Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. В. Киссин, Д. С. Потапов, Ф. А. Сукочев,
В. С. Шульман, Липшицевы функции, идеалы
Шэттена и неограниченные дифференцирования,
Функц. анализ и его прил., 2011, том 45, вы-
пуск 2, 93–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:21:00

утверждение 3 для осциллирующих интегралов. Для объемов доказательство аналогично, только сослаться надо на работу [9], а не на [7].

Доказательство теоремы 2. Утверждение 1 следует из формулы для типа асимптотики осциллирующего интеграла с полуквазиоднородной фазой, см. [8].

Утверждение 2 следует из того, что фаза F_δ эквивалентна в некоторой окрестности $\mathbb{O}$ полиному $x_1^2 + x_2^8 + x_3^9$, и из работы [8].

Для доказательства утверждения 3 нужно сделать квазиоднородное сжатие $x_1 = y_1 t^{1/4}$, $x_2 = y_2 t^{1/8}$, $x_3 = y_3 t^{1/9}$, t — большой параметр, затем разделить фазу на t . Тогда фазу F можно рассматривать как малое возмущение полинома $y_1^4 + y_2^8 + y_3^9$ в $\mathbb{O}$, поэтому ее число Милнора в $\mathbb{O}$ не больше, чем число Милнора в $\mathbb{O}$ указанного полинома. Этот полином квазиоднороден, и его число Милнора в $\mathbb{O}$ равно 168, см. [2, с. 156]. Но фаза F имеет в $\mathbb{O}$ строгий минимум, поэтому ее число Милнора в $\mathbb{O}$ нечетно, см. [5], и, значит, оно не больше 167.

Утверждение 4 получается из формулы для числа Милнора, см. [2, с. 156] и того, что F_δ эквивалентна $x_1^2 + x_2^8 + x_3^9$ в некоторой окрестности точки $\mathbb{O}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, ФАЗИС, М., 1996.
 [2] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1, Наука, М., 1982. [3] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 2, Наука, М., 1984. [4] А. Н. Варченко, *Функц. анализ и его прил.*, **10:3** (1976), 13–38.
 [5] В. А. Васильев, *Функц. анализ и его прил.*, **11:3** (1977), 1–11. [6] В. Н. Карпушкин, *Труды сем. имени И. Г. Петровского*, **9** (1983), 3–39. [7] В. Н. Карпушкин, *Труды сем. имени И. Г. Петровского*, **10** (1984), 150–169. [8] В. Н. Карпушкин, *Функц. анализ и его прил.*, **26:1** (1992), 59–61. [9] В. Н. Карпушкин, в сб.: *Труды МИАН*, т. 221, Наука, М., 1998, 225–231.

Институт проблем передачи информации РАН
 e-mail: vladkarp@rol.ru

Поступило в редакцию
 7 апреля 2010 г.

УДК 517.983.2+517.984.4

Липшицевы функции, идеалы Шэттена и неограниченные дифференцирования

© 2011. Э. Киссин, Д. С. Потапов, Ф. А. Сукочев, В. С. Шульман

1. Введение. Начиная с работы Далецкого и Крейна [4], большой интерес специалистов по теории операторов и математической физике привлекала задача о характеристизации функций, являющихся операторно липшицевыми, т. е. функций f , удовлетворяющих условию

$$\|f(A) - f(B)\| \leq C\|A - B\| \quad (1)$$

для любых эрмитовых операторов A, B (и некоторой константы $C > 0$). Глубокие результаты в этом направлении были получены М. Ш. Бирманом и М. З. Соляком, Ю. Б. Фарфоровской, В. В. Пеллером, Б. Джонсоном и Дж. Уильямсом и др. (см обзоры [8], [3] и цитируемую там литературу). Значительное число

исследований было посвящено и аналогичной задаче для классов Шэттена $\mathcal{S}^p$. Известно, что для $p = 1$ соответствующий класс функций — это те же операторно липшицевы функции, так что имеет смысл рассматривать отдельно лишь случай $p \in (1, \infty)$. В недавней работе [9] эта задача получила полное решение, а именно, было доказано, что для выполнения (при некотором $C > 0$) неравенства

$$\|f(A) - f(B)\|_p \leq C\|A - B\|_p \quad (2)$$

для любых эрмитовых операторов A, B , таких, что $A - B \in \mathcal{S}^p$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была липшицевой в обычном значении термина. Здесь мы анонсируем ряд обобщений этого результата — на нормальные операторы, на наборы операторов, на общие (в частности, не обязательно ограниченные) дифференцирования операторных алгебр. Устанавливаются также условия $\mathcal{S}^p$ -дифференцируемости отображений $A \rightarrow f(A)$ по Гато и Фреше и условия сохранения такими отображениями областей определения замкнутых дифференцирований.

В дальнейшем символом $\mathcal{B}(H)$ будет обозначаться алгебра всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H . Напомним, что идеал Шэттена–фон Неймана $\mathcal{S}^p$ ($p \in [1, \infty)$) алгебры $\mathcal{B}(H)$ состоит из всех компактных операторов $X \in \mathcal{B}(H)$, сингулярные числа $s_n(X)$ которых суммируемы с p -й степенью:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(X)^p := \|X\|_p^p < \infty.$$

Нам удобно также считать, что $\|X\|_p = \infty$ для $X \notin \mathcal{S}^p$, — это позволяет, например, писать неравенства типа (2), не оговаривая условия $A - B \in \mathcal{S}^p$. В соответствии со сказанным выше здесь рассматривается только случай $1 < p < \infty$.

Мы используем символ $[A, B]$ для обозначения коммутатора $AB - BA$ операторов A и B .

2. $\mathcal{S}^p$ -липшицевость для функций от нескольких переменных.

Теорема 1. Пусть $f(t_1, \dots, t_n)$ — липшицева функция на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Существует $C > 0$, такое, что

$$\|f(A_1, \dots, A_n) - f(B_1, \dots, B_n)\|_p \leq C \max_{1 \leq i \leq n} \|A_i - B_i\|_p \quad (3)$$

для любых коммутативных наборов $(A_1, \dots, A_n)$ и $(B_1, \dots, B_n)$ эрмитовых операторов, совместные спектры которых содержатся в K .

Отметим, что константу C в теореме 1 и последующих результатах этого раздела можно записывать в виде $C = c_n(p)\Lambda(f)$, где $\Lambda(f)$ — константа Липшица отображения f .

Полезная переформулировка этого результата такова:

Следствие 2. Для любой липшицевой функции f на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\|f(A_1, \dots, A_n, X)\|_p \leq C \max_{1 \leq i \leq n} \|A_i, X\|_p, \quad (4)$$

если $A_1, \dots, A_n$ — коммутативное семейство эрмитовых операторов со спектром в K , а X — произвольный оператор.

Разумеется, при $n = 1$ это утверждение переходит в теорему 1 работы [9]. При $n = 2$ оно дает следующий результат:

Следствие 3. Если функция $f(z)$ на компакте $K \subset \mathbb{C}$ липшицева, то существует такое число $C > 0$, что

(i) для любых нормальных операторов A, B со спектром в K справедливо неравенство

$$\|f(A) - f(B)\|_p \leq C\|A - B\|_p; \quad (5)$$

(ii) для любого нормального оператора A со спектром в K и любого оператора X справедливо неравенство

$$\|[f(A), X]\|_p \leq C\|[A, X]\|_p. \quad (6)$$

В частности, $f(A) - f(B) \in \mathcal{S}^p$, если A, B — эрмитовы операторы, $A - B \in \mathcal{S}^p$ и функция f липшицева на отрезке, содержащем спектры операторов A, B .

Аналогичные утверждения можно доказать для аналитических функций от произвольных (не обязательно нормальных) операторов.

Теорема 4. Если функция $f(z)$ голоморфна в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ и липшицева на его замыкании $\bar{\mathbb{D}}$, то существует такое $C > 0$, что неравенство (5) выполнено для любых сжатий A, B , а неравенство (6) — для любого сжатия A и любого оператора X .

3. Дифференцируемость. Здесь мы рассмотрим условия, при которых отображение $A \rightarrow f(A)$ является дифференцируемым по Гато или Фреше в норме идеала $\mathcal{S}^p$.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}$ — конечный или бесконечный открытый интервал. Будем называть функцию f , определенную на Γ , $\mathcal{S}^p$ -дифференцируемой по Гато (Фреше), если каждому эрмитову оператору A , спектр которого содержится в Γ , соответствует ограниченный линейный оператор f'_A на $\mathcal{S}^p$, такой, что

$$\|f(A + tX) - f(A) - tf'_A(X)\|_p = o(|t|) \quad \text{при } t \rightarrow 0 \quad \forall X = X^* \in \mathcal{S}^p$$

(соответственно

$$\|f(A + X) - f(A) - f'_A(X)\|_p = o(\|X\|_p) \quad \text{при } \|X\|_p \rightarrow 0).$$

Теорема 5. (i) Функция $\mathcal{S}^p$ -дифференцируема по Гато на Γ тогда и только тогда, когда она имеет производную во всех точках интервала Γ , причем эта производная ограничена на компактах;

(ii) Функция $\mathcal{S}^p$ -дифференцируема по Фреше на Γ тогда и только тогда, когда она имеет непрерывную производную на Γ .

4. Замкнутые дифференцирования. В работе [2] было показано, что операторно липшицевы функции действуют в областях определения генераторов полугрупп автоморфизмов. В [5]–[7] этот результат был перенесен на существенно более широкие классы дифференцирований. Следующая теорема показывает, что обычные липшицевы функции действуют в областях определения замкнутых дифференцирований, образы которых содержатся в $\mathcal{S}^p$.

Под дифференцированием здесь подразумевается линейное отображение δ некоторой $*$ -алгебры $\mathcal{D}(\delta)$ операторов в гильбертовом пространстве H в алгебру $\mathcal{B}(H)$, удовлетворяющее условию

$$\delta(AB) = A\delta(B) + \delta(A)B \quad \forall A, B \in \mathcal{D}(\delta).$$

Если к тому же $\delta(A^*) = \delta(A)^*$ для всех $A \in \mathcal{D}(\delta)$, то мы называем δ $*$ -дифференцированием.

Мы называем дифференцирование замкнутым, если его график $\{A \oplus \delta(A) : A \in \mathcal{D}(\delta)\}$ замкнут по норме в $\mathcal{B}(H) \oplus \mathcal{B}(H)$.

Теорема 6. Пусть $\delta: \mathcal{D}(\delta) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ — замкнутое $*$ -дифференцирование. Если для некоторого $A = A^* \in \mathcal{D}(\delta)$ оператор $\delta(A)$ принадлежит $\mathcal{S}^p$, то $f(A) \in \mathcal{D}(\delta)$ для любой липшицевой функции f на $\sigma(A)$, удовлетворяющей условию $f(0) = 0$. Далее,

$$\delta(f(A)) \in \mathcal{S}^p \quad \text{и} \quad \|\delta(f(A))\|_p \leq c(p)\Lambda(f)\|\delta(A)\|_p. \quad (7)$$

Если функция f имеет непрерывную производную на некотором открытом интервале, содержащем $\sigma(A)$, то

$$\delta(f(A)) = f_A^\nabla(\delta(A)). \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что теорема 6 обобщает, в частности, неравенство (2). Действительно, взяв произвольный оператор $X \in \mathcal{B}(H)$, определим дифференцирование $\delta: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ формулой $\delta(A) = [X, A]$. Тогда (7) примет вид

$$\|[f(A), X]\|_p \leq c(p)\Lambda(f)\|[A, X]\|_p \quad (9)$$

(для формальной применимости теоремы 6 нужно еще требовать, чтобы $[A, X] \in \mathcal{S}^p$, но если это условие не выполнено, то неравенство очевидно, поскольку правая часть тогда бесконечна). Заменив теперь оператор A диагональной блоч-матрицей $(A_{ij})_{i,j=1}^2$, $A_{11} = A$, $A_{22} = B$, $A_{12} = A_{21} = 0$, а X — матрицей $(X_{ij})_{i,j=1}^2$, $X_{11} = X_{21} = X_{22} = 0$, $X_{12} = \mathbf{1}$, получим (2).

В заключение отметим, что все приведенные выше утверждения справедливы для гораздо более широкого класса симметрично-нормированных идеалов, чем $\{\mathcal{S}^p : 1 < p < \infty\}$. Этот класс включает все сепарабельные идеалы, индексы Бойда которых (см. [1]) принадлежат промежутку $(1, \infty)$ и, в частности, идеалы Лоренца $\Lambda_{p,r}$ с $1 < p < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Arazy, Integral Equations Operator Theory, **1**:4 (1978), 453–495. [2] J. Arazy, T. J. Barton, Y. Friedman, Integral Equations Operator Theory, **13**:4 (1990), 461–487. [3] M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, Integral Equations Operator Theory, **47**:2 (2003), 131–168. [4] Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн, Труды семинара по функц. анализу Воронежского гос. ун-та, **1956**:1 (1956), 81–105. [5] Э. В. Киссин, В. С. Шульман, Функц. анализ и его прил., **30**:4 (1996), 75–77. [6] E. Kissin, V. S. Shulman, Integral Equations Operator Theory, **49**:2 (2004), 165–210. [7] G. K. Pedersen, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **36**:1 (2000), 139–157. [8] V. V. Peller, <http://arxiv.org/abs/0904.1761>. [9] D. Potapov, F. Sukochev, Operator-Lipschitz functions in Schatten–von Neumann classes, Acta Math., в печати; <http://arxiv.org/abs/0904.4095>.

STORM Research Center, London Metropolitan University
e-mail: e.kissin@londonmet.ac.uk

University of New South Wales, Australia
e-mail: d.potapov@unsw.edu.au

University of New South Wales, Australia
e-mail: f.sukochev@unsw.edu.au

Вологодский государственный технический университет
e-mail: shulman.victor@gmail.com

Поступило в редакцию
10 апреля 2010 г.