Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Суслина, Усреднение параболической задачи
Коши в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$, *Функци. анализ и
его прил.*, 2010, том 44, выпуск 4, 91–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3017>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:22:35

УДК 517.956.4

Усреднение параболической задачи Коши в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$

© 2010. Т. А. Суслина*

*Светлой памяти дорогого Учителя
Михаила Шлемовича Бирмана*

1. Введение. Рассматривается задача об усреднении в пределе малого периода (гомогенизации) решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи Коши для параболического уравнения в $\mathbb{R}^d$ с быстро осциллирующими коэффициентами (см. ниже (2), (8)). Параметр ε имеет смысл малого периода. Задачи гомогенизации для параболических уравнений активно изучались традиционными методами теории усреднений (см., например, книги [1]–[3]). Соответствующие результаты дают сходимость (в подходящем функциональном классе) решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ к решению $\mathbf{u}_0$ усредненной (эффективной) задачи с постоянными коэффициентами. К эллиптическим и параболическим задачам теории усреднений применялся также спектральный подход (см. [4], [5]).

Мы используем новый теоретико-операторный подход, развитый применительно к эллиптическим задачам в [6]–[9]. С помощью этого подхода в [10], [11] была получена не только сходимость решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ к $\mathbf{u}_0$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (при фиксированном времени τ), но и оценка порядка ε для L_2 -нормы разности $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$, равномерная относительно L_2 -нормы начальных данных (см. ниже оценку (5)). В дальнейшем в [12] тем же методом была получена более точная аппроксимация решения в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$; при этом учитывался корректор. *Цель настоящей работы* — получить аппроксимацию решения в пространстве Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$, равномерную относительно L_2 -нормы начальных данных, с погрешностью $O(\varepsilon)$.

Другой подход к получению результатов подобного типа был предложен в [13], [14] применительно к эллиптическим задачам и в [15] применительно к параболическим задачам.

2. Постановка задачи. Пусть Γ — некоторая решетка в $\mathbb{R}^d$. Через Ω обозначим элементарную ячейку решетки Γ . Ниже через $\tilde{\Gamma}$ обозначается решетка, двойственная к Γ , а через $\tilde{\Omega}$ — зона Бриллюэна решетки $\tilde{\Gamma}$. Для всякой Γ -периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Через $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ обозначим пространство $\mathbb{C}^n$ -значных квадратично суммируемых функций в $\mathbb{R}^d$. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, и $b(\mathbf{D})$ есть $(m \times n)$ -матричный однородный дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. Здесь $\mathbf{D} = -i\nabla$. Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ — $(m \times n)$ -матрица $b(\boldsymbol{\xi})$, являющаяся линейной однородной функцией от $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предполагается, что $\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $\boldsymbol{\xi} \neq 0$. Это равносильно выполнению неравенств

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad |\boldsymbol{\theta}| = 1, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty, \quad (1)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00209-а) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5931.2010.1).

с некоторыми постоянными α_0, α_1 . Далее, пусть $(m \times m)$ -матрица-функция $g(\mathbf{x})$ и $(n \times n)$ -матрица-функция $Q(\mathbf{x})$ являются ограниченными, положительно определенными и периодическими относительно решетки Γ .

Рассмотрим следующую задачу Коши для функции $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \geq 0$:

$$Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \quad Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Нас интересует поведение решения при малом ε .

3. Старший член аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи (2) сходится (в некотором смысле) к решению *эффективной задачи*

$$\bar{Q} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \quad \bar{Q} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Здесь $\bar{Q} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega Q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, а g^0 — положительная $(m \times m)$ -матрица, называемая *эффективной матрицей*. Для описания g^0 введем Γ -периодическую $(n \times m)$ -матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$, являющуюся (слабым) решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{1}_m$ — единичная $(m \times m)$ -матрица. Далее, введем $(m \times m)$ -матрицу-функцию $\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)$. Тогда $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Отметим сразу оценки $\underline{g} \leq g^0 \leq \bar{g}$, известные как вилка Фойгта-Рейсса. Здесь

$$\bar{g} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (\underline{g})^{-1} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x}.$$

В [10], [11] был установлен следующий результат.

Теорема 1. При фиксированном $\tau > 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau)$ задачи (2) сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0(\cdot, \tau)$ эффективной задачи (3). При этом

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \varepsilon \tau^{-1/2} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0, \tau > 0. \quad (5)$$

Постоянная C_1 зависит лишь от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|Q\|_{L_\infty}$, $\|Q^{-1}\|_{L_\infty}$, от постоянных α_0, α_1 из (1) и от параметров решетки Γ .

4. Аппроксимация решения в классе H^1 . Сейчас мы укажем аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau)$ при фиксированном $\tau > 0$ по норме в пространстве Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. В аппроксимации учитывается член первого порядка по ε — так называемый *корректор*. Кроме того, приводится аппроксимация в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (2) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (3). Тогда при $\tau > 0$ и $0 < \varepsilon \leq \tau^{1/2}$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau) - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau) \varepsilon \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (6)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 \tau^{-1} \varepsilon \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (7)$$

Здесь $C(\tau) = C_2 \tau^{-1} + C_3 \tau^{-1/2}$. Постоянные C_2, C_3, C_4 зависят лишь от d, m, n , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|Q\|_{L_\infty}$, $\|Q^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и от параметров решетки Γ .

5. Задача Коши для неоднородного уравнения. Пусть $0 < T \leq \infty$. Рассмотрим следующую задачу Коши для функции $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in (0, T)$:

$$Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \quad Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (8)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in \mathcal{H}_p(T)$, $1 < p \leq \infty$. Здесь использовано обозначение $\mathcal{H}_p(T) = L_p((0, T); L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$. Положим

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(T)}^p = \int_0^T \|\mathbf{F}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^p d\tau, \quad 1 < p < \infty, \\ \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_\infty(T)} = \operatorname{ess-sup}_{0 < \tau < T} \|\mathbf{F}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Пусть $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in (0, T)$, — решение эффективной задачи

$$\bar{Q} \frac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \quad \bar{Q} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \quad (9)$$

В [11] был получен следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in \mathcal{H}_p(T)$, $1 < p \leq \infty$. При фиксированном $\tau \in (0, T)$ решение $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)$ задачи (8) сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{v}_0(\cdot, \tau)$ эффективной задачи (9). При $\tau \in (0, T)$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(\varepsilon \tau^{-1/2} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \theta_p(\varepsilon, \tau) \|\mathbf{F}(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{H}_p(\tau)}), \quad (10) \\ \theta_p(\varepsilon, \tau) = \begin{cases} c_p \varepsilon (\tau + 1)^{1/2-1/p}, & 2 < p \leq \infty, \\ \varepsilon (\ln(\tau + 1) + 2|\ln \varepsilon|)^{1/2}, & p = 2, \\ \check{c}_p \varepsilon^{2-2/p}, & 1 < p < 2. \end{cases}$$

Отметим, что при фиксированном τ коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p}$ в (10) есть $O(\varepsilon)$ при $p > 2$, $O(\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2})$ при $p = 2$ и $O(\varepsilon^{2-2/p})$ при $1 < p < 2$.

Теперь мы укажем аппроксимацию решения $\mathbf{v}_\varepsilon$ по норме в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и аппроксимацию соответствующего потока в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$. Для формулировки результата нам понадобится вспомогательный сглаживающий оператор Π_ε , действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и определенный соотношением

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\tilde{\Omega}/\varepsilon} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}. \quad (11)$$

Здесь $\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon$ — решение задачи (8) при $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in \mathcal{H}_p(T)$, $2 < p \leq \infty$. Пусть $\mathbf{v}_0$ — решение задачи (9). Тогда при $\tau \in (0, T)$ и $0 < \varepsilon \leq \tau^{1/2}$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_0(\cdot, \tau) - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \mathbf{v}_0(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ \leq C'(\tau) \varepsilon \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \rho_p(\varepsilon, \tau) \|\mathbf{F}(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{H}_p(\tau)}, \quad (12)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \mathbf{v}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq C'_4 \tau^{-1} \varepsilon \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \tilde{\rho}_p(\varepsilon, \tau) \|\mathbf{F}(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{H}_p(\tau)}. \quad (13)$$

Здесь $C'(\tau) = C'_2\tau^{-1} + C'_3\tau^{-1/2}$,

$$\rho_p(\varepsilon, \tau) = \begin{cases} C_5\varepsilon^{1-2/p} + C_6\varepsilon\tau^{1/2-1/p}, & 2 < p < \infty, \\ C_7\varepsilon \ln(\tau\varepsilon^{-2}) + C_8\varepsilon + C_9\varepsilon\tau^{1/2}, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\tilde{\rho}_p(\varepsilon, \tau) = \begin{cases} C_{10}\varepsilon^{1-2/p}, & 2 < p < \infty, \\ C_{11}\varepsilon \ln(\tau\varepsilon^{-2}) + C_{12}\varepsilon, & p = \infty. \end{cases}$$

Все постоянные здесь зависят лишь от $d, m, n, p, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|Q\|_{L_\infty}, \|Q^{-1}\|_{L_\infty}, \alpha_0, \alpha_1$ и от параметров решетки Γ .

Отметим, что при фиксированном τ коэффициенты при $\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p}$ в (12) и (13) суть $O(\varepsilon^{1-2/p})$ при $2 < p < \infty$ и $O(\varepsilon|\ln \varepsilon|)$ при $p = \infty$. В аппроксимациях (12) и (13) содержится сглаживающий оператор (11) в отличие от случая однородной задачи Коши (ср. (6), (7)).

Выделим частные случаи, когда g^0 совпадает с $\bar{g}$ или с $\underline{g}$.

Замечание 5. 1. Равенство $g^0 = \bar{g}$ равносильно соотношениям $b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, k = 1, \dots, m$, для столбцов $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ матрицы $g(\mathbf{x})$. При его выполнении для периодического решения задачи (4) имеем $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$ и корректоры в (6) и (12) обращаются в нуль.

2. Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно следующим представлениям для столбцов $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$ матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$: $\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), k = 1, \dots, m$, где $\mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m$, а $\mathbf{w}_k(\mathbf{x})$ суть Γ -периодические функции из класса $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$. При его выполнении $\tilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Тогда $\tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 = g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$ в (7). Кроме того, в этом случае в (13) можно «устранить» Π_ε и заменить $\tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{v}_0$ на $g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0$. Эта замена отразится лишь на постоянных в оценке.

6. Метод исследования. Поясним метод исследования на примере более простой задачи (2), причем ограничимся обсуждением основной оценки (6). Представим матрицу $Q(\mathbf{x})^{-1}$ в виде $Q(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*$, где $f(\mathbf{x})$ есть Γ -периодическая $(n \times n)$ -матрица-функция, такая, что $f, f^{-1} \in L_\infty$. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим дифференциальный оператор, формально заданный выражением $\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon$ (точное определение $\mathcal{A}_\varepsilon$ дается через соответствующую квадратичную форму).

Решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (2) дается формулой

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* \phi. \quad (14)$$

Поэтому дело сводится к изучению поведения окаймленной операторной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^*$ при малом ε . Решение $\mathbf{u}_0$ эффективной задачи (3) представляется в виде $\mathbf{u}_0 = f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \phi$, где $f_0 = (\bar{Q})^{-1/2}$ и $\mathcal{A}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0$. В силу (14) оценка (6) непосредственно вытекает из следующего результата.

Теорема 6. При $\tau > 0$ и $0 < \varepsilon \leq \tau^{1/2}$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq (C_2 \tau^{-1} + C_3 \tau^{-1/2}) \varepsilon. \quad (15)$$

Положим $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D})$. В существенном (15) сводится к неравенству

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} (f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C} \tau^{-1} \varepsilon, \quad (16)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \tau^{1/2}.$$

С помощью масштабного преобразования оценка (16) непосредственно выводится из следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g b(\mathbf{D})$, $\mathcal{A} = f^* \widehat{\mathcal{A}} f$. При $\tau \geq 1$ справедлива оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2} (f e^{-\mathcal{A} \tau} f^* - (I + \Lambda b(\mathbf{D})) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C} \tau^{-1}. \quad (17)$$

Приведенные редукции показывают, что гомогенизация для параболической задачи Коши тесно связана с вопросом о поведении окаймленной операторной экспоненты $f e^{-\mathcal{A} \tau} f^*$ при больших значениях τ .

Далее, с помощью теории Флоке–Блоха оператор $\mathcal{A}$ разлагается в прямой интеграл по семейству операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и зависящих от параметра $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ (квазиимпульса). Формально $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ задается выражением $f^* b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f$ при периодических граничных условиях (точное определение дается через соответствующую квадратичную форму). Оценка (17) равносильна равномерному по параметру $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ неравенству

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} (f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k}) \tau} f^* - (I + \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \tau} f_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C} \tau^{-1}. \quad (18)$$

Здесь $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$, $\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f_0$ (при периодических граничных условиях).

Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ представляет собой эллиптический оператор в ограниченной области Ω , аналитически зависящий от параметра $\mathbf{k}$. Его спектр дискретен. Для анализа операторного семейства $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и доказательства оценки (18) мы применяем методы аналитической теории возмущений по одномерному параметру $t = |\mathbf{k}|$. Роль невозмущенного оператора играет $\mathcal{A}(0)$; точка $\lambda = 0$ (край спектра) является изолированным собственным значением кратности n для оператора $\mathcal{A}(0)$. Тогда при малом $|\mathbf{k}|$ вблизи нуля оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ имеет n собственных значений, аналитически зависящих от $t = |\mathbf{k}|$. Асимптотические характеристики этих собственных значений и соответствующих собственных функций при малом $|\mathbf{k}|$ принято называть пороговыми характеристиками оператора $\mathcal{A}$ на краю спектра. Выясняется, что поведение окаймленной операторной экспоненты при больших значениях τ определяется пороговыми характеристиками оператора. В этом смысле можно говорить о том, что в параболических задачах (как и в эллиптических) гомогенизация является проявлением порогового эффекта на краю спектра оператора $\mathcal{A}$.

Подробное изложение результатов, представленных в настоящей заметке, можно найти в [16].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978. [2] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984. [3] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993. [4] Е. В. Севостьянова,

Матем. сб., **115**:2 (1981), 204–222. [5] В. В. Жиков, Дифференциальные уравнения, **25**:1 (1989), 44–50. [6] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108. [7] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **17**:5 (2005), 69–90. [8] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104. [9] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **18**:6 (2006), 1–130. [10] Т. А. Суслина, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90. [11] Т. А. Suslina, in: Nonlinear Equations and Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233. [12] Е. С. Василевская, Алгебра и анализ, **20**:1 (2009), 3–60. [13] В. В. Жиков, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 597–601. [14] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, Russian J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524. [15] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, Russian J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237. [16] T. A. Suslina, Math. Model. Nat. Phenom., **5**:4 (2010), 390–447.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Физический факультет
e-mail: suslina@list.ru

Поступило в редакцию
26 апреля 2010 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 24.09.2010. Подписано к печати 26.10.2010. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,9 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 232 экз. Заказ 726.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6