Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Яфаев, Коммутаторный метод диагонализации операторов Ганкеля, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 4, 65–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3019>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:11:16

УДК 517.983

Коммутаторный метод диагонализации операторов Ганкеля

© 2010. Д. Р. ЯФАЕВ

Посвящается памяти М. Ш. Бирмана

Мы предлагаем метод явной диагонализации некоторых операторов Ганкеля. Этот метод позволяет дать новые доказательства классических результатов о диагонализации ганкелевых операторов с абсолютно непрерывным спектром. Он приводит также к новым результатам. Наш подход основан на коммутации оператора Ганкеля с некоторым дифференциальным оператором второго порядка.

§1. Введение

1.1. Операторы Ганкеля могут быть определены (см., например, книгу [8]) как интегральные операторы в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ с ядрами, зависящими только от суммы переменных. Таким образом, ганкелев оператор A задается формулой

$$(Af)(x) = \int_0^\infty a(x+y)f(y) dy. \quad (1.1)$$

Конечно, A самосопряжен, если $a = \bar{a}$. Если

$$\int_0^\infty |a(x)|^2 x dx < \infty,$$

то A принадлежит классу Гильберта–Шмидта. Это условие выполняется, если, например, функция a непрерывна, не слишком сингулярна при $x = 0$ и достаточно быстро убывает при $x \rightarrow \infty$. Напротив, если $a(x) \sim a_0 x^{-1}$ при $x \rightarrow 0$ или (и) $a(x) \sim a_\infty x^{-1}$ при $x \rightarrow \infty$, то оператор A перестает быть компактным, хотя и остается ограниченным. Общая философия (см. работу Хоуланда [11]) состоит в том, что каждая из этих сингулярностей порождает ветвь $[0, a_0\pi]$ или (и) $[0, a_\infty\pi]$ простого абсолютно непрерывного спектра.

Имеется очень мало примеров, когда оператор A удается явно диагонализировать, т. е. найти его точные собственные функции. Первый такой результат принадлежит Мелеру [6], рассмотревшему случай $a(x) = (x+2)^{-1}$. Он показал, что функции

$$\psi_k(x) = (k \operatorname{th} \pi k)^{1/2} P_{-1/2+ik}(x+1), \quad k > 0, \quad (1.2)$$

$$\lambda = \pi / \operatorname{ch} \pi k, \quad k > 0, \quad (1.3)$$

где $P_{-1/2+ik}$ — функция Лежандра (см. [2, гл. 3]), удовлетворяют уравнениям $A\psi_k = \lambda\psi_k$. Функции ψ_k обычно параметризуются квазиимпульсом k , связан-

ным с $\lambda = \lambda(k)$ формулой (1.3). Оператор $U: L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$, определенный¹⁾ равенством

$$(Uf)(k) = \int_0^\infty \psi_k(x)f(x) dx, \quad (1.4)$$

унитарен. Так как $\lambda(k)$ — взаимно однозначное отображение полупрямой $\mathbb{R}_+$ на $(0, \pi)$ и $(U Af)(k) = \lambda(k)f(k)$, то спектр оператора A простой, абсолютно непрерывный и совпадает с интервалом $[0, \pi]$.

Ниже мы используем термин «собственная функция» для функции ψ_k (хотя $\psi_k \notin L^2(\mathbb{R}_+)$), такой, что $A\psi_k = \lambda\psi_k$ для спектрального параметра λ из непрерывного спектра оператора A . По определению мы считаем, что собственные функции ψ_k непрерывного спектра ортогональны, нормированы и множество всех ψ_k полно, если соответствующий оператор (1.4) унитарен (при отсутствии у A точечного спектра).

Следующий результат принадлежит В. Магнусу, рассмотревшему случай $a(x) = x^{-1}e^{-x/2}$. Более общий результат того же типа был получен М. Розенблумом, диагонализовавшим оператор A с ядром

$$a(x) = \Gamma(1 + \beta)x^{-1}W_{-\beta, 1/2}(x), \quad \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq -1, -2, \dots, \quad (1.5)$$

где $W_{-\beta, 1/2}$ — функция Уиттекера (см. [2, гл. 6]), а Γ — гамма-функция. Отметим, что $W_{0, 1/2}(x) = e^{-x/2}$. Спектр оператора A с таким ядром по-прежнему простой, и с точностью до конечного числа собственных значений он абсолютно непрерывен и совпадает с интервалом $[0, \pi]$. «Нормированные собственные функции» оператора A выражаются через функции Уиттекера:

$$\psi_k(x) = (2\pi)^{-1} \sqrt{k|\Gamma(1/2 - ik + \beta)|} \operatorname{sh} 2\pi k x^{-1} W_{-\beta, ik}(x), \quad k > 0. \quad (1.6)$$

Отметим, что функция $a(x) = (x + 2)^{-1}$ сингулярна при $x = \infty$ и собственные функции (1.2) ведут себя как линейные комбинации функций $x^{-1/2 \pm ik}$ при $x \rightarrow \infty$, в то время как функция (1.5) сингулярна при $x = 0$ и собственные функции (1.6) ведут себя как линейные комбинации тех же самых функций $x^{-1/2 \pm ik}$, но при $x \rightarrow 0$.

Наконец, упомянем простой случай $a(x) = x^{-1}$, когда оператор A прямо диагонализуется (см. работу Карлемана [4]) преобразованием Меллина. В этом случае спектр оператора A имеет кратность 2 (из-за сингулярностей функции $a(x)$ сразу при $x = 0$ и при $x = \infty$), абсолютно непрерывен и совпадает с интервалом $[0, \pi]$. Собственные функции оператора Карлемана равняются $x^{-1/2 \pm ik}$ (с точностью до нормировки).

Подчеркнем аналогию теорий сингулярных дифференциальных операторов и ганкелевых операторов с сингулярными ядрами. Таким образом, функции $x^{-1/2 \pm ik}$ играют (как при $x \rightarrow \infty$, так и при $x \rightarrow 0$) для ганкелевых операторов роль экспоненциальных функций $e^{\pm ikx}$ для дифференциальных операторов второго порядка. С этой точки зрения оператор Карлемана играет роль оператора $-d^2/dx^2$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

¹⁾Точное определение оператора U может быть дано через соответствующую полуторалинейную форму.

1.2. По мнению автора естественное объяснение того, почему в описанных выше случаях собственные функции оператора Ганкеля удается найти явно, отсутствовало. Наш подход показывает, что все диагонализуемые ганкелевы операторы A коммутируют с дифференциальными операторами

$$L = -\frac{d}{dx}(x^2 + \gamma x)\frac{d}{dx} + \alpha x^2 + \beta x \quad (1.7)$$

при подходящих значениях параметров $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\gamma \geq 0$. Таким образом, операторы A и L имеют общие собственные функции, что и позволяет диагонализировать оператор A .

Можно надеяться, что коммутаторный метод окажется применимым и к другим ядрам a . В настоящей работе в разд. 4.4 мы применяем коммутаторный метод для нахождения собственных функций в новом случае — для оператора Ганкеля с ядром

$$a(x) = \sqrt{\frac{8}{x}} K_1(\sqrt{8x}), \quad (1.8)$$

где K_1 — функция Макдональда (см. [2, гл. 7]). Аналогично функции (1.5) эта функция убывает экспоненциально при $x \rightarrow \infty$ и $a(x) \sim x^{-1}$ при $x \rightarrow 0$. В качестве примера другого типа отметим ганкелевы операторы с регулярными ядрами; такие операторы компактны.

Заметим, что оператор (1.7) при $\gamma = 0$ и $\alpha > 0$ уже рассматривался в [9]. В этой работе Розенблум исходил из тождества

$$\Gamma(1+\beta) \int_0^\infty (x+y)^{-1} W_{-\beta, 1/2}(x+y) y^{-1} W_{-\beta, ik}(y) dy = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi k} x^{-1} W_{-\beta, ik}(x), \quad (1.9)$$

найденного ранее Шанкером в [12]. Это тождество показывает, что функции (1.6) являются собственными функциями ганкелева оператора с ядром (1.5). Розенблум заметил, что функции (1.6) являются также собственными функциями оператора (1.7) для $\gamma = 0$ и $\alpha = 1/4$. Поскольку собственные функции самосопряженного дифференциального оператора L ортогональны и полны, то же самое верно относительно собственных функций ганкелева оператора A с ядром (1.5). Это приводит к диагонализации этого оператора.

Наш подход состоит несколько в другом. Мы устанавливаем соотношение $LA = AL$, из которого следует, что собственные функции операторов L и A совпадают. В частности, тождество (1.9) возникает вне рамок теории специальных функций.

Хорошо известно, что интегрируемость дифференциальных уравнений второго порядка в терминах специальных функций имеет глубокую теоретико-групповую интерпретацию (см., например, книгу Виленкина [3]). Что касается операторов Ганкеля, то диагонализация оператора Карлемана является, конечно, следствием его инвариантности относительно группы растяжений. Соотношение $LA = AL$ означает, что оператор A инвариантен относительно группы $\exp(-itL)$. Однако, в отличие от оператора Карлемана, для других операторов Ганкеля такая инвариантность не выглядит очевидной.

Коммутаторная схема излагается в §2, а конкретные примеры ядер, сингулярных при $x = \infty$ и $x = 0$, обсуждаются соответственно в §3 и §4. Операторы Ганкеля с регулярными ядрами рассматриваются в §5.

§2. Коммутаторный метод

2.1. Сначала мы рассматриваем оператор L , определенный формулой (1.7), как дифференциальный оператор на классе $C^2(\mathbb{R}_+)$, но позднее он будет определен как самосопряженный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$. Пусть оператор A задается формулой (1.1), где $a \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Прокоммутируем операторы A и L . Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$, и предположим, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} (y^2 + \gamma y) f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (y^2 + \gamma y) f'(y) = 0 \quad (2.1)$$

и

$$\lim_{y \rightarrow \infty} a'(x+y)(y^2 + \gamma y) f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} a(x+y)(y^2 + \gamma y) f'(y) = 0 \quad (2.2)$$

для всех $x \geq 0$. Тогда, интегрируя по частям, найдем, что

$$(ALf)(x) = \int_0^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial y} ((y^2 + \gamma y) a'(x+y)) + a(x+y)(\alpha y^2 + \beta y) \right) f(y) dy.$$

Отсюда следует, что

$$((LA - AL)f)(x) = \int_0^\infty q(x, y) f(y) dy,$$

где

$$\begin{aligned} q(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} ((x^2 + \gamma x) a'(x+y)) + \frac{\partial}{\partial y} ((y^2 + \gamma y) a'(x+y)) \\ &\quad + (\alpha x^2 - \alpha y^2 + \beta x - \beta y) a(x+y) \\ &= (x-y)(-(z+\gamma) a''(z) - 2a'(z) + (\alpha z + \beta) a(z)) \end{aligned}$$

и $z = x+y$. Таким образом, мы приходим к следующему результату общего характера.

Теорема 2.1. *Предположим, что ядро a оператора Ганкеля A удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$-(x+\gamma) a''(x) - 2a'(x) + (\alpha x + \beta) a(x) = 0. \quad (2.3)$$

Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$, и пусть выполняются условия (2.1) и (2.2). Тогда

$$(LA - AL)f = 0. \quad (2.4)$$

Отметим, что после замены переменных

$$a(x) = (x+\gamma)^{-1} b(x+\gamma) \quad (2.5)$$

в (2.3) мы получаем уравнение Шрёдингера с кулоновским потенциалом

$$-b''(r) + (\beta - \alpha\gamma) r^{-1} b(r) = -\alpha b(r). \quad (2.6)$$

2.2. В конкретных примерах мы будем использовать теорему 2.1 следующим образом. Если L самосопряжен и имеет простой спектр, то равенство $LA = AL$ показывает, что A — функция F от L , т.е. операторы A и L имеют общие собственные функции. Для вычисления функции F мы поступаем следующим образом. Предположим, что вещественная функция ψ_μ удовлетворяет условиям (2.1), (2.2) и уравнению

$$-((x^2 + \gamma x) \psi'_\mu(x))' + (\alpha x^2 + \beta x) \psi_\mu(x) = \mu \psi_\mu(x). \quad (2.7)$$

Тогда, согласно равенству (2.4), тому же самому уравнению удовлетворяет функция $A\psi_\mu$ и, следовательно, при некоторых числах $\lambda = \lambda_\mu$ и $\check{\lambda} = \check{\lambda}_\mu$

$$(A\psi_\mu)(x) = \lambda\psi_\mu(x) + \check{\lambda}\check{\psi}_\mu(x), \quad (2.8)$$

где $\check{\psi}_\mu$ — решение уравнения $L\check{\psi}_\mu = \mu\check{\psi}_\mu$, линейно независимое с ψ_μ . Далее, сравнивая асимптотики функций $\psi_\mu(x)$, $\check{\psi}_\mu(x)$ и $(A\psi_\mu)(x)$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$, мы видим, что $\check{\lambda} = 0$, и находим $\lambda = F(\mu)$ как функцию от μ . Наконец, если ψ_μ принадлежит области определения какой-либо самосопряженной реализации дифференциального оператора L , то при подходящей нормировке функций ψ_μ система всех функций ψ_μ ортогональна и полна. В этом случае $A = F(L)$. Отметим, что такой подход позволяет избежать точного определения коммутаторов и ссылок на результаты из функционального анализа.

Оказывается, что во всех наших приложениях $F(\mu) = \pi/\text{ch}(\pi\sqrt{\mu - 1/4})$ и, следовательно,

$$A = \pi/\text{ch}(\pi\sqrt{L - 1/4}).$$

На самом деле несколько удобнее параметризовать собственные функции квазиимпульсом $k > 0$, связанным с μ и λ формулами

$$\mu = k^2 + 1/4 \in (1/4, \infty), \quad \lambda = \pi/\text{ch} \pi k \in (0, \pi). \quad (2.9)$$

Подчеркнем, что $\psi_k(x)$, $\psi_\mu(x)$ и $\psi_\lambda(x)$ обозначают одну и ту же функцию при условии, что параметры k , μ и λ связаны формулами (2.9).

Оператор U , определенный соотношением (1.4), унитарен, и оператор UAU^* действует в $L^2(\mathbb{R}_+)$ как умножение на функцию $\lambda(k) = \pi/\text{ch} \pi k$. Действительно, согласно теореме Фубини, из уравнения $A\psi_k = \lambda(k)\psi_k$ вытекает, что при $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} (AU^*g)(x) &= \int_0^\infty dk g(k) \int_0^\infty dy a(x+y)\psi_k(y) \\ &= \int_0^\infty \lambda(k)\psi_k(x)g(k) dk = (U^*(\lambda g))(x). \end{aligned}$$

Это эквивалентно соотношению

$$(U Af)(k) = \lambda(k)(U f)(k) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}_+). \quad (2.10)$$

Поскольку $\lambda: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \pi)$ — взаимно однозначное отображение, оператор A имеет простой абсолютно непрерывный спектр, совпадающий с отрезком $[0, \pi]$.

При реализации этой схемы случаи сингулярностей при $x = \infty$, когда $\gamma > 0$, и при $x = 0$, когда $\gamma = 0$, удобно рассматривать порознь.

§3. Сингулярность на бесконечности

3.1. Положим $\gamma = 2$. Сначала мы предполагаем, что $\alpha = \beta = 0$. Тогда функция $a(x) = (x+2)^{-1}$ удовлетворяет уравнению (2.3), и соответствующий оператор L имеет вид

$$L = -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}, \quad \text{где } p(x) = x^2 + 2x.$$

Обозначим через $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ функции Лежандра первого и второго рода (см., например, [2, гл. 3]). Они определяются как решения уравнения

$$(1 - z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \nu(\nu + 1)u(z) = 0, \quad z > 1,$$

удовлетворяющие условиям $P_\nu(1) = 1$ и $Q_\nu(z) = -2^{-1} \ln(z - 1) + c_\nu$ при $z \rightarrow 1 + 0$ (значение константы c_ν несущественно). Тогда функции $P_{-1/2+ik}(x + 1)$ и $Q_{-1/2+ik}(x + 1)$ удовлетворяют уравнению $Lu = (k^2 + 1/4)u$. Отметим также (см. формулы (2.10.2) и (2.10.5) из [2]), что

$$P_{-1/2+ik}(x + 1) = m(k)x^{-1/2+ik} + \overline{m(k)}x^{-1/2-ik} + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

где

$$m(k) = \frac{\Gamma(ik)}{\sqrt{2\pi} \Gamma(1/2 + ik)} 2^{ik}. \quad (3.2)$$

Оператор L симметричен в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ на области определения $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, но не является существенно самосопряженным. Поскольку обе функции $P_{-1/2+ik}(x + 1)$ и $Q_{-1/2+ik}(x + 1)$ принадлежат L^2 в окрестности точки $x = 0$, дефектные числа оператора L равны $(1, 1)$. Одно из самосопряженных расширений оператора L с $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ (оно также обозначается через L) определено на области $\mathscr{D}(L)$, состоящей из функций $f(x)$, принадлежащих классу Соболева $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f'(x) = o(x^{-1/2}), \quad x \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

(мы называем такие граничные условия регулярными); предполагается также, что $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и $Lf \in L^2(\mathbb{R}_+)$. В самом деле, прямое интегрирование по частям показывает, что оператор L симметричен. Далее, применяя подходящую функцию Грина, найдем, что для всех $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ уравнение $(pf')' = h$ имеет решение, удовлетворяющее условию (3.3). Таким образом, область значений оператора L совпадает с $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, следовательно, L самосопряжен (ср. §132, п. II, из [1]).

3.2. Для изучения оператора L удобно сделать стандартную (см., например, книгу Титчмарша [10]) замену переменных. Положим

$$t = \omega(x) = \int_0^x p(y)^{-1/2} dy \quad \text{и} \quad f(x) = \omega'(x)^{1/2} \tilde{f}(\omega(x)) =: (F\tilde{f})(x). \quad (3.4)$$

Оператор F унитарен в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, а оператор $\tilde{L} = F^{-1}LF$ действует по формуле $\tilde{L} = -d^2/dt^2 + q(\eta(t))$, где $q(x) = -16^{-1}p(x)^{-1}p'(x)^2 + 4^{-1}p''(x)$ и $\eta = \omega^{-1}$ — функция, обратная к ω (так что $x = \eta(t)$).

Если $p(x) = x^2 + 2x$, то

$$\omega(x) = 2 \ln(x^{1/2} + (x + 2)^{1/2}) - \ln 2 \quad (3.5)$$

и, следовательно,

$$\tilde{L} = -\frac{d^2}{dt^2} + \tilde{q}(t) + \frac{1}{4}, \quad (3.6)$$

где $\tilde{q}(t) = -4^{-1}(\eta^2(t) + 2\eta(t))^{-1}$. Так как $\omega(x) = (2x)^{1/2} + O(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $\omega(x) = \ln(2x) + O(x^{-1})$ при $x \rightarrow \infty$, то $\eta(t) \sim t^2/2$ при $t \rightarrow 0$ и $\eta(t) \sim e^t/2$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\tilde{q}(t) \sim -(4t^2)^{-1}$ при $t \rightarrow 0$ и $\tilde{q}(t) = O(e^{-t})$

при $t \rightarrow \infty$. Отметим, что оператор $\tilde{L}$ самосопряжен на области определения $\mathcal{D}(\tilde{L})$, состоящей из функций $\tilde{f}(t)$, принадлежащих классу Соболева $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1/2} \tilde{f}(t), \quad \tilde{f}'(t) - (2t)^{-1} \tilde{f}(t) = o(t^{1/2}), \quad t \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

и таких, что $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{L}\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Все обычные результаты спектральной теории и теории рассеяния применяются сначала к оператору $\tilde{L}$, а затем используются для оператора L . Оператор $\tilde{L}$ имеет простой абсолютно непрерывный спектр, совпадающий с интервалом $[1/4, \infty)$. Он не имеет собственных значений, так как уравнение $\tilde{L}\tilde{u} = \mu\tilde{u}$ или, что эквивалентно, $Lu = \mu u$ при $\mu \in \mathbb{R}$ не имеет решений из $L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющих регулярным граничным условиям в нуле. Оператор $\tilde{L}$ может быть диагонализирован (см., например, [10], [13]) следующим образом. Пусть $\tilde{u}_k(t)$, $k > 0$, — вещественное решение уравнения

$$\tilde{L}\tilde{u}_k = (k^2 + 1/4)\tilde{u}_k, \quad (3.8)$$

удовлетворяющее граничным условиям (3.7). Оно имеет асимптотику

$$\tilde{u}_k(t) = m(k)e^{ikt} + \overline{m(k)}e^{-ikt} + o(1) \quad (3.9)$$

при $t \rightarrow \infty$. Тогда оператор $\tilde{U}$, определенный соотношением

$$(\tilde{U}\tilde{f})(k) = (2\pi)^{-1/2}|m(k)|^{-1} \int_0^\infty \tilde{u}_k(t)\tilde{f}(t) dt, \quad (3.10)$$

унитарен в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ и $(\tilde{U}\tilde{L}\tilde{f})(k) = (k^2 + 1/4)(\tilde{U}\tilde{f})(k)$.

Сделаем замену переменных (3.4) и положим $U = F\tilde{U}F^{-1}$. Отметим, что

$$(2\pi)^{-1/2}|m(k)|^{-1} = \sqrt{k \operatorname{th} \pi k},$$

где функция $m(k)$ определяется равенством (3.2). Отсюда следует, что оператор U , заданный соотношением

$$(Uf)(k) = \sqrt{k \operatorname{th} \pi k} \int_0^\infty P_{-1/2+ik}(x+1)f(x) dx, \quad (3.11)$$

унитарен в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ и

$$(ULf)(k) = (k^2 + 1/4)(Uf)(k). \quad (3.12)$$

3.3. Вернемся к ганкелеву оператору A . Заметим, что функция $P_{-1/2+ik}(x+1)$ удовлетворяет¹⁾ обоим граничным условиям (2.1) и (2.2). Из теоремы 2.1 вытекает, что

$$\int_0^\infty (x+y+2)^{-1} P_{-1/2+ik}(y+1) dy = \lambda P_{-1/2+ik}(x+1) + \check{\lambda} Q_{-1/2+ik}(x+1). \quad (3.13)$$

¹⁾Мы должны выбирать регулярные граничные условия в нуле, так как функция $Q_{-1/2+ik}(x+1)$ не удовлетворяет второму граничному условию (2.1).

Рассматривая здесь предел $x \rightarrow 0$, мы видим, что $\check{\lambda} = 0$. Затем мы находим предел при $x \rightarrow \infty$. Из (3.1) легко следует, что левая часть формулы (3.13) равна

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left(m(k) \int_0^\infty (x+y+2)^{-1} y^{-1/2+ik} dy \right) + O(x^{-1}) \\ = 2 \operatorname{Re} \left(m(k) x^{-1/2+ik} \int_0^\infty (t+1)^{-1} t^{-1/2+ik} dt \right) + O(x^{-1}), \end{aligned}$$

где мы положили $y = xt$. Сравнивая эту асимптотику с асимптотикой (3.1) правой части формулы (3.13), получаем, что

$$\lambda = \int_0^\infty (t+1)^{-1} t^{-1/2+ik} dt = \pi(\operatorname{ch} \pi k)^{-1} \quad (3.14)$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty (x+y+2)^{-1} P_{-1/2+ik}(y+1) dy = \pi(\operatorname{ch} \pi k)^{-1} P_{-1/2+ik}(x+1). \quad (3.15)$$

Это дает уравнение (2.10) с оператором U , определенным формулой (3.11). Поскольку оператор U унитарен, мы пришли к результату Мелера [6].

Предложение 3.1. *Оператор Ганкеля с ядром $a(x) = (x+2)^{-1}$ имеет простой абсолютно непрерывный спектр, совпадающий с интервалом $[0, \pi]$. Его нормированная собственная функция, отвечающая спектральному параметру $\lambda = \pi(\operatorname{ch} \pi k)^{-1}$, определяется формулой (1.2).*

Подчеркнем, что уравнение (3.15) было получено как прямое следствие коммутаторного метода, без использования результатов теории специальных функций.

§4. Сингулярность в нуле

В первых трех разделах мы рассматриваем оператор Ганкеля с ядром (1.5), а в разд. 4 — с ядром (1.8). В обоих случаях $a(x) \sim x^{-1}$ при $x \rightarrow 0$ и $a(x)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow \infty$. Соответствующий оператор L определяется формулой (1.7), где $\gamma = 0$.

4.1. Отметим, что в случае $\gamma = 0$ после замены переменных $\psi(x) = x^{-1}\varphi(x)$ в (2.7) мы вновь (ср. с уравнением (2.6)) получаем уравнение Шрёдингера

$$-\varphi''(x) + (\alpha + \beta x^{-1} - \mu x^{-2})\varphi(x) = 0 \quad (4.1)$$

с кулоновским потенциалом, но с ненулевым орбитальным членом. Ниже мы полагаем $\alpha = 1/4$.

Напомним, что функция Уиттекера $W_{-\beta,p}(x)$ может быть определена как решение уравнения (4.1), где $\mu = 1/4 - p^2$, такое, что

$$W_{-\beta,p}(x) = x^{-\beta} e^{-x/2} (1 + O(x^{-1})) \quad (4.2)$$

при $x \rightarrow \infty$. Конечно, $W_{-\beta,-p}(x) = W_{-\beta,p}(x)$. В частности, функция $b(x) = W_{-\beta,1/2}(x)$ удовлетворяет уравнению (2.6), где $\alpha = 1/4$ и $\gamma = 0$.

Что касается асимптотики при $x \rightarrow 0$ (см. §6.8 книги [2]), то

$$W_{-\beta,ik}(x) = m(k)x^{1/2+ik} + \overline{m(k)}x^{1/2-ik} + O(x^{3/2}), \quad k > 0, x \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

где

$$m(k) = \Gamma(-2ik)(\Gamma(1/2 - ik + \beta))^{-1}. \quad (4.4)$$

Если $p \geq 0$ и $-1/2 + p + \beta \neq -1, -2, \dots$, то при $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} W_{-\beta,p}(x) &\sim \Gamma(2p)(\Gamma(1/2 + p + \beta))^{-1} x^{1/2-p}, & p > 0, \\ W_{-\beta,0}(x) &\sim -\Gamma(1/2 + \beta) x^{1/2} \ln x. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если $-1/2 + p + \beta = -n$, где $n = 1, 2, \dots$, то, используя формулы (6.9.4) и (6.9.36) из [2], мы можем выразить функции Уиттекера в терминах полиномов Лагерра:

$$W_{-\beta,p}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! e^{-x/2} x^{p+1/2} L_{n-1}^{2p}(x). \quad (4.6)$$

Если $\gamma = 0$ и $\alpha = 1/4$, то

$$L = -\frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} + \frac{x^2}{4} + \beta x. \quad (4.7)$$

Подчеркнем, что коэффициент β может быть произвольным. Выясняется, что сильное вырождение функции x^2 при $x = 0$ порождает ветвь абсолютно непрерывного спектра оператора L .

Сначала мы определим L как самосопряженный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$. Мы проверим, что он существенно самосопряжен на области определения $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Пусть $^1) (F\tilde{f})(x) = x^{-1/2}\tilde{f}(\ln x)$. Тогда оператор $F: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ унитарен и оператор $\tilde{L} = F^{-1}LF$ действует по формуле (3.6), где $\tilde{q}(t) = e^{2t}/4 + \beta e^t$. Это дает нам стандартный оператор Штурма–Лиувилля в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Потенциал $\tilde{q}(t)$ стремится к 0 при $t \rightarrow -\infty$ и к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. В частности, $\tilde{L}$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, откуда следует существенная самосопряженность оператора L на $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, граничное условие в точке $x = 0$ не нужно. Так как $\tilde{q}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то квантовая частица может уходить только на $-\infty$. Поэтому спектр оператора $\tilde{L}$ простой.

4.2. Разложение по собственным функциям оператора $\tilde{L}$ может быть построено с помощью следующей стандартной процедуры (см., например, [13, разд. 5.4]). Как мы увидим ниже, помимо простого абсолютно непрерывного спектра, совпадающего с $[1/4, \infty)$, при $\beta < -1/2$ оператор $\tilde{L}$ имеет конечное число простых собственных значений $\mu_1, \dots, \mu_N$, $N = N(\beta)$, лежащих левее точки $1/4$. Обозначим через $\mathcal{H}^{(p)}$ подпространство, натянутое на соответствующие собственные функции. Пусть $\tilde{u}_k(t)$, $k > 0$, — вещественное решение уравнения (3.8), принадлежащее $L^2(\mathbb{R}_+)$. Оно имеет асимптотику (3.9) при $t \rightarrow -\infty$ с функцией $m(k)$, которая вычисляется ниже. Тогда оператор $\tilde{U}: \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$, определяемый уравнением (ср. с (3.10))

$$(\tilde{U}\tilde{f})(k) = (2\pi)^{-1/2} |m(k)|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \tilde{f}(t) dt, \quad (4.8)$$

¹⁾ Отметим, что интеграл в (3.4) расходится для $p(x) = x^2$, и, следовательно, определение оператора F нуждается в модификации.

ограничен, $\tilde{U}|_{\mathcal{H}^{(p)}} = 0$, отображение $\tilde{U}: \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^{(p)} \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ унитарно и выполняется уравнение

$$(\tilde{U}\tilde{L}\tilde{f})(k) = (k^2 + 1/4)(\tilde{U}\tilde{f})(k).$$

Функции $u_k(x) = x^{-1/2}\tilde{u}_k(\ln x)$, $k > 0$, удовлетворяют уравнению

$$-(x^2 u'_k(x))' + 4^{-1}x^2 u_k(x) + \beta x u_k(x) = (k^2 + 1/4)u_k(x) \quad (4.9)$$

и выражаются через функции Уиттекера:

$$u_k(x) = x^{-1}W_{-\beta, ik}(x). \quad (4.10)$$

Из (4.3) следует, что функция $\tilde{u}_k(t) = e^{t/2}u_k(e^t)$ имеет при $t \rightarrow -\infty$ асимптотику (3.9) с функцией $m(k)$, определяемой равенством (4.4). Вычисляя $|m(k)|$ и проводя в (4.4) замену переменных $t = \ln x$, получаем, что оператор $U = F\tilde{U}F^{-1}$ удовлетворяет соотношению

$$(Uf)(k) = \pi^{-1}\sqrt{k \operatorname{sh} 2\pi k} |\Gamma(1/2 - ik + \beta)| \int_0^\infty x^{-1}W_{-\beta, ik}(x)f(x) dx.$$

Он ограничен, $U|_{\mathcal{H}^{(p)}} = 0$, отображение $U: \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^{(p)} \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ унитарно, и справедливо уравнение (3.12). Здесь $\mathcal{H}^{(p)}$ — подпространство, натянутое на собственные функции $\psi_1, \dots, \psi_N$ оператора L .

Вычислим эти функции. Функция $u_p(x) = x^{-1}W_{-\beta, p}(x)$ при $p \geq 0$ удовлетворяет уравнению (4.9), где роль k^2 играет $-p^2$. Ввиду (4.2) она принадлежит L^2 на бесконечности. Однако из асимптотик (4.5) следует, что она может принадлежать L^2 в окрестности точки $x = 0$ лишь при $-1/2 + p + \beta = -n$, где $n = 1, 2, \dots$. Это возможно только при $\beta \geq -1/2$. Кроме того, при $\beta = -1/2$ обязательно $p = 0$, однако в силу (4.6) функция u_0 не принадлежит L^2 (ни при каких β). Таким образом, если $\beta \geq -1/2$, то оператор L имеет только абсолютно непрерывный спектр. Если $\beta < -1/2$, то он имеет также собственные значения $\mu_n = 1/4 - (|\beta| + 1/2 - n)^2$, где $n = 1, 2, \dots$ и $n < |\beta| + 1/2$ (с тем чтобы $p > 0$). Согласно формуле (4.6), соответствующими собственными функциями являются

$$\psi_n(x) = e^{-x/2}x^{p-1/2}L_{n-1}^{2p}(x), \quad p = |\beta| + 1/2 - n. \quad (4.11)$$

4.3. Вернемся к оператору Ганкеля A с ядром (1.5). Из (4.2) следует, что $a(x)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow \infty$, а из первой формулы (4.5), где $p = 1/2$, следует, что $a(x) \sim x^{-1}$ при $x \rightarrow 0$. Заметим, что ввиду асимптотик (4.2) и (4.3) функция (4.10) удовлетворяет обоим граничным условиям (2.1) и (2.2). Таким образом, из теоремы 2.1 вытекает, что

$$\int_0^\infty a(x+y)y^{-1}W_{-\beta, ik}(y) dy = \lambda(k)x^{-1}W_{-\beta, ik}(x) + \check{\lambda}(k)x^{-1}M_{-\beta, ik}(x), \quad (4.12)$$

где функция Уиттекера $M_{-\beta, ik}$ — решение уравнения (2.6), экспоненциально растущее при $x \rightarrow \infty$. Поэтому, рассматривая в (4.12) предел $x \rightarrow \infty$, мы видим, что обязательно $\check{\lambda}(k) = 0$. Затем мы берем предел при $x \rightarrow 0$ и используем

асимптотику (4.3). Так как $a(x) \sim x^{-1}$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a(x+y)y^{-1}W_{-\beta,ik}(y)dy &= 2\operatorname{Re}\left(m(k)\int_0^\infty (x+y)^{-1}y^{-1/2+ik}dy\right) + O(1) \\ &= 2\lambda(k)\operatorname{Re}(m(k)x^{-1/2+ik}) + O(1), \end{aligned}$$

где $\lambda(k)$ опять задается формулой (3.14). Это приводит к уравнению (1.9).

Остается вычислить собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ оператора A . Соответствующие собственные функции определяются формулой (4.11). Будем исходить из уравнения (4.12), где роль ik играет $p = |\beta| + 1/2 - n$. Как и раньше, рассматривая предел $x \rightarrow \infty$, получаем, что $\lambda_n = 0$ и, следовательно,

$$\int_0^\infty a(x+y)e^{-y/2}y^{p-1/2}L_{n-1}^{2p}(y)dy = \lambda_n e^{-x/2}x^{p-1/2}L_{n-1}^{2p}(x). \quad (4.13)$$

Из (1.5) и (4.2) вытекает, что левая часть здесь равна

$$\Gamma(1+\beta)x^{-\beta-1}e^{-x/2}\int_0^\infty e^{-y}y^{p-1/2}L_{n-1}^{2p}(y)dy(1+O(x^{-1})), \quad x \rightarrow \infty.$$

Сопоставляя формулы (2.8.46) и (10.12.33) из [2], мы видим, что

$$(n-1)!\int_0^\infty e^{-y}y^{p-1/2}L_{n-1}^{2p}(y)dy = \Gamma(p+n-1/2). \quad (4.14)$$

Вспомним также, что $L_{n-1}^{2p}(x)$ — полином степени $n-1$ с коэффициентом $(-1)^{n-1}/(n-1)!$ при x^{n-1} . Таким образом, из соотношения (4.13) следует, что

$$\lambda_n = (-1)^n \pi / \sin \pi \beta, \quad n = 1, 2, \dots, n < |\beta| + 1/2. \quad (4.15)$$

Поскольку собственные функции оператора L ортогональны и полны, мы приходим к результату Розенблюма [9].

Предложение 4.1. *Оператор Ганкеля A с ядром (1.5) имеет простой абсолютно непрерывный спектр, совпадающий с интервалом $[0, \pi]$. Его нормированная собственная функция, отвечающая точке непрерывного спектра $\lambda = \pi(\operatorname{ch} \pi k)^{-1}$, дается формулой*

$$\psi_k(x) = \pi^{-1} \sqrt{k \operatorname{sh} 2\pi k} |\Gamma(1/2 - ik + \beta)| x^{-1} W_{-\beta, ik}(x), \quad k > 0.$$

Кроме того, если $\beta < -1/2$, то оператор A имеет собственные значения (4.15) и соответствующие собственные функции (4.11).

4.4. Теперь мы обратимся к оператору Ганкеля с сингулярным ядром (1.8), который, по-видимому, ранее в литературе не рассматривался. Напомним, что функция Макдональда определяется соотношением $K_p(z) = 2^{-1} i e^{\pi i p/2} H_p^{(1)}(iz)$, где $H_p^{(1)}$ — функция Ганкеля. Теперь функция $b(x) = xa(x)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера (2.3) при нулевой энергии $\alpha = 0$ и константе связи $\beta = 2$. Разумеется, мы могли бы взять любое $\beta > 0$, но мы должны исключать отрицательные β , поскольку в этом случае функция $b(x)$ растет при $x \rightarrow \infty$.

Из хорошо известных свойств функции $H_p^{(1)}$ вытекает, что функция (1.8) имеет асимптотику

$$a(x) = 4\pi^{1/2}x^{-3/4}e^{-\sqrt{8x}}(1+O(x^{-1/2})) \quad (4.16)$$

при $x \rightarrow \infty$ и $a(x) \sim x^{-1}$ при $x \rightarrow 0$.

Соответствующий оператор

$$L = -\frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} + 2x$$

изучается аналогично оператору (4.7). Например, оператор $\tilde{L} = F^{-1}LF$ действует по формуле (3.6), где $\tilde{q}(t) = 2e^t$. Решение уравнения (2.7), где $\mu = k^2 + 1/4$, принадлежащее L^2 на бесконечности, выражается опять через функцию Макдональда

$$u_k(x) = x^{-1/2} K_{2ik}(\sqrt{8x}).$$

Согласно формулам (7.2.12) и (7.2.13) из [2], имеем

$$u_k(x) = m(k)x^{-1/2+ik} + \overline{m(k)}x^{-1/2-ik} + O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow 0,$$

где

$$m(k) = i\pi 2^{-1+ik} (\Gamma(1+2ik) \operatorname{sh} 2\pi k)^{-1}.$$

Вычисляя $|m(k)|$ и используя (4.8), мы получаем, что теперь формула (1.4) принимает вид

$$(Uf)(k) = 2\pi^{-1} \sqrt{k \operatorname{sh} 2\pi k} \int_0^\infty x^{-1/2} K_{2ik}(\sqrt{8x}) f(x) dx. \quad (4.17)$$

Оператор L не имеет собственных значений, так как функции $x^{-1/2} K_{2p}(\sqrt{8x})$ при $p \geq 0$ не принадлежат L^2 в окрестности точки $x = 0$. Таким образом, как и в разд. 4.2, мы видим, что оператор U , определенный формулой (4.17), унитарен в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, а оператор L имеет простой абсолютно непрерывный спектр $[1/4, \infty)$.

Из теоремы 2.1 вытекает, что

$$\int_0^\infty a(x+y) y^{-1/2} K_{2ik}(\sqrt{8y}) dy = \lambda(k) x^{-1/2} K_{2ik}(\sqrt{8x}) + \check{\lambda}(k) x^{-1/2} H_{2ik}^{(2)}(i\sqrt{8x}) \quad (4.18)$$

(функция Ганкеля $H_{2ik}^{(2)}(iz)$ экспоненциально растет при $z \rightarrow \infty$) для некоторых постоянных $\lambda(k)$ и $\check{\lambda}(k)$. Так как интеграл в (4.18) (экспоненциально) убывает при $x \rightarrow \infty$, то обязательно $\check{\lambda}(k) = 0$. Сравнивая асимптотики левой и правой частей в (4.18) при $x \rightarrow 0$ и используя соотношение $a(x) \sim x^{-1}$ при $x \rightarrow 0$, получаем, что число $\lambda(k)$ опять дается формулой (3.14). Таким образом, мы приходим к результату, аналогичному полученному в предыдущем разделе:

Предложение 4.2. *Оператор Ганкеля A с ядром (1.8) имеет простой абсолютно непрерывный спектр, совпадающий с интервалом $[0, \pi]$. Его нормированная собственная функция, отвечающая спектральной точке $\lambda = \pi(\operatorname{ch} \pi k)^{-1}$, дается формулой*

$$\psi_k(x) = 2\pi^{-1} \sqrt{k \operatorname{sh} 2\pi k} x^{-1/2} K_{2ik}(\sqrt{8x}), \quad k > 0.$$

Как побочный результат наших рассуждений мы получили уравнение

$$x^{1/2} \int_0^\infty (x+y)^{-1/2} K_1(\sqrt{x+y}) y^{-1/2} K_{2ik}(\sqrt{y}) dy = \pi(\operatorname{ch} \pi k)^{-1} K_{2ik}(\sqrt{x}).$$

Мы не нашли этого уравнения в литературе по специальным функциям. Отметим, однако, что оно может быть формально выведено из уравнения Шанкера (1.9), если использовать соотношение (формула (6.9.19) из [2])

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Gamma(\beta + 1) W_{-\beta, m}(x/\beta) = 2x^{1/2} K_{2m}(2x^{1/2}).$$

4.5. Оператор Карлемана A очевидным образом попадает в изложенную выше схему. Теперь оператор A коммутирует с оператором (1.7), где $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Этот оператор имеет абсолютно непрерывный спектр кратности 2, совпадающий с $[1/4, \infty]$. Его собственные функции $x^{-1/2+ik}$ для всех $k \in \mathbb{R}$ являются также собственными функциями оператора A . Соотношение между спектральными параметрами λ и k опять дается формулой (3.14), так что оператор A имеет абсолютно непрерывный спектр кратности 2, совпадающий с $[0, \pi]$.

§5. Регулярные ядра

5.1. Здесь мы рассмотрим ядра $a(x)$, которые быстро убывают при $x \rightarrow \infty$ и имеют конечные пределы при $x \rightarrow 0$. Положим $\gamma = 2$ и будем различать случаи $\alpha > 0$, β произвольно и $\alpha = 0$, $\beta > 0$. Пусть $\alpha = 1/4$ и $\beta = 2$ соответственно в первом и втором случаях. Если $\alpha = 1/4$, то решение уравнения (2.6) дается (см. разд. 4.1) формулой $b(r) = W_{-\beta, 1/2}(r)$, где $W_{-\beta, 1/2}$ — функция Уиттекера. Если $\alpha = 0$ и $\beta = 2$, то решение уравнения (2.6) равно $b(r) = r^{1/2} K_1(\sqrt{8r})$, где K_1 — функция Макдональда (см. разд. 4.4). Соответствующие функции (2.5) экспоненциально убывают на бесконечности и имеют конечные пределы при $x \rightarrow 0$. Отсюда следует, что операторы A компактны.

Пусть функция $\omega(x)$ определяется формулой (3.5), $\eta = \omega^{-1}$ и

$$\tilde{q}(t) = -4^{-1}(\eta^2(t) + 2\eta(t))^{-1} + \alpha\eta^2(t) + \beta\eta(t). \quad (5.1)$$

Так как $\eta(t) \sim e^t/2$, то $\tilde{q}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что теперь операторы $\tilde{L}$ и, следовательно, L имеют дискретные спектры. Подчеркнем, что эти операторы по-прежнему определяются формулами (3.6) и (1.7) на функциях, удовлетворяющих соответственно граничным условиям (3.7) и (3.3).

Теорема 2.1 гарантирует, что операторы A и L имеют общие собственные функции. Вряд ли собственные функции оператора L выражаются через стандартные специальные функции. Однако в их терминах мы можем вычислить собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ оператора A . Действительно, пусть $\psi_\mu \in \mathcal{D}(L)$ и $L\psi_\mu = \mu\psi_\mu$. Тогда функция $\tilde{\psi}_\mu(t) = (F^{-1}\psi_\mu)(t)$ удовлетворяет уравнению

$$-\tilde{\psi}_\mu''(t) + \tilde{q}(t)\tilde{\psi}_\mu(t) = (\mu - 1/4)\tilde{\psi}_\mu(t),$$

где $\tilde{q}(t)$ — функция (5.1). При подходящей нормировке асимптотика $\tilde{\psi}_\mu(t)$ при $t \rightarrow \infty$ дается (см., например, книгу [7]) квазиклассической формулой

$$\tilde{\psi}_\mu(t) \sim \tilde{q}(t)^{-1/4} \exp\left(-\int_0^t \tilde{q}(s)^{1/2} ds\right).$$

Отсюда следует, что $\tilde{\psi}_\mu(t) \sim e^{-t/2} \exp(-4^{-1}e^t - \beta t)$ в первом случае и $\tilde{\psi}_\mu(t) \sim e^{-t/4} \exp(-2e^{t/2})$ во втором. Возвращаясь к собственным функциям $\psi_\mu(x)$, находим, что

$$\psi_\mu(x) \sim x^{-1-\beta} e^{-x/2} \quad \text{и} \quad \psi_\mu(x) \sim x^{-3/4} e^{-\sqrt{8x}}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (5.2)$$

соответственно в первом и втором случаях.

С другой стороны, используя асимптотики (4.2) и (4.16) для функции (1.8), мы видим, что

$$(A\psi_\mu)(x) \sim x^{-1-\beta} e^{-x/2} \int_0^\infty e^{-y/2} \psi_\mu(y) dy$$

и

$$(A\psi_\mu)(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{-3/4} e^{-\sqrt{8x}} \int_0^\infty \psi_\mu(y) dy$$

при $x \rightarrow \infty$ соответственно в первом и втором случаях. Сравнивая эти соотношения с соотношениями (5.2) и используя уравнение $A\psi_\mu = \lambda_\mu \psi_\mu$, получаем выражения для собственных значений оператора A :

$$\lambda_\mu = \int_0^\infty e^{-y/2} \psi_\mu(y) dy \quad \text{и} \quad \lambda_\mu = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \psi_\mu(y) dy \quad (5.3)$$

соответственно в первом и втором случаях.

Таким образом, мы получили следующие результаты.

Предложение 5.1. *Оператор Ганкеля A с ядром*

$$a(x) = (x+2)^{-1} W_{-\beta, 1/2}(x+2)$$

и дифференциальный оператор (1.7) для $\gamma = 2$ и $\alpha = 1/4$ имеют общие собственные функции. Если $\psi_\mu \in \mathcal{D}(L)$, $L\psi_\mu = \mu\psi_\mu$ и $\psi_\mu(x)$ имеет первую из асимптотик (5.2) при $x \rightarrow \infty$, то $A\psi_\mu = \lambda_\mu \psi_\mu$, где λ_μ определяется первой из формул (5.3).

Предложение 5.2. *Оператор Ганкеля A с ядром*

$$a(x) = (x+2)^{-1/2} K_1(\sqrt{8(x+2)})$$

и дифференциальный оператор (1.7) для $\gamma = 2$, $\alpha = 0$ и $\beta = 2$ имеют общие собственные функции. Если $\psi_\mu \in \mathcal{D}(L)$, $L\psi_\mu = \mu\psi_\mu$ и $\psi_\mu(x)$ имеет вторую из асимптотик (5.2) при $x \rightarrow \infty$, то $A\psi_\mu = \lambda_\mu \psi_\mu$, где λ_μ определяется второй из формул (5.3).

5.2. Наконец, мы рассмотрим ядро (1.5) для исключительных значений $\beta = -l$, где $l = 1, 2, \dots$. Более точно, мы сейчас положим

$$a(x) = (-1)^{l-1} ((l-1)!)^{-1} x^{-1} W_{l, 1/2}(x) = e^{-x/2} L_{l-1}^1(x), \quad l = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

(здесь мы учли формулу (4.6)). Оператор Ганкеля A с таким ядром имеет ранг l . Здесь мы покажем, как этот простой пример укладывается в описанную выше схему.

Спектральный анализ соответствующего оператора (4.7) остается таким же, как в разд. 4.2. Помимо абсолютно непрерывного спектра $[1/4, \infty)$, оператор L имеет собственные значения $\mu_n = 1/4 - (l + 1/2 - n)^2$, где $n = 1, \dots, l$.

Однако вместо абсолютно непрерывного спектра оператор A имеет нулевое собственное значение бесконечной кратности. Действительно, как и в разд. 4.3, теорема 2.1 дает уравнение (4.12), где опять $\lambda(k) = 0$. Заметим, что $a(x)$ и, следовательно, ввиду (4.3) интеграл в левой части формулы (4.12) имеют конечные пределы при $x \rightarrow 0$. Поэтому из (4.3) следует, что обязательно $\lambda(k) = 0$ для всех $k > 0$. Таким образом, ядро оператора A порождается функциями $x^{-1} W_{l, ik}(x)$, $k > 0$.

Собственные функции $\psi_n(x)$, отвечающие ненулевым собственным значениям λ_n оператора A , определяются формулой (4.11), где $p = l + 1/2 - n$, $n < l + 1/2$, а λ_n находятся из уравнения (4.13):

$$\int_0^\infty L_{l-1}^1(x+y)e^{-y}y^{p-1/2}L_{n-1}^{2p}(y)dy = \lambda_n x^{p-1/2}L_{n-1}^{2p}(x). \quad (5.5)$$

Вспомним, что $L_p^\alpha(x)$ — полином степени p с коэффициентом $(-1)^p/p!$ при x^p . Сравнивая коэффициенты при наибольшей степени x^{l-1} в левой и правой частях формулы (5.5) и учитывая формулу (4.14), получаем, что

$$\lambda_n = (-1)^{n-l} \frac{(n-1)!}{(l-1)!} \int_0^\infty e^{-y}y^{p-1/2}L_{n-1}^{2p}(y)dy = (-1)^{n-l}.$$

Таким образом, мы пришли к следующему результату.

Предложение 5.3. *Оператор Ганкеля A с ядром (5.4) имеет ранг l . Его ненулевые собственные значения даются формулой $\lambda_n = (-1)^{n-l}$, где $n = 1, \dots, l$, а соответствующие собственные функции $\psi_n(x)$ определяются равенством (4.11), где $p = l + 1/2 - n$.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.
- [2] Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. т. 1, 2*, Наука, М., 1973, 1974.
- [3] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965.
- [4] T. Carleman, *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Almqvist and Wiksell, 1923.
- [5] W. Magnus, *On the spectrum of Hilbert's matrix*, Amer. J. Math., **72** (1950), 699–704.
- [6] F. G. Mehler, *Über eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektrizitätsvertheilung*, Math. Ann., **18:2** (1881), 161–194.
- [7] F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, 1974.
- [8] В. В. Пеллер, *Операторы Ганкеля и их приложения*, НИЦ РХД, М.–Ижевск, 2005.
- [9] M. Rosenblum, *On the Hilbert matrix*, I, II, Proc. Amer. Math. Soc., **9** (1958), 137–140, 581–585.
- [10] Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. т. 1*, ИЛ, М., 1961.
- [11] J. S. Howland, *Spectral theory of operators of Hankel type*. I, II, Indiana Univ. Math. J., **41:2** (1992), 409–426, 427–434.
- [12] H. Shanker, *An integral equation for Whittaker's confluent hypergeometric function*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **45** (1949), 482–483.
- [13] D. R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory. Analytic Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.