi(\lambda)$ всегда принимает целочисленные значения. Если λ принадлежит существенному спектру операторов A и B , то $\xi(\lambda)$, вообще говоря, принимает вещественные значения.

3. Если V — ядерный оператор, то ФСС $\xi(\lambda)$ корректно определена при п. в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Функция $\Xi(\lambda)$ может не существовать на множестве положительной меры, даже если V — оператор ранга один; см. [20]. С другой стороны, ее существование не требует условий ядерного типа.

3. Матрица рассеяния.

3.1. Условие усиленной гладкости. Ниже мы делаем некоторые предположения, типичные для гладкой теории рассеяния, которая восходит к работам [12] и [18]. Зафиксируем компактный интервал $\Delta = [a, b] \subset \mathbb{R}$ и предположим, что спектр оператора A в Δ чисто абсолютно непрерывен и имеет постоянную кратность $N \leq \infty$. Используя терминологию книги [30], мы предполагаем, что оператор $G = |V|^{1/2}$ является усиленно A -гладким на Δ с некоторым показателем $\gamma \in (0, 1]$. Это означает следующее. Пусть $\mathcal{N}$ — гильбертово пространство, $\dim \mathcal{N} = N$, а $\mathcal{F}$ — унитарный оператор из $\text{Ran } E_A(\Delta)$ в $L^2(\Delta, \mathcal{N})$, который диагонализует оператор A : если $f \in \text{Ran } E_A(\Delta)$, то

$$(\mathcal{F}Af)(\lambda) = \lambda(\mathcal{F}f)(\lambda), \quad \lambda \in \Delta. \quad (11)$$

Усиленная A -гладкость оператора G на интервале Δ означает, что оператор

$$G_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} GE_A(\Delta): \text{Ran } E_A(\Delta) \rightarrow \mathcal{H}$$

можно представить в виде

$$(\mathcal{F}G_\Delta^*\psi)(\lambda) = Z(\lambda)\psi \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \lambda \in \Delta, \quad (12)$$

где $Z = Z(\lambda): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{N}$ — семейство компактных операторов, удовлетворяющих условиям

$$\|Z(\lambda)\| \leq C, \quad \|Z(\lambda) - Z(\lambda')\| \leq C|\lambda - \lambda'|^\gamma, \quad \lambda, \lambda' \in \Delta. \quad (13)$$

3.2. Матрица рассеяния. Если описанное выше условие усиленной гладкости выполнено, то локальные волновые операторы

$$W_{\pm} = W_{\pm}(A, B; \Delta) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itB} e^{-itA} E_A(\Delta)$$

существуют и полны, т. е. $\text{Ran } W_+ = \text{Ran } W_- = \text{Ran } E_B^{(\text{ac})}(\Delta)$; здесь $E_B^{(\text{ac})}(\cdot)$ обозначает абсолютно непрерывную часть спектральной меры оператора B . Локальный оператор рассеяния $\mathbf{S} = W_+^* W_-$ унитарен в $\text{Ran } E_A(\Delta)$ и коммутирует с A . Таким образом, имеем представление

$$(\mathcal{F} \mathbf{S} \mathcal{F}^* f)(\lambda) = S(\lambda) f(\lambda) \quad \text{при п. в. } \lambda \in \Delta,$$

где оператор $S(\lambda): \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ называется матрицей рассеяния для пары A, B . Матрица рассеяния — унитарный оператор в $\mathcal{N}$. При сделанных выше предположениях можно доказать, что оператор $S(\lambda) - I$ компактен при всех $\lambda \in \Delta$. Таким образом, спектр матрицы рассеяния $S(\lambda)$ состоит из собственных значений $e^{i\theta_n(\lambda)}$ на единичной окружности, которые могут накапливаться лишь в точке 1. Далее, можно доказать, что $S(\lambda)$ непрерывно зависит от параметра λ по операторной норме. Подробности можно найти в оригинальных работах [12], [18], в обзоре [7] или в книге [30].

3.3. Спектральный поток матрицы рассеяния $S(\lambda)$. Напомним определение спектрального потока семейства $\{S(\lambda)\}_{\lambda \in [a, b]}$. Спектральный поток — целочисленная функция параметра $\mu \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Наивное определение спектрального потока можно сформулировать так. Для $\theta \in (0, 2\pi)$ пусть $N_+(\lambda, \theta)$ — количество собственных значений (с учетом кратностей) матрицы рассеяния $S(\lambda)$, пересекающих точку $e^{i\theta}$ против часовой стрелки, а $N_-(\lambda, \theta)$ — количество ее собственных значений, пересекающих эту точку по часовой стрелке, когда λ монотонно растет от a до b . Тогда положим

$$\text{sp. flow}(e^{i\theta}; \{S(\lambda)\}_{\lambda \in [a, b]}) = N_+(\lambda, \theta) - N_-(\lambda, \theta). \quad (14)$$

Собственные значения матрицы рассеяния $S(\lambda)$ могут пересекать точку $e^{i\theta}$ бесконечное количество раз, и поэтому приведенное выше определение должно быть заменено на более строгое. Ниже мы приводим одно из возможных строгих определений спектрального потока; в литературе можно найти и другие подходы к этому объекту, см., например, [2], [28].

Введем обозначение для функции распределения спектра матрицы рассеяния $S(\lambda)$. Для $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$ положим

$$N(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}; S(\lambda)) = \sum_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} \dim \text{Ker}(S(\lambda) - e^{i\theta} I), \quad \text{если } \theta_1 < \theta_2,$$

и

$$N(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}; S(\lambda)) = -N(e^{i\theta_2}, e^{i\theta_1}; S(\lambda)), \quad \text{если } \theta_1 > \theta_2.$$

Предположим сначала, что можно выбрать $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ так, что $e^{i\theta_0} \notin \sigma(S(\lambda))$ при всех $\lambda \in [a, b]$. Тогда спектральный поток семейства $\{S(\lambda)\}_{\lambda \in [a, b]}$ определяется формулой

$$\text{sp. flow}(e^{i\theta}; \{S(\lambda)\}_{\lambda \in [a, b]}) = N(e^{i\theta}, e^{i\theta_0}; S(b)) - N(e^{i\theta}, e^{i\theta_0}; S(a)). \quad (15)$$

Очевидно, что результат такого определения не зависит от выбора θ_0 и согласуется с наивным определением (14), коль скоро последнее имеет смысл.

Вообще говоря, может оказаться, что невозможно выбрать θ_0 , как указано выше. Однако, используя стандартное рассуждение, основанное на компактности интервала $[a, b]$, всегда можно выбрать точки $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = b$ так, что для каждого из подынтервалов $\Delta_i = [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ точка θ_0 с указанными свойствами существует. Таким образом, спектральный поток для каждого из соответствующих семейств $\{S(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta_i}$ корректно определен. Теперь положим

$$\text{sp. flow}(e^{i\theta}; \{S(\lambda)\}_{\lambda \in [a, b]}) = \sum_{i=1}^n \text{sp. flow}(e^{i\theta}; \{S(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta_i}). \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что результат такого определения не зависит от выбора подынтервалов Δ_i и согласуется с наивным определением (14).

4. Основной результат.

4.1. Формулировка результатов. Первый предварительный результат относится к вопросу существования индекса $\Xi(\lambda)$ на непрерывном спектре.

Теорема 1 [24]. *Предположим, что на некотором интервале $\Delta = [a, b]$ спектр оператора A чисто абсолютно непрерывен и имеет постоянную кратность, а также выполнено условие усиленной гладкости (12), (13). Тогда для всех $\lambda \in (a, b)$ имеем*

$$\sigma_{\text{ess}}(E_B(\lambda) - E_A(\lambda)) = [-\alpha(\lambda), \alpha(\lambda)], \quad \alpha(\lambda) = \frac{1}{2} \|S(\lambda) - I\|.$$

В частности, индекс $\Xi(\lambda; B, A)$ существует тогда и только тогда, когда $-1 \notin \sigma(S(\lambda))$.

Отметим, что в работе [26] имеется также описание абсолютно непрерывного спектра разности $E_B(\lambda) - E_A(\lambda)$ в терминах спектра матрицы рассеяния $S(\lambda)$.

Когда λ непрерывно возрастает на интервале Δ , собственные значения матрицы рассеяния $S(\lambda)$ двигаются по единичной окружности и величина $\alpha(\lambda)$ непрерывно меняется с изменением λ . В соответствии с теоремой 1 индекс $\Xi(\lambda)$ существует тогда и только тогда, когда $\alpha(\lambda) < 1$, т.е. тогда и только тогда, когда спектр оператора $S(\lambda)$ не содержит точку -1 .

Дальнейший несложный анализ, основанный на стабильности индекса, показывает, что функция $\Xi(\lambda)$ постоянна на интервалах, где $-1 \notin \sigma(S(\lambda))$. Таким образом, целочисленная функция $\Xi(\lambda)$ может терпеть скачок лишь в точках λ , где $-1 \in \sigma(S(\lambda))$. Это наводит на следующий естественный вопрос: какова величина скачка функции $\Xi(\lambda)$, когда собственное значение матрицы рассеяния $S(\lambda)$ пересекает -1 ? Наш основной результат дает ответ на этот вопрос. Утверждается, что величина скачка равна $+n$, если собственное значение кратности n пересекает точку 1 по часовой стрелке, и $-n$, если собственное значение кратности n пересекает 1 против часовой стрелки. Более точно:

Теорема 2. *Предположим, что на некотором интервале $\Delta = [a, b]$ спектр оператора A чисто абсолютно непрерывен и имеет постоянную кратность, а также выполнено условие усиленной гладкости (12), (13). Зафиксируем точки $\lambda_1, \lambda_2 \in (a, b)$, $\lambda_1 < \lambda_2$, и предположим, что $-1 \notin \sigma(S(\lambda_1))$ и $-1 \notin \sigma(S(\lambda_2))$. Тогда*

$$\Xi(\lambda_2; B, A) - \Xi(\lambda_1; B, A) = -\text{sp. flow}(-1; \{S(\lambda)\}_{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]}). \quad (17)$$

Доказательство будет опубликовано в [27]. Оно основано, грубо говоря, на построении непрерывной деформации пары операторов A, B в пару операторов, которая имеет «инфинитезимальную лауну в спектре» в точке $\lambda \in (a, b)$. Эта деформация, вместе с принципом Бирмана–Швингера, позволяет вычислить индекс $\Xi(\lambda; B, A)$ в терминах некоторых вспомогательных операторов. Это вычисление позволяет связать его с функцией распределения спектра $N(-1, e^{i\theta_0}; S(\lambda))$. Отсюда уже нетрудно вывести (17).

Теорему 2 нетрудно обобщить на некоторый класс неограниченных операторов A, B . Во многих интересных частных случаях абсолютно непрерывные спектры операторов A и B содержат полуось $[0, \infty)$ и норма $\|S(\lambda) - I\|$ стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда можно устремить λ_2 к $+\infty$ в формуле (17); это дает

$$\Xi(\lambda; B, A) = \text{sp. flow}(-1; \{S(\lambda')\}_{\lambda' \in [\lambda, \infty)}). \quad (18)$$

Это тождество подробно обсуждается в [27] для случая операторов $A = -\Delta$, $B = -\Delta + V$ с быстро убывающим потенциалом V в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$.

4.2. Сравнение (18) с формулой Бирмана–Крейна. Обозначим через $\{e^{i\theta_n(\lambda)}\}$ собственные значения матрицы рассеяния $S(\lambda)$, отличные от единицы. Для того чтобы сравнить тождество (18) с формулой Бирмана–Крейна (1), перепишем последнюю формулу в виде

$$\xi(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \sum_n \theta_n(\lambda) \pmod{1}. \quad (19)$$

Как отмечено в разд. 2, левые части формул (18) и (19) суть различные регуляризации разности $N_A(\lambda) - N_B(\lambda)$. Правые части формул (18) и (19) — различные величины, связанные со спектром матрицы рассеяния. Тождество (18) связывает два целых числа. В тождестве (19) приравниваются два вещественных числа по модулю 1. Таким образом, в некотором (возможно, еще не до конца понятном) смысле эти два тождества являются взаимодополняющими.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Alama, P. A. Deift, R. Hempel, Comm. Math. Phys., **121**:2 (1989), 291–321.
- [2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **79**:1 (1976), 71–99. [3] J. Avron, R. Seiler, B. Simon, J. Funct. Anal., **120**:1 (1994), 220–237.
- [4] N. A. Azamov, A. L. Carey, F. A. Sukochev, Comm. Math. Phys., **276**:1 (2007), 51–91.
- [5] М. Ш. Бирман, М. Г. Крейн, ДАН СССР, **144**:3 (1962), 475–478. [6] М. Ш. Бирман, Д. Р. Яфаев, Алгебра и анализ, **4**:5 (1992), 1–44. [7] М. Ш. Бирман, Д. Р. Яфаев, Алгебра и анализ, **4**:6 (1992), 1–27. [8] V. Bruneau, A. Pushnitski, G. Raikov, Алгебра и анализ, **16**:1 (2004), 207–238. [9] В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев, ДАН СССР, **132**:1 (1960), 13–16. [10] В. С. Буслаев, Проблемы мат. физики, ЛГУ, 1965, № 1, 82–101.
- [11] P. A. Deift, R. Hempel, Comm. Math. Phys., **103** (1986), 461–490. [12] Л. Д. Фаддеев, Тр. МИАН, **73** (1964), 292–313. [13] F. Gesztesy, K. Makarov, J. Anal. Math., **81** (2000), 139–183. [14] F. Gesztesy, K. Makarov, S. Naboko, in: Mathematical Results in Quantum Mechanics, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 108 (eds. J. Dittrich, P. Exner, M. Tater), Birkhäuser, Basel, 1999, 59–90. [15] R. Hempel, J. Reine Angew. Math., **399** (1989), 38–59.
- [16] R. Hempel, Contemp. Math., **458** (2008), 393–407. [17] D. Hundertmark, B. Simon, J. Math. Anal. Appl., **340** (2008), 892–900. [18] T. Kato, Math. Ann., **162** (1965/1966), 258–279. [19] V. Kostykin, K. A. Makarov, A. Skripka, J. Funct. Anal., **247**:2 (2007),

492–508. [20] V. Kostrykin, K. Makarov, Proc. Amer. Math. Soc., **136**:6 (2008), 2067–2071. [21] М. Г. Крейн, Матем. сб., **33**:3 (1953), 597–626. [22] И. М. Лифшиц, ЖЭТФ, **17** (1947), 1076–1089. [23] И. М. Лифшиц, Успехи матем. наук, **7**:1 (1952), 171–180. [24] A. Pushnitski, Bull. London Math. Soc., **40**:2 (2008), 227–238. [25] A. Pushnitski, Ann. Henri Poincaré, **10**:4 (2009), 793–822. [26] A. Pushnitski, D. Yafaev, J. Funct. Anal., **259**:8 (2010), 1950–1973. [27] A. Pushnitski, The Birman–Schwinger principle on the essential spectrum, готовится к печати. [28] J. Robbin, D. Salamon, Bull. London Math. Soc., **27**:1 (1995), 1–33. [29] A. V. Sobolev, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **58**:1 (1993), 55–83. [30] Д. Р. Яфаев, Математическая теория рассеяния, Изд-во С.-Петербургского университета, С.-Петербург, 1994.

Department of Mathematics, King's College London
e-mail: alexander.pushnitski@kcl.ac.uk

Поступило в редакцию
13 января 2010 г.

УДК 517.984.42

Квазиклассическая асимптотика псевдодифференциальных операторов с разрывными символами: гипотеза Видома

© 2010. А. В. СОБОЛЕВ

Памяти Михаила Шлемовича Бирмана

1. Для (комплекснозначного) символа $a = a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, и произвольной функции u из класса Шварца введем в $L^2(\mathbb{R}^d)$ псевдодифференциальный оператор

$$(\text{Op}_\alpha a)u(\mathbf{x}) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^d \int e^{i\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

зависящий от большого параметра $\alpha > 0$. Пусть Λ , Ω — две области в $\mathbb{R}^d$ и $\chi_\Lambda(\mathbf{x})$, $\chi_\Omega(\boldsymbol{\xi})$ — их индикаторы. Мы используем обозначение $P_{\Omega,\alpha} = \text{Op}_\alpha(\chi_\Omega)$. В настоящей заметке изучаются оператор

$$T_\alpha(a) = T_\alpha(a; \Lambda, \Omega) = \chi_\Lambda P_{\Omega,\alpha} \text{Op}_\alpha(a) P_{\Omega,\alpha} \chi_\Lambda \quad (2)$$

и его симметризованный вариант

$$S_\alpha(a) = S_\alpha(a; \Lambda, \Omega) = \chi_\Lambda P_{\Omega,\alpha} \text{Re Op}_\alpha(a) P_{\Omega,\alpha} \chi_\Lambda.$$

Нас интересует двучленная асимптотика следов $\text{tr } g(T_\alpha)$, $\text{tr } g(S_\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ с подходящей гладкой функцией g , такой, что $g(0) = 0$. Введем асимптотические коэффициенты

$$\mathfrak{W}_0(a) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_\Lambda \int_\Omega a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \quad (3)$$

$$\mathfrak{W}_1(g; a) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int_\Lambda \int_{\partial\Omega} \mathfrak{A}(g; a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) |\mathbf{n}_{\partial\Lambda}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\xi})| dS_\boldsymbol{\xi} dS_\mathbf{x}, \quad (4)$$