Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Буслаев, А. А. Пожарский, Усреднение в задаче рассеяния, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 4, 2–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3016>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:13:32

Усреднение в задаче рассеяния*

© 2010. В. С. БУСЛАЕВ, А. А. ПОЖАРСКИЙ

Посвящается памяти М. Ш. Бирмана

В работе изучается рассеяние, описываемое уравнением $(-\Delta_x + q(x, x/\varepsilon) - E)\psi = f(x)$, где $\psi = \psi(x, \varepsilon) \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$, $E > 0$, $q(x, y)$ периодична относительно y и f — функция с компактным носителем. Мы описываем асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения, удовлетворяющего условиям излучения на бесконечности. Мы также описываем асимптотическое поведение амплитуды рассеяния плоской волны. В работе показано, что в старшем порядке как решение, так и амплитуда рассеяния описываются усредненным уравнением с потенциалом вида

$$\hat{q}(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y) dy.$$

§1. Введение

На протяжении длительного времени математики активно изучают разнообразные и важные для приложений модели сред, свойства которых периодически и быстро меняются в зависимости от пространственных координат, см., например, [1]–[5], [7]–[9]. Как правило (но не всегда!), такие среды откликаются на статическую нагрузку так же, как среды с некоторыми усредненными постоянными характеристиками. Физически представляется интересной и другая ситуация. Среда с быстро меняющимися свойствами может быть локальным возмущением однородной среды и может подвергаться внешнему облучению. В этом случае интерес представляют характеристики рассеяния, которое порождается упомянутым возмущением. Наша цель в настоящей работе заключается в том, чтобы показать, что и характеристики рассеяния в определенных условиях могут вести себя как характеристики рассеяния от некоторой усредненной среды. Отметим, что эта усредненная среда для задач рассеяния описывается теми же уравнениями, что и в задачах со статической нагрузкой ([1]–[4]).

В этой работе мы рассматриваем модель, описываемую дифференциальным оператором

$$H_{\varepsilon} = -\Delta_x + q(x, x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа относительно переменной x и ε — малый положительный параметр. Считается, что относительно функции $q = q(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, выполнено следующее предположение.

Предположение 1.1. (i) q является вещественнозначной функцией класса $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2d})$;

(ii) $q(x, y) = 0$ при $x \notin B_R$, $y \in \mathbb{R}^d$, где $B_R = \{x : |x| < R\}$;

*Работа поддержана грантами РФФИ 07-01-92169-НЦНИ_a и 08-01-00209-a.

(iii) $q(x, y)$ периодична относительно y (с некоторой ячейкой периодичности Ω).

Для детального описания постановки задачи и основных результатов нам понадобятся следующие стандартные для подобной ситуации определения. Пусть ψ — решение уравнения

$$(-\Delta_x + p(x) - E)\psi(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.2)$$

где p и f — суммируемые функции с компактным носителем и $E > 0$. Будем говорить, что ψ удовлетворяет условиям излучения, если

$$\psi(x) = T(\hat{x}) \frac{e^{i\sqrt{E}|x|}}{|x|^{(d-1)/2}} + o\left(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Здесь $\hat{x} = x/|x|$ и T — не определенная на этот момент гладкая функция $S^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^d$, где $d \in \mathbb{N}$. Через H_R^s (более подробно, $H^s(B_R)$), $s = 0, 1, 2, \dots$, будет обозначаться пространство Соболева со следующей нормой на множестве функций $\psi: B_R \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\|\psi\|_{H_R^s}^2 = \sum_{|k| \leq s} \int_{B_R} \left| \frac{\partial^{|k|} \psi(x)}{\partial x^k} \right|^2 dx.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, которое следует из результатов работ [6], [10].

Теорема 1.2. Пусть p и f — функции с носителями в шаре B_R , $p \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \geq 0$ и $E > 0$. Тогда существует единственное решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям излучения. Это решение допускает оценку

$$\|\psi\|_{H_R^{s+2}} \leq C \|f\|_{H_R^s}, \quad (1.4)$$

где постоянная C может зависеть от s и R , но не зависит от f .

Мы изучаем решения уравнения

$$(H_\varepsilon - E)\psi(x) = f(x, x/\varepsilon), \quad E > 0, \quad (1.5)$$

считая, что f — заданная функция, удовлетворяющая предположению 1.1. Решение ψ фиксируется условием излучения вида (1.3).

Основные результаты работы базируются на том факте, что задача (1.5), (1.3) допускает формальное решение вида

$$\psi(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \psi_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (1.6)$$

в котором коэффициенты $\psi_n(x, y)$ зависят от y периодически и удовлетворяют в подходящем смысле условиям излучения. Отметим, что подобные построения для целей исследования статических задач ранее проводились в работе [1].

Полное описание асимптотических свойств формального решения (1.6) дается ниже, см. теорему 3.3. Здесь мы сформулируем простейшее следствие теоремы 3.3, которое описывает старший член асимптотического ряда.

Теорема 1.3. Пусть потенциал q удовлетворяет предположению 1.1, $\text{supp } f \subset B_R$, $f \in H^0(\mathbb{R}^d)$ и $E > 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\psi(x) - \psi_0(x)\|_{H_R} \leq C\varepsilon,$$

где ψ — решение задачи (1.5), (1.3), а ψ_0 — решение усредненного уравнения

$$(\widehat{H} - E)\psi_0(x) = f(x), \quad (1.7)$$

удовлетворяющее условию излучения (1.3); здесь

$$\widehat{H} = -\Delta_x + \widehat{q}(x), \quad \widehat{q}(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y) dy,$$

— усредненный оператор. При этом постоянная C не зависит от ε (однако может зависеть от E и R).

Особый интерес в связи с задачей рассеяния представляет задача рассеяния плоской волны. Она характеризуется однородным уравнением

$$(H_\varepsilon - E)\chi(x, k) = 0,$$

снабженным следующим условием излучения:

$$\chi(x, k) = e^{i\langle x, k \rangle} + F_\varepsilon(\widehat{x}, k) \frac{e^{i\sqrt{E}|x|}}{|x|^{(d-1)/2}} + o\left(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Разумеется, замена $\chi(x, k) = \psi(x, k) + e^{i\langle x, k \rangle}$ немедленно сводит данную задачу к исходной задаче для неоднородного уравнения со стандартными условиями излучения.

Из теоремы 3.3 извлекается важное следствие о предельном усредненном поведении решения $\chi(x, k)$ и «амплитуды рассеяния» $F_\varepsilon(\widehat{x}, k)$. Можно утверждать, что асимптотическое поведение решения задачи рассеяния (иными словами, в терминологии теории рассеяния, волнового оператора) и амплитуды рассеяния (матрицы рассеяния) в подходящей топологии описывается стандартным усредненным оператором $\widehat{H}$. В частности, для старшего члена асимптотического разложения амплитуды рассеяния справедлива следующая теорема. Полная формулировка будет приведена ниже, см. теорему 5.1.

Теорема 1.4. Пусть потенциал q удовлетворяет предположению (1.1) и $E > 0$. Тогда справедлива оценка

$$\sup_{\widehat{x}, k} |F_\varepsilon(\widehat{x}, k) - \widehat{F}_0(\widehat{x}, k)| \leq C\varepsilon,$$

где $\widehat{F}_0(\widehat{x}, k)$ — амплитуда рассеяния для усредненного оператора $\widehat{H}$ и постоянная C не зависит от ε .

Отметим, что все утверждения, связанные с построением формальных решений, могут быть перенесены и на другие уравнения и системы, возникающие в теории рассеяния. В частности, описанные здесь построения формальных решений применимы к системе уравнений Максвелла. При этом процедура построения формальных асимптотических решений автоматически приводит к появлению уже в старшем порядке быстрой периодической зависимости от пространственной переменной. В терминологии, принятой в статической трактовке, см., например, [2], это означает появление корректоров нулевого порядка.

§2. Формальные решения

Этот параграф посвящен описанию асимптотических решений вида (1.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнения

$$-\Delta_x \psi + q(x, x/\varepsilon) \psi - E \psi = f(x, x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.1)$$

Мы будем предполагать, что $E > 0$, f удовлетворяет предположению 1.1 и решение ψ удовлетворяет условию излучения (1.3) на бесконечности.

Будем искать решения уравнения (2.1) в виде

$$\psi = \Psi(x, x/\varepsilon, \varepsilon). \quad (2.2)$$

Прямой подстановкой легко проверяется, что если функция $\Psi(x, y, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению вида

$$-\Delta_y \Psi - 2\varepsilon \nabla_y \nabla_x \Psi + \varepsilon^2 (-\Delta_x + q(x, y) - E) \Psi = \varepsilon^2 f(x, y), \quad (2.3)$$

то функция $\psi = \Psi(x, x/\varepsilon, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Таким образом, описание асимптотических решений уравнения (2.1) сводится к построению асимптотических решений уравнения (2.3) с разделенными быстрыми и медленными переменными.

Асимптотические решения уравнения (2.3) будем искать в виде

$$\Psi(x, y, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \Psi_n(x, y). \quad (2.4)$$

При этом мы будем предполагать, что функции $\Psi_n(x, y)$ являются Ω -периодическими по y .

Что касается условий излучения (1.3), они, естественно, должны быть интерпретированы следующим образом: при достаточно больших x каждый коэффициент $\Psi_n(x, y)$ должен перестать зависеть от y и при $x \rightarrow \infty$ должен удовлетворять условию излучения.

Подставляя разложение (2.4) в уравнение (2.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующую рекуррентную систему:

$$\Delta_y \Psi_n = -2\nabla_y \nabla_x \Psi_{n-1} + (-\Delta_x + q(x, y) - E) \Psi_{n-2} - \delta_{n2} f(x, y), \quad n \geq 0, \quad (2.5)$$

где $\Psi_{-2} \equiv 0$ и $\Psi_{-1} \equiv 0$.

Целесообразно с самого начала выделить из функций $\Psi_n(x, y)$ ортогональные в $L^2(\Omega)$ (как функции от y) компоненты:

$$\Psi_n(x, y) = \varphi_n(x, y) + \psi_n(x), \quad (2.6)$$

где $\varphi_n(x, y)$ есть Ω -периодическая функция по y , удовлетворяющая условию

$$\int_{\Omega} \varphi_n(x, y) dy = 0. \quad (2.7)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть функции q и f удовлетворяют предположению 1.1 и $E > 0$. Тогда существует формальное асимптотическое решение уравнения (2.1) вида

$$\Psi(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \Psi_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.8)$$

где Ψ_n представляются в виде (2.6), (2.7). При этом функции $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ и $\psi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ можно найти из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \Delta_y \varphi_n(x, y) = & -2\nabla_y \nabla_x \varphi_{n-1}(x, y) + (-\Delta_x + q(x, y) - E)\Psi_{n-2}(x, y) \\ & - \delta_{n2} f(x, y), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$(\hat{H} - E)\psi_n(x) = \delta_{n0} \hat{f}(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y) \varphi_n(x, y) dy, \quad n \geq 0. \quad (2.10)$$

Здесь

$$\hat{H} = -\Delta_x + \hat{q}(x), \quad \hat{q}(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y) dy, \quad \hat{f}(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x, y) dy,$$

ψ_n удовлетворяют условиям излучения (1.3) и $\varphi_n(x, y) \equiv 0$ при $x \notin B_R$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Подставляя (2.6) в (2.5), получим уравнение вида (2.9) на функцию φ_n . Уравнение (2.9) имеет единственное периодическое решение, удовлетворяющее условию (2.7), тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна постоянной функции относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Легко видеть, что это условие ортогональности может быть переписано в следующем виде:

$$(\hat{H} - E)\psi_{n-2}(x) = \delta_{n2} \hat{f}(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y) \varphi_{n-2}(x, y) dy, \quad n \geq 2. \quad (2.11)$$

При $n = 0, 1$ уравнения (2.9) безусловно разрешимы.

Теперь мы должны рассмотреть рекуррентную систему (2.9), (2.11) и убедиться, что она действительно имеет единственное решение с объявленными свойствами.

Из (2.9) следует, что $\varphi_0(x, y) \equiv 0$. Тогда (2.11) гарантирует, что

$$(\hat{H} - E)\psi_0(x) = \hat{f}(x). \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию излучения (1.3). Из того, что $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, следует, что $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Обсудим теперь продолжение рекуррентной процедуры. Предположим, что определены функции $\varphi_0, \dots, \varphi_l$ и $\psi_0, \dots, \psi_l$, которые обладают объявленными выше свойствами. Рассмотрим уравнение (2.9) при $n = l + 1$. Это уравнение разрешимо в силу выполнения условия ортогональности (2.11) при $n = l + 1$. Уравнение (2.9) при $n = l + 1$ может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \Delta_y \varphi_{l+1}(x, y) = & -2\nabla_y \nabla_x \varphi_l(x, y) + (-\Delta_x + q(x, y) - E)\varphi_{l-1}(x, y) \\ & + (f(x, y) - \hat{f}(x))\delta_{l1} + (q(x, y) - \hat{q}(x))\psi_{l-1}(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y) \varphi_{l-1}(x, y) dy. \end{aligned}$$

Отсюда легко следует, что $\varphi_{l+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ и $\varphi_n(x, y) \equiv 0$ при $x \notin B_R$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Обратимся, наконец, к уравнению (2.11) для ψ_{l+1} . Правая сторона известна и обращается в нуль при $x \notin B_R$. Поэтому уравнение единственным образом определяет ψ_{l+1} , удовлетворяющее условиям излучения. Так как $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ и $\varphi_{l+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, то $\psi_{l+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, рекуррентная процедура оправдана. $\square$

Замечание. Предположение $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ необходимо для того, чтобы построить все члены асимптотического ряда (2.8). Если же ограничиться описанием нескольких первых членов ряда (2.8), понадобится существование лишь нескольких первых производных функции f . Условие компактности носителя функции f тоже не является существенным и может быть заменено на подходящее условие убывания на бесконечности.

В дальнейшем нам понадобятся оценки для компонент формального решения (2.4) в частном случае, а именно когда функция $f(x, y)$ не зависит от переменной y .

Лемма 2.2. Пусть $E > 0$, $s \geq 0$, $f = f(x)$, $\text{supp } f \subset B_R$ и $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\max_{0 \leq |k| \leq 2} \max_{y \in \Omega} \left\| \frac{\partial^{|k|}}{\partial y^k} \Psi_n(\cdot, y) \right\|_{H_R^{s+4-n}} \leq C \|f\|_{H_R^s} \quad (2.13)$$

при $2 \leq n \leq s+4$. Кроме того, $\Psi_1 \equiv 0$, $\Psi_0(x, y) = \psi_0(x)$ и

$$\|\psi_0\|_{H_R^{s+2}} \leq C \|f\|_{H_R^s}, \quad (2.14)$$

где постоянная C не зависит от выбора f .

Доказательство. Легко видеть, что $\varphi_0 \equiv 0$, $\varphi_1 \equiv 0$. При $n = 0$ уравнение (2.10) можно переписать в виде

$$(\hat{H} - E)\psi_0 = \hat{f} \equiv f.$$

Отсюда и из теоремы 1.2 следует оценка (2.14). При $n = 1$ правая часть в (2.10) тривиальна и, следовательно, $\psi_1 \equiv 0$ и $\Psi_1 \equiv 0$. При $n = 2$ уравнение (2.9) принимает вид

$$\Delta_y \varphi_2(x, y) = (q(x, y) - \hat{q}(x))\psi_0(x). \quad (2.15)$$

Учитывая условие $q \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ и неравенство (2.14), легко получить, что

$$\max_{0 \leq |k| \leq 2} \max_{y \in \Omega} \left\| \frac{\partial^{|k|}}{\partial y^k} \varphi_2(\cdot, y) \right\|_{H_R^{s+2}} \leq C \|f\|_{H_R^s}. \quad (2.16)$$

Отметим, что постоянная C в оценке (2.16) зависит от потенциала q , но не зависит от f . Теперь оценка (2.13) при $n = 2$ следует из (2.16), (2.10) и теоремы 1.2. Оценки (2.13) при $n \geq 3$ могут быть выведены по индукции из (2.9) и (2.10). $\square$

Лемма 2.3. Пусть $E > 0$, $p \geq 2$, $f = f(x)$, $\text{supp } f \subset B_R$ и $f \in H^{p-2}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|\Psi_n(x, x/\varepsilon)\|_{H_R^2} \leq C \varepsilon^{-2} \|f\|_{H_R^{p-2}}$$

при $2 \leq n \leq p$. Кроме того, $\Psi_1 \equiv 0$ и

$$\|\Psi_0(x, x/\varepsilon)\|_{H_R^2} \leq C \|f\|_{H_R^{p-2}}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что $\Psi_0(x, x/\varepsilon) = \psi_0(x)$, и воспользоваться леммой 2.2. $\square$

§3. Асимптотическое разложение резольвенты

Рассмотрим уравнение (2.1) с правой частью специального вида

$$-\Delta_x \psi + q(x, x/\varepsilon) \psi - E \psi = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

где носитель функции f сосредоточен в шаре B_R . Как было показано в предыдущем параграфе, ряд (2.8) формально удовлетворяет уравнению (3.1). Рассмотрим частную сумму

$$\Psi^{(p)}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^p \varepsilon^n \Psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

формального ряда (2.8). Вычислим ее невязку

$$(H_\varepsilon - E) \Psi^{(p)}(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon^{p-1} Q^{(p)}(x, \varepsilon), \quad p \geq 2, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} Q^{(p)}(x, \varepsilon) = & \left((-\Delta_x + q(x, y) - E) [\varphi_{p-1}(x, y) + \varepsilon \varphi_p(x, y)] - 2 \nabla_y \nabla_x \varphi_p(x, y) \right. \\ & + (q(x, y) - \hat{q}(x)) [\psi_{p-1}(x) + \varepsilon \psi_p(x)] \\ & \left. - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, z) [\varphi_{p-1}(x, z) + \varepsilon \varphi_p(x, z)] dz \right) \Big|_{y=x/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Удобно ввести линейные операторы A_p и B_p ,

$$A_p f(x) = \Psi^{(p)}(x, \varepsilon), \quad B_p f(x) = Q^{(p)}(x, \varepsilon), \quad p \geq 2,$$

с областью определения

$$\text{Dom } A_p = \text{Dom } B_p = \{f : \text{supp } f \subset B_R, f \in H^{p-2}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Формула (3.2) означает, что

$$(H_\varepsilon - E) A_p = I + \varepsilon^{p-1} B_p, \quad p \geq 2. \quad (3.3)$$

Лемма 3.1. Пусть $E > 0$. Тогда при $p \geq 2$ справедливы оценки

$$\|A_p\|_{H_R^{p-2} \rightarrow H_R^2} \leq C, \quad (3.4)$$

$$\|B_p\|_{H_R^{p-2} \rightarrow H_R^0} \leq C, \quad (3.5)$$

где постоянная C может зависеть от E и R , но не зависит от ε .

Доказательство. Оценка (3.4) следует из леммы 2.3, а (3.5) — из леммы 2.2. $\square$

Оператор $H_\varepsilon - E$, снабженный условиями излучения (1.3) и действующий в подходящем пространстве, ограниченно обратим при любых $E > 0$ и $\varepsilon > 0$, см. теорему 1.2. Обозначим обратный оператор через $R_\varepsilon(E)$. Отметим, что оператор $R_\varepsilon(E)$ можно интерпретировать как предельное значение резольвенты $(H_\varepsilon - z)^{-1}$, действующей в подходящих функциональных пространствах, в точке $z = E + i0$.

Лемма 3.2. Пусть $E > 0$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|R_\varepsilon(E)\|_{H_R^0 \rightarrow H_R^2} \leq C,$$

где постоянная C не зависит от ε .

Доказательство. Воспользуемся формулой (3.3) при $p = 2$,

$$(H_\varepsilon - E)A_2 = I + \varepsilon B_2. \quad (3.6)$$

Заметим теперь, что оператор B_2 отображает функции с носителем в шаре B_R в функции с носителем в B_R . Поэтому в силу (3.5) при достаточно малых ε корректно определен ограниченный оператор $(I + \varepsilon B_2)^{-1}$, действующий в H_R^0 . При этом

$$\|(I + \varepsilon B_2)^{-1}\|_{H_R^0 \rightarrow H_R^0} \leq (1 - \varepsilon \|B_2\|_{H_R^0 \rightarrow H_R^0})^{-1} \leq C_1$$

с некоторой постоянной C_1 , не зависящей от ε . Теперь из (3.6) и (3.4) следует, что

$$R_\varepsilon(E) = A_2(I + \varepsilon B_2)^{-1}, \quad (3.7)$$

$$\|R_\varepsilon(E)\|_{H_R^0 \rightarrow H_R^2} \leq \|A_2\|_{H_R^0 \rightarrow H_R^2} \|(I + \varepsilon B_2)^{-1}\|_{H_R^0 \rightarrow H_R^0} \leq C \neq C(\varepsilon). \quad \square$$

Теорема 3.3. Пусть $E > 0$ и $p \geq 2$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|R_\varepsilon(E) - A_p\|_{H_R^{p-2} \rightarrow H_R^2} \leq C\varepsilon^{p-1},$$

где постоянная C не зависит от ε .

Доказательство. Воспользуемся соотношением (3.3) и получим, что

$$R_\varepsilon(E) - A_p = -\varepsilon^{p-1} R_\varepsilon(E) B_p$$

при $p \geq 2$. Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что

$$\|R_\varepsilon(E) B_p\|_{H_R^{p-2} \rightarrow H_R^2} \leq \|R_\varepsilon(E)\|_{H_R^0 \rightarrow H_R^2} \|B_p\|_{H_R^{p-2} \rightarrow H_R^0} \leq C,$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от ε . Отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Из теоремы 3.3 извлекается следствие о полном асимптотическом разложении решения задачи (3.1), (1.3).

Следствие 3.4. Пусть $f \in H^{p-2}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f \subset B_R$, $E > 0$ и $p \geq 2$. Пусть ψ — решение задачи (3.1), (1.3) и $\Psi^{(p)}(x, \varepsilon)$ — частная сумма формального ряда (2.8).

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\psi(\cdot) - \Psi^{(p)}(\cdot, \varepsilon)\|_{H_R^2} \leq C \|f\|_{H_R^{p-2}} \varepsilon^{p-1},$$

где постоянная C не зависит от ε .

Доказательство. Из теоремы 3.3 следует, что

$$\begin{aligned} \|\psi(\cdot) - \Psi^{(p)}(\cdot, \varepsilon)\|_{H_R^2} &= \|R_\varepsilon(E)f - A_p f\|_{H_R^2} \\ &\leq \|R_\varepsilon(E) - A_p\|_{H_R^{p-2} \rightarrow H_R^2} \|f\|_{H_R^{p-2}} \leq C \|f\|_{H_R^{p-2}} \varepsilon^{p-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1.3. Для доказательства достаточно воспользоваться следствием 3.4 при $p = 2$ и заметить, что $\|\Psi^{(2)}(x, \varepsilon) - \Psi^{(0)}(x, \varepsilon)\|_{H_R^1} \leq C\varepsilon$. $\square$

§4. Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния

Рассмотрим однородное уравнение

$$-\Delta_x \chi + q(x, x/\varepsilon) \chi - E \chi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (4.1)$$

Мы по-прежнему предполагаем, что $E > 0$ и q удовлетворяет предположению 1.1. Существует решение $\chi(x, k)$ уравнения (4.1), удовлетворяющее на бесконечности условию излучения вида (1.8). Решение χ описывает рассеяние плоской волны $e^{i\langle x, k \rangle}$, где $|k|^2 = E$, на потенциале q . Напомним, что в §1 мы называли χ решением задачи рассеяния. В этом параграфе мы будем интересоваться асимптотическим поведением решения задачи рассеяния и амплитуды рассеяния $F_\varepsilon(\hat{x}, k)$ при малых ε .

Решение уравнения (4.1) удобно искать в виде

$$\chi(x, k) = e^{i\langle x, k \rangle} + \psi(x, k). \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в уравнение (4.1), получим

$$-\Delta_x \psi + q(x, x/\varepsilon) \psi - E \psi = -q(x, x/\varepsilon) e^{i\langle x, k \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (4.3)$$

Из леммы 2.1 следует, что уравнение (4.3) допускает асимптотическое решение вида (2.8). Отсюда и из (4.2) получим, что уравнение (4.1) допускает асимптотическое решение вида

$$\chi = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \tilde{\Psi}_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad \tilde{\Psi}_n(t, y) = \tilde{\varphi}_n(t, y) + \tilde{\psi}_n(t), \quad \int_{\Omega} \tilde{\varphi}_n(t, y) dy = 0. \quad (4.4)$$

При этом ряды (4.4) и (2.8) отличаются лишь старшими членами: $\tilde{\Psi}_0(x, y) = \Psi_0(x, y) + e^{i\langle x, k \rangle}$.

Лемма 4.1. Пусть $E > 0$, $k \in \mathbb{R}^d$, $|k|^2 = E$ и q удовлетворяет предположению 1.1. Тогда существует асимптотическое решение уравнения (4.1) вида (4.4). При этом функции $\tilde{\varphi}_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ и $\tilde{\psi}_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ можно найти из следующих рекуррентных соотношений:

$$\Delta_y \tilde{\varphi}_n(x, y) = -2 \nabla_y \nabla_x \tilde{\varphi}_{n-1}(x, y) + (-\Delta_x + q(x, y) - E) \tilde{\Psi}_{n-2}(x, y), \quad n \geq 0, \quad (4.5)$$

$$(\hat{H} - E) \tilde{\psi}_n(x) = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y) \tilde{\varphi}_n(x, y) dy, \quad n \geq 0. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\hat{H} = -\Delta_x + \hat{q}(x), \quad \hat{q}(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y) dy,$$

$\tilde{\psi}_0$ удовлетворяет условию излучения вида

$$|\tilde{\psi}_0(x, k) - e^{i\langle x, k \rangle} - \hat{F}_0(\hat{x}, k)|x|^{(1-d)/2} e^{i|k||x|} \leq C|x|^{(-1-d)/2}, \quad (4.7)$$

$\tilde{\psi}_n$ удовлетворяют условиям излучения вида

$$|\tilde{\psi}_n(x, k) - \hat{F}_n(\hat{x}, k)|x|^{(1-d)/2} e^{i|k||x|} \leq C|x|^{(-1-d)/2}$$

при $n \geq 1$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от x , и $\tilde{\varphi}_n(x, y) \equiv 0$ при $x \notin B_R$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что $\Psi_0(x, y) = \psi_0(x)$ удовлетворяет уравнению вида

$$(\hat{H} - E)\psi_0(x) = -\hat{q}(x)e^{i\langle x, k \rangle}$$

и условиям излучения вида (1.3). Отсюда, учитывая представление

$$\tilde{\Psi}_0(x, y) = \tilde{\psi}_0(x) = \psi_0(x) + e^{i\langle x, k \rangle},$$

получим, что $\tilde{\psi}_0(x)$ удовлетворяет уравнению (4.6) и условиям излучения (4.7).

Оставшаяся часть леммы является непосредственным следствием леммы 2.1. $\square$

Лемма 4.2. Пусть $E > 0$ и q удовлетворяет предположению 1.1. Тогда при $p \geq 0$ и $x \notin B_{2R}$

$$|\chi(x, k) - \chi_p(x, k)| \leq C|x|^{(1-d)/2}\varepsilon^{p+1}, \quad (4.8)$$

где постоянная C не зависит от ε и k .

Доказательство. При $p \geq 2$ прямая подстановка дает

$$(H_\varepsilon - E)\chi_p = \varepsilon^{p-1}\Phi_p,$$

где

$$\Phi_p(x, \varepsilon) = (\Delta_y[\tilde{\Psi}_{p+1}(x, y) + \varepsilon\tilde{\Psi}_{p+2}(x, y)] + 2\varepsilon\nabla_x\nabla_y\tilde{\Psi}_{p+1}(x, y))\Big|_{y=x/\varepsilon}.$$

Легко видеть, что функция Φ_p имеет компактный носитель, сосредоточенный в шаре B_R , и $\Phi_p \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Используя результат, аналогичный лемме 2.2, можно получить, что

$$\|\Phi_p\|_{H_R^0} \leq C \neq C(\varepsilon). \quad (4.9)$$

Легко видеть, что функция $\chi_p - \chi$ удовлетворяет уравнению

$$(H_\varepsilon - E)(\chi_p - \chi) = \varepsilon^{p-1}\Phi_p$$

и условиям излучения (1.3). Отсюда, используя представление (3.7), получим

$$\chi_p - \chi = \varepsilon^{p-1}R_\varepsilon(E)\Phi_p = \varepsilon^{p-1}A_2(I + \varepsilon B_2)^{-1}\Phi_p. \quad (4.10)$$

Проанализируем асимптотическое поведение выражения, стоящего в правой части формулы (4.10), при $|x| \rightarrow \infty$. Из определения оператора B_2 легко получить, что носитель функции $(I + \varepsilon B_2)^{-1}\Phi_p$ сосредоточен в шаре B_R . Из леммы 3.1 и оценки (4.9) следует, что

$$\|(I + \varepsilon B_2)^{-1}\Phi_p\|_{H_R^0} \leq C \neq C(\varepsilon). \quad (4.11)$$

Заметим теперь, что нетривиальный вклад в поведение функции $A_2(I + \varepsilon B_2)^{-1}\Phi_p$ при $|x| \rightarrow \infty$ описывается членами $\psi_0(x)$ и $\psi_2(x)$ в разложении для A_2 . Эти члены являются решениями уравнения вида

$$(\hat{H} - E)\psi_n = D_n,$$

где

$$D_n = \delta_{n0}(I + \varepsilon B_2)^{-1}\Phi_p - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(x, y)\varphi_n(x, y) dy, \quad n = 0, 2.$$

Легко видеть, что носитель F_n сосредоточен в шаре B_R . Отсюда и из (4.11) следует, что величины D_n допускают оценку вида

$$\|D_n\|_{H_R^0} \leq C \neq C(\varepsilon). \quad (4.12)$$

Отсюда следует, что

$$\|\psi_n\|_{H_R^0} \leq C \neq C(\varepsilon). \quad (4.13)$$

Легко видеть, что ψ_0 и ψ_2 удовлетворяют интегральному уравнению вида

$$\psi_n(x) = \int_{|y| \leq T_0} G_0(x, y; E) (\hat{q}(y) \psi_n(y) - D_n(y)) dy,$$

где $G_0(x, y; E)$ — ядро резольвенты $(-\Delta - E - i0)^{-1}$,

$$G_0(x, y; E) = \frac{i}{4} \left(\frac{\sqrt{E}}{2\pi|x-y|} \right)^{d/2-1} H_{d/2-1}^{(1)}(\sqrt{E}|x-y|)$$

и $H_{d/2-1}^{(1)}$ — функция Ганкеля. Отсюда следует, что

$$|\psi_n(x)| \leq C|x|^{(1-d)/2} \left(\max_{|y| \leq R} |\hat{q}(y)| \int_{|y| \leq R} |\psi_n(y)| dy + \int_{|y| \leq R} |D_n(y)| dy \right)$$

при $x \notin B_{2R}$, $n = 0, 2$. Таким образом, учитывая (4.12) и (4.13), получим, что

$$|\psi_n(x)| \leq C|x|^{(1-d)/2} \quad (4.14)$$

при $x \notin B_{2R}$, где постоянная C не зависит от ε . Отсюда следует, что при $p \geq 2$ и $x \notin B_{2R}$ справедлива оценка вида

$$|\chi(x, k) - \chi_p(x, k)| \leq C|x|^{(1-d)/2} \varepsilon^{p-1}. \quad (4.15)$$

Заметим теперь, что члены $\tilde{\Psi}_{p-1}$ и $\tilde{\Psi}_p$ в разложении (4.4) допускают оценки вида

$$|\tilde{\Psi}_{p-1}(x, x/\varepsilon)| \leq C|x|^{(1-d)/2}, \quad |\tilde{\Psi}_p(x, x/\varepsilon)| \leq C|x|^{(1-d)/2} \quad (4.16)$$

при $x \notin B_{2R}$, где постоянная C не зависит от ε , k и x . Эти оценки можно вывести так же, как и (4.14).

Теперь из (4.15) и (4.16) легко получить, что

$$|\chi(x, k) - \chi_{p-2}(x, k)| \leq C|x|^{(1-d)/2} \varepsilon^{p-1} \quad (4.17)$$

при $p \geq 2$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Отметим, что в шаре B_R справедлива оценка вида

$$\|\chi(\cdot, k) - \chi^{(p)}(\cdot, k)\|_{H_R^2} \leq C\varepsilon^{p-1}, \quad (4.18)$$

которая может быть доказана так же, как следствие 3.4.

Формулы (4.17) и (4.18) дают исчерпывающее описание асимптотического поведения решения задачи рассеяния при $\varepsilon \rightarrow 0$.

§5. Асимптотическое поведение амплитуды рассеяния

Теорема 5.1. Пусть $E > 0$ и q удовлетворяет предположению 1.1. Тогда при $p \geq 0$ справедлива оценка

$$\sup_{\hat{x}, k} \left| F_\varepsilon(\hat{x}, k) - \sum_{n=0}^p \varepsilon^n \hat{F}_n(\hat{x}, k) \right| \leq C\varepsilon^{p+1},$$

где постоянная C не зависит от ε .

Доказательство. Из лемм 4.1 и 4.2 следует, что

$$\left| F_\varepsilon(\hat{x}, k) - \sum_{n=0}^p \varepsilon^n \hat{F}_n(\hat{x}, k) \right| \leq C\varepsilon^{p+1} + C_1(k, \varepsilon)|x|^{-1}, \quad (5.1)$$

где постоянная C не зависит от x , k и ε , в то время как $C_1(k, \varepsilon)$ не зависит от x , но, быть может, зависит от k и ε . Для завершения доказательства осталось перейти к пределу при $|x| \rightarrow \infty$ в оценке (5.1). $\square$

Доказательство теоремы 1.4 следует из теоремы 5.1 при $p = 0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [2] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15:5** (2003), 1–108.
- [3] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ, **17:6** (2005), 1–104.
- [4] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ, **18:6** (2006), 1–130.
- [5] Д. И. Борисов, *Асимптотики для решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ, **20:2** (2008), 19–42.
- [6] Б. Р. Вайнберг, *Асимптотические методы в уравнениях математической физики*, Изд-во МГУ, М., 1982.
- [7] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [8] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во МГУ, М., 1990.
- [9] Е. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.
- [10] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 2, Мир, М., 1986.

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: vbuslaev@gmail.com

Поступило в редакцию
17 мая 2010 г.

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: pozharsky@mph.phys.spbu.ru