Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Кондаков, Существование базисов в ядерных дополняемых подпространствах пространств степенных рядов бесконечного типа, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 81–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:21:34

В завершение отметим, что условие (4) для оператора (5) сводится к проверке ограниченности некоторых сингулярных интегральных операторов в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Если спектр одномерного возмущения оператора умножения на независимую переменную (5) абсолютно непрерывен и $(\varphi, \psi) = 0$, то для подобия этого оператора самосопряженному оператору достаточно, чтобы сингулярные интегральные операторы с ядрами*

$$\begin{aligned} T_1(k, t) &= \frac{i \overline{\psi(t)}}{t - k - i0} + \frac{1 - i \|\varphi\| \|\psi\|^{-1} (\psi(x)(x - k - i0)^{-1}, \psi(x))}{D(k + i0)} \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - k - i0}, \\ T_2(k, t) &= \frac{i \overline{\varphi(t)}}{t - k - i0} + \frac{1 - i \|\psi\| \|\varphi\|^{-1} (\varphi(x)(x - k - i0)^{-1}, \varphi(x))}{D_*(k + i0)} \frac{\overline{\psi(t)}}{t - k - i0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $D_*(\lambda) \equiv \overline{D(\overline{\lambda})}$, были ограничены в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Авторы выражают благодарность С. Н. Набоко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Набоко С. Н. Функци. анализ и его прил., **18**, вып. 1, 16–27 (1984).
2. Van Casteren J. Pacif. J. Math., **104**, No. 1, 241–255 (1983).
3. Фаддеев М. М. Функци. анализ и его прил., **26**, вып. 4, 80–83 (1992).
4. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1970.
5. Павлов Б. С. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, 123–148 (1975).
6. Набоко С. Н. Труды ММО, **147**, 86–114 (1980).
7. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Наука, М., 1969.
8. Сажнович Л. А. Изв. АН СССР, сер. матем., **33**, № 1, 52–64 (1969).
9. Веселов В. Ф. Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 4, 19–24 (1988).
10. Веселов В. Ф. Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 2, 11–17 (1988).

Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет

Поступило в редакцию
14 августа 1998 г.

УДК 513.881

Существование базисов в ядерных дополняемых подпространствах пространств степенных рядов бесконечного типа*

© 2000. В. П. Кондаков

Проблема существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве ядерного пространства степенных рядов бесконечного типа, поставленная Б. С. Митягиным, решалась в работах [1–3] только при различных добавочных ограничениях на пространства или на их дополняемые подпространства.

Конкретными и широко используемыми в исследованиях пространствами степенных рядов бесконечного типа являются пространство быстро убывающих функций или его реализация в виде пространства s быстро убывающих

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 97-01-00215.

последовательностей, пространства целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах и другие.

Пространством степенных рядов бесконечного типа называют пространство Кёте числовых последовательностей

$$l_p[\exp r b_n] = \left\{ \xi = (\xi_n) : \left(\sum_n |\xi_n|^p \exp r p b_n \right)^{1/p} = |\xi|_r < \infty, r \in \mathbb{N} \right\},$$

$1 \leq p \leq \infty$, топология которого задана системой норм $(|\cdot|_r)$.

Условие ядерности пространства $l_p[\exp r b_n]$ состоит в том, что для некоторого числа $A > 0$

$$\sum_n \exp(-A b_n) < +\infty.$$

При изучении базисов и структурных вопросов для пространств степенных рядов бесконечного типа были найдены линейные топологические инварианты — геометрические свойства D_1 и Ω , присущие всем пространствам степенных рядов бесконечного типа и их дополняемым подпространствам [4–6].

Для случая ядерного пространства степенных рядов бесконечного типа E , изоморфного своему декартову квадрату, известны необходимые и достаточные условия в терминах асимптотик n -поперечников окрестностей нуля (диаметральной размерности), при которых пространство Фреше со свойствами D_1 и Ω изоморфно дополняемому подпространству в E (см. [6]).

Приведем ниже общий результат, из которого вытекает полное решение проблемы существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве пространства $s = l_2[n^r]$ быстро убывающих последовательностей, равно как и полное решение проблемы описания дополняемых подпространств ядерных пространств степенных рядов бесконечного типа. Помимо прочего, в упомянутом результате из [6] снимается требование изоморфизма пространства E своему декартову квадрату.

Напомним определения геометрических свойств D_1 и Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4, 5]. Пространство Фреше $(E, (|\cdot|_r))$ обладает свойством D_1 (в другой терминологии DN), когда выполнено следующее условие: существует непрерывная норма $\|\cdot\|$, такая, что для каждого $r \in \mathbb{N}$ найдутся $s(r) \in \mathbb{N}$ и $c(r) > 0$, при которых

$$|\cdot|_r^2 \leq c(r) \|\cdot\| |\cdot|_{s(r)}.$$

Пусть $\{U_r\}$ — базис замкнутых абсолютно выпуклых окрестностей нуля в пространстве Фреше E , т.е. $U_r = \{e \in E : |e|_r \leq 1\}$, $r \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [6]. Пространство Фреше E обладает свойством Ω , когда для каждого $r \in \mathbb{N}$ найдется такое $s(r) \in \mathbb{N}$, что

$$U_{s(r)} \subset C t^m U_k + \frac{1}{t} U_r, \quad t > 0,$$

для любого $k \in \mathbb{N}$ и некоторых $m, C > 0$.

Основной результат формулируется в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ядерное пространство Фреше E обладает свойствами D_1 и Ω . Тогда оно имеет базис и изоморфно пространству степенных рядов бесконечного типа.

Поскольку любое дополняемое подпространство пространства степенных рядов бесконечного типа обладает свойствами D_1 и Ω , из теоремы 1 и результатов статьи [7] выводится следующий факт.

ТЕОРЕМА 2. *В пространстве степенных рядов бесконечного типа каждое ядерное дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно некоторому координатному подпространству.*

Из теоремы 2 непосредственно следует положительное решение проблемы существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве пространства s быстро убывающих последовательностей.

Из теоремы 1 и результатов статьи [7] легко также вывести, что ядерное пространство Фреше E , обладающее свойствами D_1 и Ω , изоморфно заданному пространству $F = l_2[\exp rb_n]$ тогда и только тогда, когда линейные размерности пространств E и F совпадают или равны их диаметральные размерности (определение см., например, в [4, 6, 7]). Аналогичным образом можно сформулировать и условие существования изоморфизма ядерного пространства Фреше со свойствами D_1 и Ω на дополняемое подпространство заданного пространства степенных рядов бесконечного типа в терминах определяющих эти пространства матриц Кёте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dubinsky E., Vogt D. *Studia Math.*, **93**, No. 1, 71–85 (1989).
2. Aytuna A., Krone J., Terzioglu T. *Math. Ann.*, **283**, 193–202 (1989).
3. Krone J. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **105**, No. 2, 350–355 (1989).
4. Драгилев М. М. *Матем. сб.*, **58**, № 2, 153–173 (1965).
5. Zahariuta V. P. *Studia Math.*, **46**, 201–221 (1973).
6. Vogt D., Wagner M. J. *Studia Math.*, **70**, 63–80.
7. Кондаков В. П. *Studia Math.*, **76**, 137–151 (1983).

Ростовский государственный университет

Поступило в редакцию
18 мая 1998 г.

УДК 512.2

Функторы и диадические множества конечного типа

© 2000. Л. А. НАЗАРОВА, А. В. РОЙТЕР

К 85-летию И. М. Гельфанда

Пусть $\Phi: \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ — аддитивный функтор и $\mathcal{C} \subset \text{Mod } k$, где k — кольцо. Построим категорию Φ^Δ следующим образом: $\text{Ob } \Phi^\Delta = \{(A, B, \varphi) \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \varphi \in \Phi(A, B)\}$, $\Phi^\Delta((A_1, B_1, \varphi_1), (A_2, B_2, \varphi_2)) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathcal{A}(A_1, A_2), \beta \in \mathcal{B}(B_1, B_2), \varphi_1 \Phi(1_{A_1}, \beta) = \Phi(\alpha, 1_{B_2}) \varphi_2\}$ (см. [1]). Если $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ и $\Phi = \text{Hom}_{\mathcal{C}}$, то Φ^Δ есть категория $\mathcal{C}^{\Delta_1}$ морфизмов категории $\mathcal{C}$ (см. [2]). Если $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ — аддитивный функтор (от одной переменной), то построим $\Phi_F: \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Mod } k$, $\Phi_F(C, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, F(B))$, и положим $F^\nabla = (\Phi_F)^\Delta$. В дальнейшем $\mathcal{C}$ — это категория $\text{mod } k$ конечно порожденных k -модулей.

Существование этих категорий очевидна. В частности, к F^∇ сводится описание представлений конечномерных алгебр [3].