Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Я. Таскинен, О спектре третьей краевой задачи в области с пиком, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 1, 93–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:42:21

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970. [2] Ж. Лаллеман, *Полугруппы и комбинаторные приложения*, Мир, М., 1985. [3] Е. А. Горин, Формулы обращения Чебышева–Мёбиуса в контексте абелевых полугрупп, в кн.: IV Международная конференция по теории чисел и прил., Тула (2001), Тезисы докл., Изд-во МГУ, 2001, 48–49. [4] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, т. I, Мир, М., 1972.

Московский педагогический
государственный университет,
кафедра математического анализа
e-mail: evgeny.gorin@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
15 апреля 2010 г.

УДК 517.923+517.956.227

О спектре третьей краевой задачи в области с пиком*

© 2011. С. А. НАЗАРОВ, Я. ТАСКИНЕН

Памяти М. Ш. Бирмана посвящается

Пусть ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Введем пик высоты $d > 0$

$$\Pi_d = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : z \in (0, d), z^{-1-\gamma}y \in \omega\} \quad (1)$$

и область Ω , совпадающую с пиком Π_d внутри цилиндра $\{x : |y| < R, z \in (0, d)\}$, причем $R > 0$, $\overline{\Omega}$ — компакт, $\gamma \geq 0$ — показатель заострения, а граница $\Gamma = \partial\Omega$ заведомо липшицева всюду, кроме вершины пика $\mathcal{O}$. Рассмотрим третью краевую спектральную задачу в вариационной постановке

$$(\nabla u, \nabla v)_{\Omega} + (bu, v)_{\Gamma} = \lambda(u, v)_{\Omega}, \quad v \in H^1(\Omega) \cap L_2(\Gamma), \quad (2)$$

где ∇ — градиент, $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ — скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$, λ — спектральный параметр, а b — вещественная измеримая ограниченная функция на Γ , удовлетворяющая при некотором $b_0 \in \mathbb{R}$ соотношению

$$|b(x) - b_0| \leq c_b |x|^{\alpha} \quad \text{при п. в. } x \in \Gamma, \quad \alpha > 0. \quad (3)$$

Если $\gamma = 0$, то Π_d — конус, Γ — липшицева поверхность и ввиду компактности вложений пространства Соболева $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ билинейная форма $q(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{\Omega} + (bu, v)_{\Gamma}$ в левой части формулы (2) замкнута в $H^1(\Omega)$ и полуограничена, а значит, задаче (2) ставится [1, гл. 10] в соответствие самосопряженный оператор A с дискретным спектром, образующим неограниченную последовательность собственных чисел

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad (4)$$

указанных с учетом кратностей. При $\gamma > 0$ граница Γ перестает быть липшицевой в точке $\mathcal{O}$, а вложения $H^1(\Omega) \subset L_2(\Gamma)$ может не быть (ср. [2], [3] и

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00759) и гранта №127245 Академии Финляндии.

др.). Однако в случае $b_0 > 0$ форма q остается полуограниченной и порождает самосопряженный оператор A со спектром (4). Согласно весовому неравенству

$$\| |x|^{-1}u; L_2(\Omega) \| + \| |x|^{(\gamma-1)/2}u; L_2(\Gamma) \| \leq c \| u; H^1(\Omega) \|$$

(см., например, [4]), вложение $H^1(\Omega) \subset L_2(\Gamma)$ компактно при $\gamma \in (0, 1)$. В [4] проверено, что при $\gamma = 1$ это вложение не является компактным, а при $\gamma > 1$ оно вообще неверно. Точно так же можно убедиться в том, что для $b_0 < 0$ и $\gamma > 1$ форма q перестает быть полуограниченной. Цель данного сообщения — описать спектр задачи (2) в межевом случае $\gamma = 1$, для которого форма q перестает быть полуограниченной при условии, что

$$b_0 \leq -t_n(\omega), \quad t_n(\omega) := (n - 3/2)^2 (\text{mes}_{n-2} \partial\omega)^{-1} \text{mes}_{n-1} \omega. \quad (5)$$

Полуограниченность формы q при $\gamma = 1$ и $b_0 > -t_n(\omega)$ вытекает из оценки [4]

$$\| u; L_2(\Gamma) \|^2 \leq (t_n(\omega) - \varepsilon)^{-1} \| \nabla u; L_2(\Omega) \|^2 + C_\varepsilon \| u; L_2(\Omega) \|^2,$$

где $\varepsilon > 0$ и $C_\varepsilon \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому выше «порога» $-t_n(\omega) < 0$ форма определяет самосопряженный оператор A с чисто дискретным спектром (4).

В ситуации (5) дифференциальным выражением оператора A задачи (2) является оператор Лапласа $-\Delta$ (со знаком минус), а областью определения — линеал

$$\mathcal{D}(A) = \{ u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L_2(\Omega),$$

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (bu, v)_\Gamma = (-\Delta u, v)_\Omega, v \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{O}) \} \subset L_2(\Omega). \quad (6)$$

Отметим, что краевое условие $\partial_\nu u + bu = 0$ «спрятано» в интегральном тождестве из определения (6) и выполнено для гладких функций u из $\mathcal{D}(A)$, так как дифференцирование ∂_ν вдоль внешней нормали определено почти всюду на липшицевой поверхности $\Gamma \setminus \mathcal{O}$. В случае полуограниченной формы q (см. выше) порожденный ею оператор A обладает такой же областью определения (6).

Изучение спектра $\sigma(A)$ основано на утверждениях о разрешимости задачи

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (bu, v)_\Gamma = f(v), \quad v \in V_{-\beta}^1(\Omega), \quad (7)$$

где $\beta \in \mathbb{R}$ — весовой индекс, $V_\beta^1(\Omega)$ — пространство Кондратьева с нормой

$$\| u; V_\beta^1(\Omega) \| = (\| |x|^\beta \nabla u; L_2(\Omega) \|^2 + \| |x|^{\beta-1} u; L_2(\Omega) \|^2)^{1/2},$$

$f \in V_{-\beta}^1(\Omega)^*$ — линейный непрерывный функционал на пространстве $V_{-\beta}^1(\Omega)$, а решение u ищется в классе $V_\beta^1(\Omega)$.

Лемма 1. Пусть $\gamma = 1$ и выполнено условие (5). Оператор $\mathcal{A}_\beta: V_\beta^1(\Omega) \rightarrow V_{-\beta}^1(\Omega)^*$ задачи (7) фредгольмов в том и только в том случае, когда $\beta \neq 0$.

Замечание. Если $b_0 > -t_n(\omega)$, то оператор $\mathcal{A}_0: V_0^1(\Omega) \rightarrow V_0^1(\Omega)^*$ фредгольмов, однако при условии (5) его образ незамкнут. Именно этим и обусловлено обнаруженное в работе различие в строении спектра $\sigma(A)$ выше и ниже порога.

Для более точного описания области определения (6) оператора A понадобится асимптотическое разложение решения $u(x)$ около точки $\mathcal{O}$. Членами разложения служат решения

$$\begin{aligned} U_\pm(z) &= z^{\Lambda_\pm}, \quad \Lambda_\pm = -(n - 3/2)(1 \pm i\sqrt{-b_0 t_n(\omega)^{-1} - 1}), \quad \text{при } b_0 < -t_n(\omega), \\ U_\pm(z) &= 2^{-1/2} z^{-n+3/2} (1 \pm i \ln z) \quad \text{при } b_0 = -t_n(\omega) \end{aligned} \quad (8)$$

обыкновенного дифференциального уравнения эйлеровского типа

$$-\frac{\partial}{\partial z} z^{2(n-1)} \frac{\partial U}{\partial z}(z) - b_0 \frac{\text{mes}_{n-2}(\partial\omega)}{\text{mes}_{n-1}(\omega)} z^{2(n-2)} U(z) = 0, \quad z > 0,$$

полученного в [4] путем формального асимптотического анализа задачи (2).

Лемма 2. Пусть $\gamma = 1$ и выполнено условие (5). Пусть, кроме того, $\beta > \beta^\sharp \geq \beta - \alpha$, $\beta, \beta^\sharp \neq 0$, $f \in V_{-\beta^\sharp}^1(\Omega)^* \subset V_{-\beta}^1(\Omega)^*$, а $u \in V_\beta^1(\Omega)$ — решение задачи (7). Тогда

$$u(x) = \chi(x)(C_+ U_+(z) + C_- U_-(z)) + \tilde{u}(x), \quad (9)$$

где χ — гладкая срезающая функция с носителем в $\overline{\Pi_d}$, равная единице вблизи точки $\mathcal{O}$, $\tilde{u} \in V_{\beta^\sharp}^1(\Omega)$, $C_\pm \in \mathbb{C}$, но $C_\pm = 0$ в случае $0 \notin (\beta^\sharp, \beta)$. Имеет место оценка

$$|C_+| + |C_-| + \|\tilde{u}; V_{\beta^\sharp}^1(\Omega)\| \leq c_{\beta, \beta^\sharp} (\|u; V_\beta^1(\Omega)\| + \|f; V_\beta^1(\Omega)^*\|).$$

Согласно (9), решения задачи (7) в классах $V_\beta^1(\Omega)$ и $V_{-\beta}^1(\Omega)$ при $\beta \in (0, \alpha)$ различаются двумя асимптотическими слагаемыми (8), и из леммы 2, примененной двукратно (с парами показателей $\{\beta, \delta\}$ и $\{\delta, -\beta\}$; здесь $0 < \delta < \min\{\beta, \alpha - \beta\}$), выводится связь $\text{Ind } \mathcal{A}_\beta = \text{Ind } \mathcal{A}_{-\beta} + 2$ индексов операторов $\mathcal{A}_\beta$ и $\mathcal{A}_{-\beta}$, которые являются взаимно сопряженными. В итоге $\text{Ind } \mathcal{A}_\beta = -\text{Ind } \mathcal{A}_{-\beta} = 1$. Леммы 1 и 2 вместе с этой формулой влекут за собой следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $\gamma = 1$ и выполнено условие (5).

1. Функция u из области определения (6) оператора A принадлежит пространству $V_{-1}^1(\Omega)$, более узкому, чем исходное пространство $H^1(\Omega)$.

2. Оператор A замкнут и симметричен, а его сопряженный A^* имеет область определения $\mathcal{D}(A^*) = \{u : u - \chi(C_+ U_+ + C_- U_-) \in V_{-\beta}^1(\Omega), \beta \in (0, \alpha), (\nabla u, \nabla v)_\Omega + (bu, v)_\Gamma = (-\Delta u, v)_\Omega, v \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{O})\} \subset V_1^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

3. Точечный спектр оператора A^* и остаточный спектр оператора A занимают всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Любая точка $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением счетного набора Σ вещественных чисел, — простое собственное число оператора A^* . кратности собственных чисел из Σ конечны.

Теорема 1, в частности, показывает, что симметрический оператор A не является самосопряженным, но в силу теоремы 1 его индексы дефекта равны 1, 1 и, следовательно, A допускает самосопряженные расширения.

Теорема 2. Самосопряженные расширения $A(\varphi)$ оператора A параметризуются переменной $\varphi \in [0, 2\pi)$. Области определения имеют вид

$$\mathcal{D}(A(\varphi)) = \{u \in \mathcal{D}(A^*) : C_+ = e^{i\varphi} C_-\}. \quad (10)$$

Вложение $\mathcal{D}(A(\varphi)) \subset L_2(\Omega)$ компактно, а значит, спектр оператора $A(\varphi)$ дискретный и вещественный. В связи с отсутствием свойства полуограниченности у формы q этот спектр формирует две неограниченные последовательности

$$0 \leq \lambda_1(\varphi) \leq \dots \leq \lambda_k(\varphi) \leq \dots \quad \text{и} \quad 0 > \lambda_{-1}(\varphi) \geq \dots \geq \lambda_{-k}(\varphi) \geq \dots. \quad (11)$$

Итак, при условии (5), т. е. ниже порога, оператор третьей краевой задачи с областью определения (6) несамосопряжен и никакое его самосопряженное расширение $A(\varphi)$ не является полуограниченным (см. (11)). Какого-либо канонического способа выбора области определения (10) расширения не обнаружено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980. [2] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1985. [3] D. Daners, Trans. Amer. Math. Soc., **352**:9 (2000), 4207–4236. [4] С. А. Назаров, Я. Таскинен, Вестник СПбГУ, сер. 1, 2008, № 1, 56–65.

Институт проблем машиноведения РАН
e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk
University of Helsinki
e-mail: jari.taskinen@helsinki.fi

Поступило в редакцию
19 августа 2009 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 24.12.2010. Подписано к печати 24.1.2011. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,8 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 218 экз. Заказ 993.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6