Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 4, 34–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3022>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:46:42

Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость*

© 2010. А. М. САВЧУК, А. А. ШКАЛИКОВ

Посвящается памяти М. Ш. Бирмана

В работе изучаются две обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля $Ly = -y'' + q(x)y$ на отрезке $[0, \pi]$. С первой из них при $\theta \geq 0$ связано отображение $F: W_2^\theta \rightarrow l_B^\theta$, $F(\sigma) = \{s_k\}_1^\infty$, где $W_2^\theta = W_2^\theta[0, \pi]$ — пространство Соболева, $\sigma = \int q$ — первообразная потенциала q , а l_B^θ — специально построенное конечномерное расширение весового пространства l_2^θ , куда помещаются регуляризованные спектральные данные $\mathbf{s} = \{s_k\}_1^\infty$ для задачи восстановления по двум спектрам. Основной результат состоит в доказательстве равномерных оценок и снизу и сверху нормы разности $\|\sigma - \sigma_1\|_\theta$ через норму разности регуляризованных спектральных данных $\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_1\|_\theta$, где норма берется в l_B^θ . Аналогичный результат получен для второй обратной задачи, которая связана с восстановлением потенциала по спектральной функции оператора L , порожденного краевыми условиями Дирихле. Результат является новым и для классического случая $q \in L_2$, который отвечает значению $\theta = 1$.

В этой работе мы изучим две классические обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad x \in [0, \pi], \quad (0.1)$$

на конечном интервале. Первая задача связана с восстановлением потенциала по двум спектрам этого оператора, порожденного краевыми условиями Дирихле и Дирихле–Неймана соответственно (мы называем ее задачей Борга). Вторая задача связана с восстановлением потенциала по спектральной функции этого оператора, порожденного краевыми условиями Дирихле (далее такой оператор называем оператором Дирихле). Давно известно решение этих задач для вещественных потенциалов $q \in L_2$, в частности получена полная характеристизация спектральных данных для потенциалов q из этого класса. Наша цель — решить эти задачи для потенциалов q из шкалы соболевских пространств W_2^α при всех фиксированных $\alpha \geq -1$ (включая случай $\alpha \in [-1, 0)$, когда потенциал является сингулярной функцией-распределением). Важную роль при этом играют специальные гильбертовы пространства, которые мы конструируем для решения указанных задач. Эти пространства нужны для задания и изучения отображений, которые мы связываем с рассматриваемыми задачами, а также для полного описания (характеризации) спектральных данных, когда первообразная потенциала $\sigma = \int q(t) dt$ пробегает множество вещественных функций пространства $W_2^{\alpha+1}$.

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант №10-01-00423.

После решения обратных задач возникает важная задача об априорных оценках: насколько мало изменяется первообразная потенциала q в норме пространства $W_2^{\alpha+1}$ при малом изменении спектральных данных в норме соответствующего гильбертова пространства, куда эти данные помещены. Априорные оценки ранее были известны в классическом случае (при $\alpha = 0$). Но это были оценки локального типа, в которых постоянные вместе с радиусом окрестности, где оценки действуют, зависели от потенциала q . *Основная цель этой работы — получить равномерные двусторонние априорные оценки не только для классического случая $\alpha = 0$, но и при всех $\alpha > -1$. Случай $\alpha = -1$ особый. Развиваемый нами метод при $\alpha = -1$ не работает. Одновременно мы выясним, для каких спектральных данных константы в априорных оценках могут «портиться» (т. е. становиться большими или малыми). Мы покажем, что константы в априорных оценках «ухудшаются» только по двум причинам: 1) из-за увеличения нормы регуляризованных спектральных данных, т. е. больших отклонений спектральных данных от нулевых значений (которые соответствуют нулевому потенциалу q); 2) из-за уменьшения зазора (расстояния) между парами соседних собственных значений или приближения к нулю одного из нормировочных чисел (уменьшения числа h , которое фигурирует в определении множеств регуляризованных спектральных данных $\Omega_B^\theta(h, r)$ и $\Omega_D^\theta(h, r)$, определяемых в §§2 и 3 работы). Отметим еще раз, что эти оценки являются новыми и для классического случая потенциалов $q \in L_2$, но метод доказательства оценок существенно использует предварительные результаты, полученные при изучении обратных задач для потенциалов q во всей шкале соболевских пространств W_2^α .*

История изучения обратных задач для оператора Штурма–Лиувилля ведет начало от работы Амбарцумяна [3]. Но результат этой работы оказался не характерным для теории. Пионерскую роль сыграла фундаментальная работа Борга [4], основной результат которой — теорема единственности для восстановления потенциала по двум спектрам. Другую интерпретацию результатов Борга предложил Левинсон [27]. Тихонов [49] показал, что потенциал восстанавливается единственным образом по функции Вейля–Титчмарша. Марченко ([32], [33]) первым применил в исследовании обратных задач оператор преобразования и доказал единственность решения обратной задачи по спектральной функции для операторов Штурма–Лиувилля как на конечном интервале, так и на всей оси. Гельфанд и Левитан [13] нашли необходимые и достаточные условия для восстановления потенциала по спектральной функции и написали явные уравнения для решения задачи о восстановлении. Левитан [28], а также Гасымов и Левитан [12] получили аналогичные результаты для задачи Борга о восстановлении потенциала по двум спектрам. Полное решение задачи Борга для потенциалов из L_2 получил Марченко [34]. Другие формулы для решения обратных задач предложил Крейн [25], [26]. В серии работ Трубовица с соавторами был предложен метод для решения некоторых обратных задач на конечном интервале, использующий язык теории аналитических отображений. Детальное изложение имеется в книге Пошеля и Трубовица [40]. Из последних работ, развивающих этот метод, отметим работу Коротяева и Челкака [24]. Для решения нелинейных уравнений важную роль сыграла обратная задача по данным рассеяния, изучение которой было проведено Фаддеевым [9], [10], Дейфтом и Трубовицем [6], Марченко [34] (см. [34] для более полной информации). Большое число работ посвящено изучению прямых и обратных задач для операторов

Штурма–Лиувилля в импедансной форме. Отметим, что имеется связь между такими операторами и обычными операторами Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами. Работа Альбеверио, Гринива и Микитюка [1] — одна из последних на эту тему; в ней имеются многочисленные ссылки.

В работе [43] авторы предложили метод регуляризации для определения оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями $q \in W_2^{-1}$. Гринив и Микитюк ([18], [21]) доказали существование оператора преобразования для уравнений с такими потенциалами и дали решения классических обратных задач для потенциалов $q \in W_2^{-1}$ (см., в частности, [19], [20], [22]). Марченко и Островский ([36], [34]) дали описание спектральных данных задачи Борга для потенциалов q из пространств Соболева W_2^α при целых показателях гладкости $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. Аналогичные результаты для обратных задач по спектральным функциям получили Фрайлинг и Юрко [11]. Авторы [45] ввели шкалу пространств $l_B^{\alpha+1}$ для изучения спектральных данных задачи Борга и в терминах этих пространств провели исследование этой задачи при всех показателях гладкости $\alpha \geq -1$. В других терминах и другим методом задачу Борга, а также обратную задачу по спектральной функции исследовали для показателей гладкости $\alpha \in [-1, 0]$ Гринив и Микитюк [23].

Различные априорные оценки локального характера для обратных задач получали многие авторы. Не вникая в детали, отметим, что в этом направлении результаты получили Марченко и Маслов [35], Рябушко ([41], [42]), Хохштадт [17], Хальд [15], Юрко [50] (см. также [11]), Мизутани [39], Алексеев [2], Мак-Лафлин [30], Хитрик [16], Марлетта и Вайкард [38], Маламуд [31].

Говоря об обратных задачах на конечном интервале, необходимо упомянуть задачу о восстановлении потенциала по двум спектрам периодической и антипериодической задач. Естественно, она связана с изучением оператора Хилла на всей прямой. С этой задачей связано много интересных работ, и изучена она наиболее полно. Выделим важные результаты Марченко и Островского [36] и [37]. Обратная задача для периодического случая является единственной, для которой получены равномерные априорные оценки разности потенциалов через разность спектральных данных (см. [37]). Из последних публикаций о периодической задаче отметим работу Джакова и Митягина [7], где наряду с новыми важными результатами имеется подробная информация и библиография для случая классических потенциалов, а также их работу [8], где рассматриваются сингулярные потенциалы. Для более подробных сведений по рассматриваемым здесь и другим обратным задачам мы отсылаем читателя к монографиям Марченко [34], Левитана [29], Фрайлинга и Юрко [11], а также к обзорной работе Гештези [14].

Настоящая работа является продолжением серии работ авторов [45]–[47], посвященных решению обратных задач с потенциалами из пространств Соболева. В этих работах уже были сконструированы пространства, в которые следует помещать регуляризованные спектральные данные рассматриваемых двух обратных задач, и изучены свойства отображений, ставящих в соответствие первообразной потенциала $\sigma = \int q(t) dt$ регуляризованные спектральные данные. Ключевой является формулируемая ниже в нужной форме теорема 1.3 о слабой нелинейности построенных отображений (эта теорема для разных задач доказана в работах [46], [47]). Как уже говорилось, решение задачи Борга для

потенциалов $q \in W_2^\alpha$ во всей шкале $\alpha \geq -1$ было дано авторами [45]. Инъективность доказывалась модификацией метода Борга, а для описания образа и процедуры восстановления развивались идеи работ Трубовица и соавторов. В этой работе мы дополним исследования из [45] по задаче Борга, в частности докажем локальную устойчивость для всех индексов гладкости $\alpha \geq -1$. Мы покажем также, что решение в пространствах Соболева обратной задачи по спектральной функции оператора Дирихле для всех индексов $\alpha \geq -1$ может быть проведено по такой же схеме, как решение задачи Борга. Однако при реализации этой схемы доказательства некоторых похожих утверждений требуют новых подходов. *Но главная цель — равномерные априорные оценки, которые мы получаем при $\alpha > -1$.* Для их доказательства развивается новый метод, основанный на теоремах о слабой нелинейности построенных отображений.

Первый параграф работы носит вспомогательный характер. Мы напомним основные определения и конструкции пространств и формулируем в нужном виде необходимые для дальнейшего результаты работ [45]–[47]. Основным является §2. Здесь приводятся дополнения к результатам из [45] по задаче Борга, доказываются локальные и равномерные априорные оценки для этой задачи. В §3 все результаты для задачи Борга переносятся на обратную задачу по спектральной функции оператора Дирихле.

§1. Определения пространств и нелинейных отображений, связанных с обратными задачами.

Теоремы о свойствах таких отображений

Сначала напомним, что определение оператора Штурма–Лиувилля с классическим потенциалом $q \in L_1[0, \pi]$ можно распространить на случай потенциалов-распределений из соболевского пространства $W_2^{-1}[0, \pi]$. Предположим, что комплекснозначный потенциал q принадлежит соболевскому пространству $W_2^\alpha[0, \pi]$ при некотором $\alpha \geq -1$. Положим $\sigma(x) = \int q(x) dx$, где первообразная понимается в смысле теории распределений. Согласно [43] (см. также [44], где даны альтернативные определения), определим оператор Дирихле равенством

$$L_D y = Ly = -(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y, \quad y^{[1]}(x) := y'(x) - \sigma(x)y(x), \quad (1.1)$$

взяв в качестве области определения

$$\mathcal{D}(L_D) = \{y, y^{[1]} \in W_1^1[0, \pi] \mid Ly \in L_2[0, \pi], y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

Оператор Дирихле–Неймана определим аналогично: $L_{DN}y = Ly$ на области

$$\mathcal{D}(L_{DN}) = \{y, y^{[1]} \in W_1^1[0, \pi] \mid Ly \in L_2[0, \pi], y(0) = y^{[1]}(\pi) = 0\}.$$

Для гладких функций σ правые части в (0.1) и (1.1) совпадают, и мы получаем в первом случае классический оператор Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле, а во втором случае оператор с краевым условием $y(0) = 0$ и смешанным краевым условием $y'(\pi) - hy(\pi) = 0$, где $h = \sigma(\pi)$. В первом случае оператор не зависит от выбора константы в определении первообразной σ потенциала q , а во втором случае зависит. Если константу выбрать так, чтобы $\sigma(\pi) = 0$, то мы получим классический оператор Дирихле–Неймана.

Теперь определим спектральные данные для рассматриваемых в работе задач. Обозначим через $s(x, \lambda)$ единственное решение уравнения $Ly - \lambda y = 0$,

удовлетворяющее условиям $s(0, \lambda) = 0$ и $s^{[1]}(0, \lambda) = \sqrt{\lambda}$ (известно [43], что такое решение существует и единственно). Очевидно, что нули $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\mu_k\}_1^\infty$ целых функций $s(\pi, \lambda)/\sqrt{\lambda}$ и $s^{[1]}(\pi, \lambda)/\sqrt{\lambda}$ являются собственными значениями операторов L_D и L_{DN} соответственно. В случае вещественного потенциала q все нули этих функций являются простыми и вещественными, и мы считаем их занумерованными так, чтобы обе последовательности были строго возрастающими. Для комплексных q нумерацию можно провести так, чтобы последовательности $\{|\lambda_k|\}_1^\infty$ и $\{|\mu_k|\}_1^\infty$ не убывали.

В задаче Борга потенциал восстанавливается по двум спектрам $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ операторов L_D и L_{DN} . Задание этих двух спектров эквивалентно заданию чисел

$$s_{2k-1} = \sqrt{\mu_k} - (k - 1/2), \quad s_{2k} = \sqrt{\lambda_k} - k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

т. е. последовательности $\{s_k\}_1^\infty = \{s_k(B)\}_1^\infty$. Будем говорить, что такая последовательность определяет *регуляризованные спектральные данные* задачи Борга. Здесь и далее мы подразумеваем, что в приведенных формулах ветвь квадратного корня выбрана так, что значения аргумента $\sqrt{\lambda}$ лежат в сегменте $(-\pi/2, \pi/2]$.

Известно [28, гл. 3], что спектральная функция оператора Дирихле однозначно восстанавливается по его собственным значениям и так называемым *нормировочным константам*, которые определяются равенствами

$$\alpha_k = \int_0^\pi s^2(x, \lambda_k) dx.$$

Такое определение нормировочных чисел мы сохраним и для комплексных потенциалов. Последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty \cup \{\alpha_k\}_1^\infty$ формируют спектральные данные оператора L_D . Задание этих данных эквивалентно заданию чисел

$$s_{2k} = \sqrt{\lambda_k} - k, \quad s_{2k-1} = \alpha_k - \pi/2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Будем говорить, что последовательность $\{s_k\}_1^\infty = \{s_k(D)\}_1^\infty$ определяет *регуляризованные спектральные данные оператора L_D* .

Имеем две задачи: восстановить первообразную потенциала q по регуляризованным спектральным данным либо оператора L_D , либо задачи Борга. Ясно, что в сингулярном случае восстановление функции q невозможно и работать надо с ее первообразной $\sigma = \int q(x) dx$. При $q \in W_2^\alpha$, $\alpha \geq -1$, имеем $\sigma \in W_2^\theta$, где $\theta = \alpha + 1 \geq 0$. Случай классического потенциала $q \in L_2$ соответствует показателю $\theta = 1$. Нужно еще отметить, что переход к восстановлению первообразной меняет постановку задачи. Например, при восстановлении дифференцируемой функции σ по спектральным данным задачи Борга восстанавливается не только потенциал $q = \sigma'$, но и постоянная $h = \sigma(\pi)$ в смешанном краевом условии. Но по спектральным данным оператора L_D функция σ восстанавливается только с точностью до постоянной.

Чтобы далее использовать язык теории отображений, нужно понять, каким пространствам принадлежат определенные выше регуляризованные спектральные данные, когда первообразная σ пробегает соболевское пространство W_2^θ , $\theta \geq 0$. Оказывается, что для обеих задач эти пространства можно выбрать как конечномерные расширения обычных весовых l_2 -пространств. Как расширять, становится ясным после анализа асимптотических формул для собственных значений λ_n , μ_n и нормировочных констант α_n . Подробно это объяснено в

[46], [47]. Понять это можно также из формулируемой ниже теоремы 1.2 после интегрирования по частям формул, которыми определены операторы T_B и T_D .

Построим пространство для регуляризованных спектральных данных задачи Борга. Обозначим через l_2^θ весовое l_2 -пространство, состоящее из последовательностей $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$ комплексных чисел, таких, что

$$\|\mathbf{x}\|_\theta^2 := \sum_1^\infty |x_k|^2 k^{2\theta} < \infty.$$

Рассмотрим специальные последовательности

$$\mathbf{e}_{2s-1} = \{k^{-(2s-1)}\}_{k=1}^\infty, \quad \mathbf{e}_{2s} = \{(-1)^k k^{-(2s-1)}\}_{k=1}^\infty, \quad s = 1, 2, \dots$$

Пусть $m = [\theta/2 + 3/4]$, где $[a]$ — целая часть числа a . Положим

$$l_B^\theta = l_2^\theta \oplus \text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{2m}.$$

Здесь мы учли, что при $k \leq 2m$ последовательности $\mathbf{e}_k$ не принадлежат пространству l_2^θ , а при $k > 2m$ принадлежат. Таким образом, l_B^θ состоит из элементов $\mathbf{x} + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{e}_k$, где $\mathbf{x} \in l_2^\theta$, а $\{c_k\}_1^m$ — произвольные комплексные числа. Скалярное произведение элементов из l_B^θ определяется формулой

$$\left(\mathbf{x} + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{e}_k, \mathbf{y} + \sum_{k=1}^m d_k \mathbf{e}_k \right) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_\theta + \sum_{k=1}^m c_k \bar{d}_k.$$

Построенное пространство свяжем с регуляризованными спектральными данными для оператора L_B . Хотя это пространство определено как конечномерное расширение весового пространства l_2^θ , его элементы удобнее записывать в форме обычных последовательностей. Например, при $3/2 \leq \theta < 5/2$ пространство l_B^θ состоит из последовательностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_1^\infty$ с координатами

$$x_k = y_k + \alpha_1 k^{-1} + \alpha_2 (-1)^k k^{-1}, \quad \text{где } \{y_k\}_1^\infty \in l_2^\theta, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Из такого представления легко следует, что пространство l_D^η компактно вложено в пространство l_D^θ при $\eta > \theta$ (здесь мы принимаем во внимание компактность вложения $l_2^\eta \hookrightarrow l_2^\theta$ при $\eta > \theta$).

Для построения пространства l_D^θ регуляризованных спектральных данных для оператора Дирихле нужно вместо последовательностей $\mathbf{e}_k$ использовать последовательности $\hat{\mathbf{e}}_{2s-1} = \{0, 2^{-(2s-1)}, 0, 4^{-(2s-1)}, 0, 6^{-(2s-1)}, \dots\}$, $\hat{\mathbf{e}}_{2s} = \{2^{-(2s)}, 0, 4^{-(2s)}, 0, 6^{-(2s)}, \dots\}$. Пространство l_D^θ определим равенством $l_D^\theta = l_2^\theta \oplus \text{span}\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^m$, где число m однозначно определено условием $m - 1/2 \leq \theta < m + 1/2$. Отметим, что в работе [47] конструкция пространства для регуляризованных спектральных данных оператора L_D^θ проводилась в пространстве двусторонних последовательностей. Здесь мы реализовали эквивалентную конструкцию в пространстве односторонних последовательностей, чтобы оба пространства выглядели единообразно.

Определим следующие нелинейные операторы:

$$F_B(\sigma) = \{s_k(B)\}_1^\infty, \quad F_D(\sigma) = \{s_k(D)\}_1^\infty. \quad (1.3)$$

Из результатов работ [44] и [18] следует, что последовательности, образованные регуляризованными спектральными данными в правых частях равенств (1.3), являются последовательностями из l_2 для любой первообразной $\sigma = \int q(x) dx \in$

$L_2(0, \pi)$. Поэтому все выписанные в (1.3) операторы корректно определены как операторы из L_2 в l_2 . Более того, согласно результатам из [45] и [47], образы сужений этих операторов на соболевские пространства W_2^θ , $\theta > 0$, лежат в пространствах l_B^θ и l_D^θ соответственно. Именно для этой цели мы проводили расширения пространств l_2^θ . Без присоединения к l_2^θ специальных последовательностей соответствующий результат неверен.

Далее будут использоваться результаты работ [45]–[47], которые приведем в нужном нам виде.

Теорема 1.1. *При любом фиксированном $\theta \geq 0$ нелинейные операторы F_B и F_D корректно определены как операторы из пространства W_2^θ в l_B^θ и l_D^θ соответственно. Эти операторы дифференцируемы по Фреше в каждой точке (функции) σ при условии, что эта функция вещественнозначна и все собственные значения $\lambda_k(\sigma)$, $\mu_k(\sigma)$ не обращаются в нуль (для отображения F_D достаточно, чтобы не обращались в нуль только $\lambda_k(\sigma)$). В частности, эти операторы дифференцируемы по Фреше в точке $\sigma = 0$, причем производные по Фреше в этой точке суть линейные операторы T_B и T_D , которые определяются формулами*

$$\begin{aligned} (T_B \sigma)_k &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \begin{cases} (T_D \sigma)_{2k-1} = -\int_0^\pi (\pi - t) \sigma(t) \cos(2kt) dt, & k = 1, 2, \dots, \\ (T_D \sigma)_{2k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma(t) \sin(2kt) dt, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство этого утверждения для оператора F_B получается из предложения 1 и теоремы 6.1 работы [46], а для второго оператора — из предложения 1 и теоремы 4.2 работы [47]. $\square$

Теорема 1.2. *Пространства l_B^θ и l_D^θ образуют шкалу компактно вложенных друг в друга пространств, замкнутых относительно интерполяции, т. е. $[l^0, l^\theta]_\tau = l^{\theta\tau}$ при всех $\theta \geq 0$, $\tau \in [0, 1]$ (здесь для краткости опущены нижние индексы B или D). При любом $\theta \geq 0$ оператор T_B изоморфно отображает пространство W_2^θ на l_B^θ . Оператор T_D изоморфно отображает пространство $W_2^\theta \ominus \{1\}$ на l_D^θ .*

Доказательство. Первое утверждение этой теоремы для пространства l_B^θ доказано в предложении 4 работы [46]. Доказательство для пространства l_D^θ проходит без изменений. Второе утверждение для оператора T_B доказано в лемме 1 работы [46], а для оператора T_D — в предложении 3 работы [47]. $\square$

Следующая теорема является наиболее существенным звеном в доказательстве основных результатов этой работы. В частности, она говорит, что рассматриваемые отображения F_B и F_D являются слабо нелинейными, т. е. компактными возмущениями линейных отображений. Важна также точная зависимость от θ показателя $\tau = \tau(\theta)$, который характеризует «качество» компактности.

Теорема 1.3. *При любом фиксированном $\theta \geq 0$ оператор F_B отображает пространство W_2^θ в l_B^θ и допускает представление вида*

$$F_B(\sigma) = T_B \sigma + \Phi_B(\sigma).$$

Здесь T_B — линейный оператор, определенный в теореме 1.1, а Φ_B отображает пространство W_2^θ в l_B^τ , где

$$\tau = \begin{cases} 2\theta, & \text{если } 0 \leq \theta \leq 1, \\ \theta + 1, & \text{если } 1 \leq \theta < \infty. \end{cases}$$

Кроме того, отображение $\Phi_B: W_2^\theta \rightarrow l_B^\tau$ является ограниченным в любом шаре, т.е. $\|\Phi(\sigma)_B\|_\tau \leq C(R)$, если $\|\sigma\|_\theta \leq R$, где постоянная C зависит только от радиуса шара R . Аналогичное утверждение справедливо для оператора F_D . А именно, $F_D(\sigma) = T_D\sigma + \Phi_D(\sigma)$ и отображение $\Phi_D: W_2^\theta \ominus \{1\} \rightarrow l_D^\tau$ обладает тем же свойством, что и Φ_B .

Доказательство этой теоремы для оператора F_B проведено в работе [46], а для второго оператора — в работе [47]. В случае $\theta > 0$ компактность нелинейных слагаемых в представлениях операторов F_B и F_D вытекает из компактности вложений $l^\eta \hookrightarrow l^\theta$ при условии $\eta > \theta$ (здесь мы опускаем для краткости индекс B или D). Случай $\theta = 0$ особый. При $\theta = 0$ из сформулированной теоремы не вытекает компактность нелинейных слагаемых. $\square$

§2. Задача Борга. Характеризация спектральных данных для первообразных σ вещественных потенциалов $q \in W_2^\alpha$. Равномерные априорные оценки

В этом параграфе и в §3 мы используем следующие обозначения. Через $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$ обозначаем множество вещественных функций в пространстве W_2^θ , через $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$ — замкнутый шар радиуса R в $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, через Γ_B^θ — множество всех функций в $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, для которых $\mu_1(\sigma) \geq 1/4$, и через $\mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)$ — пересечение множества Γ_B^θ и шара $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$. Здесь $\mu_1(\sigma)$ — первое собственное значение оператора L_{DN} . Число $1/4$ взято для определенности и простоты, вместо $1/4$ может фигурировать любое число $\eta > 0$, но тогда в (2.2) и (2.3) нужно писать $s_1 \geq \sqrt{\eta} - 1/2$.

Известно, что для вещественных потенциалов спектры $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ операторов L_D и L_{DN} удовлетворяют условию перемежаемости

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots < \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1} < \dots \quad (2.1)$$

Для классических потенциалов этот факт известен давно (см., например, [33]), а для сингулярных потенциалов-распределений он доказан в [20] и в [45]. Заметим, что для положительных λ_k и μ_k неравенства (2.1) эквивалентны неравенствам для корней из этих чисел. Поэтому условия (2.1) вместе с условием $\mu_1 \geq 1/4$ (т.е. условием $\sigma \in \Gamma_B^0$) эквивалентны неравенствам

$$s_1 \geq 0, \quad s_k - s_{k+1} < 1/2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

где $\{s_k\} = \{s_k(B)\}$ — регуляризованные спектральные данные для задачи Борга. Последовательность $\{s_k\}_1^\infty$ принадлежит l_2 , поэтому для любой фиксированной вещественной функции $\sigma \in L_2$ найдется число $h = h(\sigma) > 0$, такое, что

$$s_1 \geq 0, \quad s_k - s_{k+1} \leq 1/2 - h, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Фиксируем произвольные числа $r > 0$ и $h \in (0, 1/2)$. Обозначим через $\Omega_B^\theta(r, h)$ совокупность вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty$, для которых выполняются неравенства (2.3) и которые лежат в замкнутом шаре радиуса r

пространства l_B^θ , т. е. $\| \{s_k\} \|_\theta \leq r$. Через Ω_B^θ обозначим множество всех вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$, для которых справедливы неравенства (2.2).

Напомним, что с задачей Борга мы связали оператор $F_B: W_2^\theta \rightarrow l_B^\theta$, $F_B(\sigma) = \{s_k\}_1^\infty$, где $\{s_k\}_1^\infty$ — регуляризованные спектральные данные задачи Борга. Из сказанного выше и теоремы 1.3 следует, что F_B отображает Γ_B^θ в Ω_B^θ .

Далее в этом параграфе там, где это удобно, мы будем опускать индекс B , так как будем работать только с задачей Борга. В частности, операторы F_B , T_B и Φ_B из теоремы 1.3 обозначаем через F , T и Φ соответственно. Всюду вместо Γ_B^θ , Ω_B^θ и $\Omega_B^\theta(r, h)$ пишем Γ^θ , Ω^θ и $\Omega^\theta(r, h)$. Однако обозначение l_B^θ для пространств регуляризованных спектральных данных сохраняем прежним.

Теорема 2.1. *При любом фиксированном $\theta \geq 0$ отображение $F: \Gamma^\theta \rightarrow \Omega^\theta$ есть биекция.*

Доказательство. Инъективность отображения $F: \Gamma^\theta \rightarrow \Omega^\theta$ доказана в лемме 6 работы [45]. В лемме 5 этой же работы проведено доказательство и сюръективности этого отображения, но оно нуждается в дополнении в случае $\theta \geq 1/2$. При $\theta < 1/2$ пространство l_B^θ совпадает с l_2^θ , а при $\theta \geq 1/2$ содержит еще состоящее из специальных последовательностей подпространство $\mathcal{L}^{2m}$ размерности $2m$, где $m = [\theta/2 + 3/4]$. Познакомившись с доказательством леммы 5 из [45], приходим к выводу, что для полного его завершения нужно уметь восстанавливать функцию σ (или доказывать ее существование), если варьируются только координаты подпространства $\mathcal{L}^{2m}$, а все координаты в l_2^θ остаются неизменными. Авторы не видят простого прямого решения этой задачи, без использования трудоемких теорем. Здесь мы приведем доказательство сюръективности с использованием теоремы 1.3, основываясь на том, что при $\theta \in [0, 1/2)$ это свойство уже доказано.

Нам известно, что отображение $F: \Gamma^\theta \rightarrow \Omega^\theta$ сюръективно при $\theta \leq 1/4$. Покажем, что оно сюръективно при любом $\theta \in (1/4, 1/2]$. Возьмем произвольный элемент $\mathbf{y} \in \Omega^\theta \subset l_B^\theta$, $\theta \in (1/4, 1/2]$. Поскольку при $\theta = 1/4$ рассматриваемое отображение есть биекция, найдется единственная функция $\sigma \in \Gamma^{1/4}$, такая, что $F\sigma = \mathbf{y}$ (здесь мы учитываем вложение $l_B^\theta \hookrightarrow l_B^{1/4}$). В силу теоремы 1.3 имеем $T\sigma = -\Phi\sigma + \mathbf{y} \in l_B^\theta$, так как $\mathbf{y} \in l_B^\theta$, а из условия $\sigma \in W_2^{1/4}$ следует, что $\Phi\sigma \in l_B^{1/2} \hookrightarrow l_B^\theta$. Но в силу теоремы 1.2 линейный оператор $T: W_2^\theta \rightarrow l_B^\theta$ есть изоморфизм. Следовательно, $\sigma \in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, а потому с учетом включения $\mathbf{y} \in \Omega^\theta$ имеем $\sigma \in \Gamma^\theta$. Тем самым мы доказали, что отображение F сюръективно при $\theta \in (1/4, 1/2]$. Теперь, зная, что $F: \Gamma^\theta \rightarrow \Omega^\theta$ сюръективно при $\theta \in [0, 1/2]$, с помощью такого же приема докажем сюръективность при $\theta \in (1/2, 1]$. Повторив этот же прием, с помощью теоремы 1.3 покажем сюръективность при $\theta \in (1, 2]$. На $k + 1$ -м шаге получим сюръективность при $\theta \in (k - 1, k]$. Здесь число k произвольно, поэтому утверждение справедливо при всех $\theta \geq 0$. $\square$

Обозначим через $\hat{\Omega}_B^\theta$ множество последовательностей $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$, для которых числа $\mu_k = (s_{2k-1} + k - 1/2)^2$, $\lambda_k = (s_{2k-1} + k - 1/2)^2$ вещественны и подчинены условиям (2.1).

Заметим, что если к функции σ , которой определяются операторы L_D и L_{DN} , добавить функцию $c(x - \pi)$, то эти операторы перейдут в $L_D + c$ и $L_{DN} + c$

соответственно, т. е. их спектры сдвинутся на c . Положим

$$s_{2k-1}(c) = \sqrt{\mu_k + c} - (k - 1/2), \quad s_{2k}(c) = \sqrt{\lambda_k + c} - k. \quad (2.4)$$

Поскольку $c(x - \pi) \in W_2^\theta$ при всех $\theta \geq 0$, то $\{s_k(c)\}_1^\infty \in l_B^\theta$, если и только если $\{s_k(0)\}_1^\infty \in l_B^\theta$. Следовательно, $\{s_k\}_1^\infty \in \widehat{\Omega}^\theta$, если и только если найдется $c \geq 0$, такое, что $\{s_k(c)\}_1^\infty \in \Omega^\theta$. Из сделанных замечаний следует

Теорема 2.2. *Отображение $F: W_{2,\mathbb{R}}^\theta \rightarrow \widehat{\Omega}^\theta$ есть биекция. Последовательности чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ являются спектрами операторов L_D и L_{DN} , если и только если они удовлетворяют условиям перемежаемости (2.1) и $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$.*

Отметим, что при натуральных $\theta = 1, 2, \dots$ Марченко и Островский ([36], [34]) привели характеризацию спектральных данных для задачи Борга в другой форме, без использования пространств l_B^θ . Можно показать, что для таких значений θ их результат с учетом теоремы единственности Борга эквивалентен сформулированной теореме.

Далее существенно будут использоваться аналитические свойства отображения F . Мы предполагаем, что читатель знаком с определением производных по Фреше и Гато для отображения $F: U \rightarrow H$, где U — открытое множество в E , а E и H — сепарабельные гильбертовы пространства. Для комплексных гильбертовых пространств производная по Фреше естественно определяется в комплексном смысле. Отображение $F: U \rightarrow H$ называется аналитическим, если существует комплексная производная по Фреше в каждой точке $x \in U$. Производную по Фреше в точке x далее обозначаем через $F'(x)$. Естественным образом определяется понятие вещественного аналитического отображения, см., например, [40]. Отображение $F: U \rightarrow H$ называется слабо аналитическим, если в комплексном смысле дифференцируемы по Гато координатные функции $(F(x), e_k)$, где $\{e_k\}_1^\infty$ — ортонормированный базис пространства H . Известен результат [40], который значительно упрощает проверку аналитичности отображения.

Предложение 2.3. *Если $F: U \rightarrow H$ — слабо аналитическое отображение, которое локально ограничено в каждой точке $x \in U$, то F — аналитическое отображение.*

Далее мы будем работать с отображениями замкнутых множеств. Чтобы не делать дополнительных объяснений, всюду считаем, что отображение $F: D \rightarrow H$ аналитично на D , если найдется открытое множество U , такое, что $U \supset D$ и $F: U \rightarrow H$ аналитично.

Теорема 2.4. *Пусть $\theta \geq 0$ и $\sigma \in \Gamma^\theta$. Тогда найдется комплексная окрестность $U \in W_2^\theta$ точки σ , такая, что отображение $F: U \rightarrow l_B^\theta$ дифференцируемо в комплексном смысле во всех точках этой окрестности. Таким образом, отображение $F: \Gamma^\theta \rightarrow l_B^\theta$ является вещественно-аналитическим. Этим же свойством обладает отображение $\Phi = F - T: \Gamma^\theta \rightarrow l_B^\tau$, где $T = T_B$ и τ определены в теореме 1.3. Производная в точке $\sigma \in \Gamma$ определяется равенством*

$$[F'(\sigma)]f = \left\{ - \frac{(y'_k(x)y_k(x), \overline{f(x)})}{\rho_k(y_k^2(x), 1)} \right\}_{k=1}^\infty. \quad (2.5)$$

Здесь $\rho_{2n-1} = \sqrt{\mu_n}$, $\rho_{2n} = \sqrt{\lambda_n}$, $y_{2n-1}(x)$ — собственные функции оператора L_{DN} , y_{2n} — собственные функции оператора L_D , а $f \in W_2^\theta$ — функция, на которую действует оператор $F'(\sigma)$.

Доказательство. Утверждения этой теоремы доказаны в §5 работы [46]. Доказательства основаны на теореме 1.3 и предложении 2.2, если предварительно вычислить производные координат. Здесь важно, что знаменатели в формуле (2.5) в случае вещественной функции σ не обращаются в нуль. Согласно [43], собственные функции непрерывно зависят от первообразной потенциала σ , а потому числа $(y_k^2(x), 1)$ не обращаются в нуль в некоторой комплексной окрестности (нужно еще учесть асимптотики функций y_k при $k \rightarrow \infty$). Теорема остается справедливой, если вместо условия $\sigma \in \Gamma^\theta$ потребовать, чтобы σ была вещественной и среди чисел ρ_k не было равных нулю. Однако в этом случае вместо вещественной аналитичности будет обычная. $\square$

Лемма 2.5. Пусть функции $y_k(x)$, участвующие в теореме 2.4, нормированы условиями $y_k^{[1]}(0) = 1$. Тогда система функций

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{\pi} y'_k(x) y_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$. Биортогональная к $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ система имеет вид

$$\psi_k(x) = \pi \rho_k^{1/2} y_k(x) w_k(x), \quad (2.7)$$

где при $k = 2n$ функция w_k — решение уравнения $-y'' + \sigma'y = \lambda_n y$ с начальными условиями

$$w_k^{[1]}(\pi) = 0, \quad w_k(\pi) = \left(\int_0^\pi y_k^2(x) dx \cdot y_k^{[1]}(\pi) \right)^{-1},$$

а при $k = 2n - 1$ функция w_k есть решение уравнения $-y'' + \sigma'y = \mu_n y$ с начальными условиями

$$w_k(\pi) = 0, \quad w_k^{[1]}(\pi) = - \left(\int_0^\pi y_k^2(x) dx \cdot y_k(\pi) \right)^{-1}.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы о базисности Рисса системы $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ доказано в лемме 6 работы [45]. Там же доказаны соотношения $(\varphi_k(x), \psi_m(x)) = 0$ при $k \neq m$. Доказательство равенств $(\varphi_k(x), \psi_k(x)) = 1$ проводится прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем, так как далее конкретный вид функций φ_k и ψ_k не используется. $\square$

Теорема 2.6. Пусть $\theta \geq 0$. Для каждой точки $\mathbf{y}_0 \in \Omega^\theta = F(\Gamma^\theta)$ существует ее комплексная окрестность $U(\mathbf{y}_0)$, в которой определено обратное отображение $F^{-1}(\mathbf{y})$ и в которой это отображение имеет комплексную производную по Фреше. Эта производная имеет вид

$$(F^{-1})'(\mathbf{y}) = (F')^{-1}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \tilde{\psi}_k(x), \quad \mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots). \quad (2.8)$$

Здесь $\tilde{\psi}_k(x) = \gamma_k \psi_k(x)$, где $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ — биортогональная система из леммы 2.6, а $\gamma_k = \rho_k \int_0^1 y_k^2(x) dx$.

Доказательство. Пусть сначала $\theta > 0$. Имеем

$$F'(\sigma_0) = T + \Phi'(\sigma_0), \quad \mathbf{y}_0 = F(\sigma_0).$$

Согласно теореме 1.2, оператор $T: W_2^\theta \rightarrow l_B^\theta$ — изоморфизм, а в силу теоремы 2.4 оператор $\Phi'(\sigma_0): W_2^\theta \rightarrow l_B^\theta$ ограничен, поэтому оператор $\Phi'(\sigma_0): W_2^\theta \rightarrow l_B^\theta$ компактен. Следовательно, $F'(\sigma_0)$ — фредгольмов оператор, а потому он обратим, если его ядро нулевое. Из формул (2.5) и полноты системы (2.6) в пространстве L_2 следует, что равенство $F'(\sigma_0)f = 0$ при $f \in L_2$ влечет за собой равенство $f = 0$. Тем более это так, если $f \in W_2^\theta$ при $\theta > 0$. Формула (2.8) теперь получается непосредственной проверкой. Достаточно проверить равенство $F'(\sigma_0)(F^{-1})'(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$. Оно сразу следует из (2.5) и (2.8) с учетом взаимной биортогональности систем $\{\gamma_k^{-1}\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\psi_k\}_1^\infty$.

Пусть теперь $\theta = 0$. Из асимптотических формул для собственных значений ρ_k^2 и собственных функций y_k , полученных в [44, теоремы 2.6 и 2.7], сразу следует, что $\gamma_k \asymp 1$, если функции y_k нормированы условием $y_k^{[1]}(0) = 1$. Поэтому из леммы 2.5 вытекает, что система $\{\tilde{\psi}_k\}_1^\infty$ — базис Рисса. Тогда ограниченность оператора $(F')^{-1}(\mathbf{y}_0)$, определенного формулой (2.8), следует из определения базиса Рисса. Существование обратного оператора при любом $\theta \geq 0$ в малой комплексной окрестности точки $\mathbf{y}_0$ и его комплексная дифференцируемость следуют из теоремы об обратном отображении. $\square$

Отметим, что из теоремы 2.6 сразу получаются локальные оценки разности потенциалов через разность спектральных данных и наоборот. Как отмечено во введении, для классического случая $\theta = 1$ ($q \in L_2$) имеется много работ на эту тему с различными методами и в разной форме. Однако изучались отображения $q \rightarrow \{\text{спектральные данные}\}$, мы же изучаем отображение $\int q(t) dt = \sigma \rightarrow \{\text{спектральные данные}\}$, поэтому возникающие у нас системы и формулы имеют другой вид.

Далее мы покажем, что при $\theta > 0$ с помощью теоремы 1.3 можно получить существенно более сильный результат, избегая технической работы с системами функций.

Лемма 2.7. *Зафиксируем $\theta > 0$. Для любого $R > 0$ найдутся положительные числа $r = r(R)$, $h = h(R)$, такие, что*

$$F(\mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)) \subset \Omega^\theta(r, h), \quad \text{где } \mathcal{B}_\Gamma^\theta(R) = \Gamma \cap \mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R).$$

Доказательство. Если $\|\sigma\|_\theta \leq R$, $\sigma \in \Gamma^\theta$, то из теоремы 1.3 следует, что $F\sigma = \mathbf{y} \in \Omega^\theta(r)$, где $r = r(R)$ зависит от R , но не от σ . Остается показать, что для всех элементов $\mathbf{y} = F\sigma$, $\sigma \in \mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)$, выполняются неравенства (2.3) при некотором $h = h(R) > 0$, зависящем от R , но не от σ .

Заметим, что найдется число $N = N(\theta, r)$, такое, что для всех $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots) \in \Omega^\theta(r)$ и всех $k \geq N$ выполняются неравенства $s_{k+1} - s_k \leq 1/4$ (здесь вместо $1/4$ можно взять любое число $\varepsilon > 0$). Это утверждение сразу следует из определения нормы в l_B^θ при $\theta > 0$ (см. подробнее §5 работы [46]; при $\theta = 0$ это утверждение не справедливо). Теперь допустим, что утверждение теоремы неверно и найдутся элементы $\mathbf{y}^n = F\sigma_n$, $\sigma_n \in \mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)$, такие, что $s_k^n - s_{k+1}^n \rightarrow 1/2$ при $n \rightarrow \infty$ и некотором фиксированном k , $1 \leq k < N$ (здесь s_k^n — координаты

элементов $\mathbf{y}^n$). Шар в пространстве W_2^θ слабо компактен, поэтому из последовательности функций σ_n можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, считаем, что сама эта последовательность слабо сходится к функции $\sigma \in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$. Так как пространство W_2^θ компактно вложено в L_2 , то последовательность σ_n сильно сходится к σ в норме L_2 . Пусть индекс k , при котором $s_k^n - s_{k+1}^n \rightarrow 1/2$, является, например, четным, $k = 2p$. Тогда $\lambda_p(\sigma_n) - \mu_{p+1}(\sigma_n) \rightarrow 0$. Согласно теореме 2 работы [43], сходимость функций σ_n в L_2 влечет за собой сходимость собственных значений, т. е. $\lambda_p(\sigma_n) \rightarrow \lambda_p(\sigma)$, $\mu_{p+1}(\sigma_n) \rightarrow \mu_{p+1}(\sigma)$. Поэтому $s_k^n - s_{k+1}^n \rightarrow 1/2$ влечет за собой $\lambda_p(\sigma) = \mu_{p+1}(\sigma)$, что невозможно в силу условия перемежаемости (2.1). $\square$

Лемма 2.8. Пусть $\theta > 0$. Справедливо обратное утверждение к лемме 2.7: для любых чисел r и h найдется число $R > 0$, такое, что

$$F^{-1}(\Omega^\theta(r, h)) \subset \mathcal{B}_\Gamma^\theta(R).$$

Справедливо представление $F^{-1} = T^{-1} + \Psi$, $\Psi: \Omega^\theta \rightarrow W_2^\tau$, где число τ определено в теореме 1.3. Отображение $\Psi: \Omega^\theta \rightarrow W_2^\tau$ аналитично, причем

$$\|\Psi \mathbf{y}\|_\tau \leq C \|\mathbf{y}\|_\theta \quad \text{для всех } \mathbf{y} \in \Omega^\theta(r, h), \quad (2.9)$$

где постоянная C зависит только от r и h .

Доказательство. Если первое утверждение леммы неверно, то найдутся элементы $\mathbf{y}^n \in \Omega^\theta(r, h)$, такие, что $F^{-1}\mathbf{y}^n = \sigma_n$, $\|\sigma_n\|_\theta \rightarrow \infty$. Для определенности будем считать, что $\theta \in (0, 1]$. При $\theta > 1$ доказательство не меняется, нужно только, согласно теореме 1.3, число $\theta/2$ заменить на $\theta - 1$. Выделим из последовательности $\mathbf{y}^n$ слабо сходящуюся в пространстве l_B^θ подпоследовательность. Считаем что сама последовательность слабо сходится к некоторому элементу $\mathbf{y} \in l_B^\theta$. Из слабой сходимости следует покоординатная сходимость. Тогда из определения множества $\Omega^\theta(h, r)$ и его замкнутости следует, что $\mathbf{y} \in \Omega^\theta(h, r)$. В силу теоремы 2.1 найдется функция $\sigma \in \Gamma^\theta$, такая, что $F\sigma = \mathbf{y}$. Из слабой сходимости $\mathbf{y}^n \rightarrow \mathbf{y}$ в l_B^θ следует сильная сходимость $\mathbf{y}^n \rightarrow \mathbf{y}$ в норме $l_B^{\theta/2}$, а из аналитичности (достаточно непрерывности) отображения $F^{-1}: \Omega^{\theta/2} \rightarrow \Gamma^{\theta/2}$ следует, что $\|\sigma_n - \sigma\|_{\theta/2} \rightarrow 0$. В силу теоремы 1.3 имеем $\|\Phi\sigma_n\|_\theta \leq \|\sigma_n\|_{\theta/2} \leq C$. Но тогда (опять используем теорему 1.3 и свойство ограниченности слабо сходящейся последовательности) имеем

$$\|T\sigma_n\|_\theta \leq \|\Phi\sigma_n\|_\theta + \|\mathbf{y}^n\|_\theta \leq C + C = 2C.$$

Поскольку оператор $T: W_2^\theta \rightarrow l_B^\theta$ есть изоморфизм, $\|\sigma_n\|_\theta \leq 2C$. Это противоречие завершает доказательство первого утверждения леммы.

Очевидно, что $\Psi = -T^{-1}\Phi F^{-1}$. Следовательно, отображение $\Psi: \Omega^\theta \rightarrow W_2^\tau$ является аналитическим как композиция аналитических отображений. Из первого утверждения леммы и равномерной ограниченности в каждом шаре отображения $\Phi: \Omega^\theta \rightarrow W_2^\tau$ получаем оценку $\|\Psi \mathbf{y}\|_\tau \leq C$ для всех $\mathbf{y} \in \Omega^\theta(r, h)$. Из равенства $\Psi(0) = 0$ и аналитичности отображения Ψ получаем оценку (2.9). $\square$

Следующее утверждение является совсем простым, но нам удобно его отдельно сформулировать.

Лемма 2.9. Пусть X, X_1 — метрические пространства, X полно и функция $\Phi: X \rightarrow X_1$ непрерывна на X . Если множество $U \subset X$ предкомпактно в X , то $\Phi: U \rightarrow X_1$ равномерно непрерывна и равномерно ограничена.

Доказательство. В условиях леммы замыкание $\overline{U}$ является компактом в X , а функция $\Phi: \overline{U} \rightarrow X_1$ непрерывна. Поэтому утверждение следует из свойств непрерывных функций на компактах. $\square$

Лемма 2.10. Пусть $\theta > 0$. При любом $R > 0$ справедлива оценка

$$\|F'(\sigma)\|_{\theta} \leq C \quad \text{для всех } \sigma \in \mathcal{B}_{\Gamma}^{\theta}(R), \quad (2.10)$$

где постоянная C зависит от R , но не зависит от σ .

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\theta \in (0, 1]$. Если $\theta > 1$, то далее число $\theta/2$ нужно заменять на $\theta - 1$. Поскольку $F' = \Phi' + T$, достаточно доказать оценку (2.10), в которой вместо F участвует Φ . Согласно теореме 2.3, отображение $\Phi: W^{\theta/2} \rightarrow l_B^{\theta}$ аналитично на замкнутом множестве $\mathcal{B}_{\Gamma}^{\theta/2}(R_1)$ при любом $R_1 > 0$, а потому числовая функция $\|\Phi'(\sigma)\|_{\theta}$ непрерывна на этом множестве. Из непрерывности вложения $W_2^{\theta} \hookrightarrow W_2^{\theta/2}$ следует, что найдется число $R_1 = R_1(R, \theta)$, такое, что $\mathcal{B}_{\Gamma}^{\theta}(R) \subset \mathcal{B}_{\Gamma}^{\theta/2}(R_1)$. Здесь первое множество компактно во втором, поэтому из леммы 2.9 следует оценка (2.10), в которой F надо заменить на Φ . $\square$

Лемма 2.11. Пусть $\theta > 0$. При любых $r > 0$ и $h \in (0, 1/2)$ для обратного отображения справедлива оценка

$$\|(F^{-1})'(\mathbf{y})\| \leq C \quad \text{для всех } \mathbf{y} \in \Omega^{\theta}(r, h), \quad (2.11)$$

где постоянная C зависит от r и h , но не зависит от $\mathbf{y}$.

Доказательство. Для определенности рассматриваем случай $\theta \in (0, 1]$. Рассуждаем аналогично. Фиксируем числа $r > 0$, $h \in (0, 1/2)$. Используя непрерывность вложения $l_B^{\theta} \hookrightarrow l_B^{\theta/2}$, найдем число r_1 , такое, что $\Omega^{\theta}(r, h) \subset \Omega^{\theta/2}(r_1, h)$. Согласно лемме 2.8, отображение $\Psi = -F^{-1}\Phi T^{-1}: \Omega^{\theta/2}(r_1, h) \rightarrow W_2^{\theta}$ аналитично. Поэтому числовая функция $\|\Psi'(\mathbf{y})\|_{\theta}$ непрерывна при $\mathbf{y} \in \Omega^{\theta/2}(r_1, h)$. Воспользовавшись леммой 2.9 и компактностью вложения $\Omega^{\theta}(r, h) \subset \Omega^{\theta/2}(r_1, h)$, получим оценку (2.11), в которой F^{-1} заменено на Ψ . Поскольку $F^{-1} = T^{-1} + \Psi$, оценка сохраняется для F^{-1} . $\square$

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 2.12. Фиксируем $\theta > 0$. Пусть последовательности $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$ регуляризованных спектральных данных лежат в $\Omega_B^{\theta}(r, h)$. Тогда прообразы $\sigma = F_B^{-1}\mathbf{y}$, $\sigma_1 = F_B^{-1}\mathbf{y}_1$ лежат в $\mathcal{B}_{\Gamma}^{\theta}(R)$ и справедливы оценки

$$C_1\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_{\theta} \leq \|\sigma - \sigma_1\|_{\theta} \leq C_2\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_{\theta}, \quad (2.12)$$

где число R и постоянные C_1 , C_2 зависят только от r и h . Число R и постоянные C_2 , C_1^{-1} увеличиваются при $r \rightarrow \infty$ или $h \rightarrow 0$. Обратно, если σ , σ_1 лежат в шаре $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\theta}(R)$, то последовательности $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$ регуляризованных спектральных данных этих функций лежат в $\Omega^{\theta}(r, h)$ и справедливы оценки

$$C_1\|\sigma - \sigma_1\|_{\theta} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_{\theta} \leq C_2\|\sigma - \sigma_1\|_{\theta}. \quad (2.13)$$

Здесь числа $r > 0$, $h \in (0, 1/2)$ и постоянные C_1 и C_2 зависят только от R . Числа r , h^{-1} , C_2 и C_1^{-1} увеличиваются при $R \rightarrow \infty$.

Доказательство. Заметим, что множество $\Omega^{\theta}(r, h)$ выпукло. Для дифференцируемых функций на выпуклых множествах справедлив аналог теоремы

Лагранжа (см., например, [5, следствие 12.2.8 гл. 12])

$$\|\sigma - \sigma_1\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|(F^{-1})'(t\mathbf{y} + (1-t)\mathbf{y}_1)\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|.$$

Тогда лемма 2.11 влечет за собой оценку сверху в неравенстве (2.12). Оценки сверху в (2.13) получаются аналогично из леммы 2.10. Оценки снизу в (2.12) и (2.13) теперь следуют из оценок сверху и лемм 2.7 и 2.8. $\square$

Множества $\mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)$ в теореме 2.12 можно заменить обычными шарами $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$, но тогда регуляризованные спектральные данные нужно определить формулой (2.4), где постоянная c такова, что для всех $\sigma \in \mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$ выполнена оценка $c \geq -\mu_1(\sigma) - 1/4$. В силу теоремы 3.1 такая постоянная, зависящая только от R , существует. Это замечание вытекает из того, что при добавлении к σ функции $c(x - \pi)$ спектры операторов L_D и L_{DN} сдвигаются на c , а разность функций $\sigma, \sigma_1 \in \mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$ совпадает с разностью функций $\sigma + c(x - \pi), \sigma_1 + c(x - \pi) \in \mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)$.

§3. Задача восстановления оператора L_D по его спектральной функции. Характеризация спектральных данных и равномерные априорные оценки

Общая схема доказательства аналогичных результатов для задачи восстановления оператора L_D по спектральной функции остается прежней, хотя доказательства схожих по формулировке лемм проводятся по-другому. В ходе изложения мы сформулируем две леммы (леммы 3.1 и 3.6), доказательство которых носит технический характер. Ввиду ограниченности объема статьи мы укажем только путь, на котором получаются доказательства, а детали и подробные выкладки читатель может найти в нашей электронной публикации [48].

Далее удобнее работать не с пространством $W_2^\theta \ominus \{1\}$, а с факторпространством $W_2^\theta / \{1\}$, считая, что все функции из W_2^θ определены с точностью до константы. Подразумевается, что скалярное произведение функций $f, g \in W_2^\theta / \{1\}$ определено равенством $(f, g)_\theta = (f_0, g_0)_\theta$, где $f_0, g_0 \in W_2^\theta \ominus \{1\}$. Обозначим через Γ_D^θ множество вещественных функций $\sigma \in W_2^\theta / \{1\}$, для которых $\lambda_1(\sigma) \geq 1/2$, а через $\mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)$ — пересечение множества Γ_D^θ с замкнутым шаром $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$. Если $\sigma \in \Gamma_D^\theta$, то собственные значения оператора L_D подчинены условиям $1/2 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. Для регуляризованных спектральных данных эти неравенства эквивалентны следующим:

$$s_2 \geq 0, \quad s_{2k} - s_{2k+2} < 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Условия неотрицательности всех нормировочных чисел эквивалентны условиям

$$s_{2k-1} > -\pi/2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Последовательность $\{s_k\}_1^\infty$ принадлежит l_2 , поэтому для любой вещественной функции $\sigma \in \Gamma_D^\theta$ найдется число $h = h(\sigma) > 0$, такое, что

$$s_2 \geq 0, \quad s_{2k} - s_{2k+2} \leq 1 - h, \quad s_{2k-1} \geq -\pi/2 + h, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Фиксируем произвольные числа $r > 0$ и $h \in (0, 1)$. Обозначим через $\Omega_D^\theta(r, h)$ совокупность вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty$, для которых выполнены неравенства (3.3) и которые лежат в замкнутом шаре радиуса r пространства l_D^θ , т.е. $\|\{s_k\}\|_\theta \leq r$. Через Ω_D^θ обозначим множество всех вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty \in l_D^\theta$, для которых справедливы неравенства (3.1) и

(3.2). Далее мы работаем только с отображением F_D и, когда это удобно, будем опускать индекс D . Вместо Γ_D^θ , Ω_D^θ и $\Omega_D^\theta(r, h)$ всегда будем писать Γ^θ , Ω^θ и $\Omega^\theta(r, h)$ соответственно.

Для доказательства аналогов теорем 2.1 и 2.2 нам понадобится следующий важный результат, который дает явное описание прообраза отображения F_D при изменении только одной из координат в пространстве l_D^θ . Похожие формулы для задачи восстановления по одному спектру имеются в книге [40]. Но доказательство нашего результата проводится иначе.

Лемма 3.1. Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ — собственные значения и нормировочные числа оператора L_D с вещественной функцией $\sigma \in W_2^\theta \in \Gamma^\theta$, $\theta \geq 0$. Тогда для любого фиксированного $n \geq 1$ и для любого $t \in (\lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_{n+1} - \lambda_n)$ существует функция $\sigma(x, t) \in W_2^\theta$, такая, что соответствующий оператор $L_D = L_D(\sigma)$ имеет спектр $\{\lambda_k + t\delta_{kn}\}_{k=1}^\infty$ (здесь δ_{kn} — символ Кронекера) и нормировочные числа $\{\alpha_k\}$. Далее, для любого фиксированного $n \geq 1$ и для любого $t \in (-\alpha_n, +\infty)$ существует функция $\sigma(x, t) \in W_2^\theta$, такая, что оператор L_D , построенный по этой функции, имеет спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и нормировочные числа $\{\alpha_k + t\delta_{kn}\}_{k=1}^\infty$.

Доказательство. Потенциал $\sigma(x, t)$ можно выписать в явном виде. В первом случае, когда меняется собственное значение λ_n , а нормировочные числа и все другие собственные значения остаются неизменными, положим

$$\sigma_n(x, t) = \sigma(x) - 2 \frac{d}{dx} \ln G(x, t), \quad (3.4)$$

$$G(x, t) = \left(1 + \alpha_n^{-1} \int_0^x y^2(\xi, \lambda_n + t) d\xi\right) \left(1 - \alpha_n^{-1} \int_0^x y^2(\xi, \lambda_n) d\xi\right) + \left(\alpha_n^{-1} \int_0^x y(\xi, \lambda_n + t) y(\xi, \lambda_n) d\xi\right)^2. \quad (3.5)$$

Здесь $y(x, \lambda)$ — решение уравнения $-y'' + \sigma'y = \lambda y$ с начальными условиями $y(0, \lambda) = 0$, $y^{[1]}(0, \lambda) = \sqrt{\lambda}$. Во втором случае, когда меняется только одно нормировочное число α_n , положим

$$\sigma_n(x, t) = \sigma(x) - 2 \frac{d}{dx} \ln G(x, t), \quad \text{где } G(x, t) = 1 + ((\alpha_n + t)^{-1} - \alpha_n^{-1}) \int_0^x y^2(\xi, \lambda_n) d\xi. \quad (3.6)$$

Выписанные формулы получаются, если записать уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко в том виде, в котором оно получено для потенциалов-распределений Гринивым и Микитюком [19]. Если искать решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям леммы, в виде линейной комбинации двух функций (ср. [29, с. 49–50]), то получается система двух линейных уравнений, которая решается явно. Подробности можно найти в [48]. $\square$

Лемма 3.2. При любых $\theta \geq 0$ отображение $F_D: \Gamma^\theta \rightarrow \Omega_D^\theta$ сюръективно.

Доказательство. Сначала докажем лемму при $\theta < 1/2$, когда пространство l_D^θ совпадает с l_2^θ . Воспользуемся приемом из [40]. Согласно теоремам 1.1 и 1.2, производная по Фреше отображения F_D в точке $\sigma = 0$ совпадает с оператором T_D , который является изоморфизмом. Поэтому для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что образ шара $\|\sigma\|_\theta < \delta$ при отображении F_D накрывает шар $\|s\|_\theta < \varepsilon$. При $\theta < 1/2$ пространство l_D^θ совпадает с

пространством l_2^θ . Для данного $\mathbf{s} = \{s_k\} \in \Omega^\theta$ рассмотрим последовательность

$$\mathbf{s}^n = \{0, 0, \dots, 0, s_n, s_{n+1}, \dots\},$$

выбрав число n так, чтобы $\|\mathbf{s}^n\|_\theta < \varepsilon$. Тогда найдется единственная функция $\sigma_n \in W_2^\theta$, образ $F(\sigma_n)$ которой совпадает с $\mathbf{s}^n$. Применив $n-1$ раз лемму 3.1, построим функцию $\sigma \in \Gamma^\theta \subset W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, для которой $F\sigma = \mathbf{s}$. Это и означает, что образ отображения F содержит Ω^θ . Теперь при $\theta \geq 1/2$ доказательство завершается с помощью приема, примененного в доказательстве теоремы 2.1. $\square$

Лемма 3.3. При любых $\theta \geq 0$ отображение $F: \Gamma^\theta \rightarrow \Omega^\theta$ инъективно.

Доказательство. Инъективность этого отображения при $\theta = 0$ (а тогда при всех $\theta \geq 0$) доказана в работе Гринива и Микитюка [19]. Отметим также, что инъективность следует из формулируемой ниже леммы 3.6 (для доказательства нужно повторить рассуждения из леммы 6 работы авторов [45]). $\square$

Обозначим через $\hat{\Omega}^\theta$ множество последовательностей $\{s_k\}_{k=1}^\infty \in l_D^\theta$, для которых числа $\lambda_k = (s_k + k)^2$ вещественны. Повторив рассуждения, проведенные перед доказательством теоремы 2.2, из лемм 3.2 и 3.3 получаем аналог теоремы 2.2.

Теорема 3.4. При любых $\theta \geq 0$ отображение $F_D: W_{2,\mathbb{R}}^\theta / \{1\} \rightarrow \hat{\Omega}^\theta$ есть биекция. В частности, числа $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\alpha_k\}_1^\infty$ являются собственными значениями и нормировочными числами оператора L_D , порождаемого функцией $\sigma \in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, если и только если последовательность $\{\lambda_k\}$ строго монотонна, числа $\{\alpha_k\}$ положительны и $\{s_k\}_1^\infty \in l_D^\theta$.

Из сформулированного утверждения следует также, что отображение $F_D: \Gamma^\theta \rightarrow \Omega^\theta$ есть биекция. Отметим, что при натуральных $\theta = 1, 2, \dots$ аналог теоремы 3.4, сформулированный на другом языке, имеется в книге Фрайлинга и Юрко [11].

Аналитичность и явный вид производной по Фреше дает следующая теорема.

Теорема 3.5. Пусть $\theta \geq 0$ и $\sigma \in \Gamma^\theta$. Тогда найдется комплексная окрестность $U \in W_2^\theta$ точки σ , такая, что отображение $F: U \rightarrow l_D^\theta$ является вещественно аналитическим. В этой окрестности отображение $\Phi_D = F_D - T_D: U \rightarrow l_D^\tau$, где τ определено в теореме 1.3, также является вещественно аналитическим. Производная в точке $\sigma \in U$ определяется равенством

$$F'_D(\sigma)f = \{(\varphi_k(x), \overline{f(x)})\}_{k=1}^\infty, \quad (3.7)$$

где

$$\varphi_{2k-1}(x) = 2\alpha_k \lambda_k \frac{d}{d\lambda} (z(x, \lambda) z'(x, \lambda)) \Big|_{\lambda=\lambda_k}, \quad \varphi_{2k}(x) = -\frac{y'_k(x) y_k(x)}{\alpha_k \sqrt{\lambda_k}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Здесь $f \in W_2^\theta$ — функция, на которую действует оператор $F'_D(\sigma): W_2^\theta \rightarrow l_D^\theta$, $y_n = y(x, \lambda_n)$ — собственные функции оператора L_D , нормированные условиями $y^{[1]}(0, \lambda_n) = \sqrt{\lambda_n}$, а $z(x, \lambda)$ — решение уравнения $-y'' + \sigma'(x)y = \lambda y$ с начальным условием $z(\pi, \lambda) = 0$, нормированное условием $\int_0^\pi z^2(x, \lambda) dx = 1/\lambda$. Утверждение об аналитичности (обычной) сохраняется, если условие $\sigma \in \Gamma^\theta$ заменить условием $\sigma \in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$ и потребовать, чтобы нуль не был собственным значением оператора L_D .

Доказательство. Локальная дифференцируемость отображения F_D доказана в §6 нашей работы [47]. В этой же работе приведены явные формулы для производной по Фреше, но они менее удобны, нежели (3.8). Переход от старых формул к новым требует некоторой технической работы, см. [48]. $\square$

Лемма 3.6. Система функций $\{\varphi_k\}_1^\infty$, определенная равенствами (3.8), является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)/\{1\}$. Биортогональная к ней система имеет вид

$$\psi_{2k-1}(x) = \frac{2}{\alpha_k^2} y_k^2(x), \quad \psi_{2k}(x) = -\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{\alpha_k} \frac{d}{d\lambda}(y^2(x, \lambda)) \Big|_{\lambda=\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

а потому также является базисом Рисса.

Доказательство соотношений $(\varphi_k(x), \psi_n(x)) = \delta_{kn}$ при $k \neq n$ проводится так же, как в лемме 6 из [47]. При $k = n$ проверка равенств усложняется, см. [48].

Доказательства следующих двух теорем получаются дословным повторением доказательств теорем 2.6 и 2.11 соответственно.

Теорема 3.7. Пусть $\theta \geq 0$. Для каждой точки $y_0 \in \Omega^\theta = F_D(\Gamma^\theta)$ существует ее комплексная окрестность $U(y_0)$, в которой определено обратное отображение $F_D^{-1}(y)$ и в которой это отображение имеет комплексную производную по Фреше. Эта производная имеет вид

$$(F_D^{-1})'(y) = (F'_D)^{-1}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \psi_k(x), \quad y = (s_1, s_2, \dots).$$

Здесь $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ — система, биортогональная к системе (3.8).

Теорема 3.8. Утверждение теоремы 2.12 сохраняет силу, если отображение $F = F_B$ и множество $\Omega^\theta(r, h) = \Omega_B^\theta(r, h)$ в ее формулировке заменить на F_D и $\Omega_D^\theta(r, h)$ соответственно.

Авторы благодарят проф. Р. О. Гринива за прочтение рукописи работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators in impedance form*, J. Funct. Anal., **222** (2005), 147–177.
- [2] А. А. Алексеев, *Устойчивость обратной задачи Штурма–Лиувилля на конечном интервале*, Докл. АН СССР, **287:1** (1986), 11–13.
- [3] V. Ambarzumian, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Phys, **53:9–10** (1929), 690–695.
- [4] G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math., **78** (1946), 1–96.
- [5] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ*, РХД, Ижевск, 2009.
- [6] P. Deift, E. Trubowitz, *Inverse scattering on the line*, Comm. Pure Appl. Math., **32:2** (1979), 121–251.
- [7] П. Б. Джакон, Б. С. Митягин, *Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака*, УМН, **61:4** (2006), 77–182.
- [8] P. Djakov, B. Mityagin, *Fourier method for one dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials*, <http://arxiv.org/abs/0710.0237v1>.

- [9] Л. Д. Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния*, УМН, **14:4** (1959), 57–119.
- [10] Л. Д. Фаддеев, *Свойства S -матрицы одномерного уравнения Шрёдингера*, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **73** (1964), 314–336.
- [11] G. Freiling, V. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*, Nova Sci. Publ. Corporation, 2001.
- [12] М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, *Определение дифференциального уравнения по двум спектрам*, УМН, **19:2** (1964), 3–63.
- [13] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции*, Изв. АН СССР, сер. матем., **15:4** (1951), 309–360.
- [14] F. Gesztesy, *Inverse spectral theory as influenced by Barry Simon*, in: Spectral Theory and Mathematical Physics, A Festschrift in Honor of Barry Simon's 60th Birthday, Ergodic Schrödinger Operators, Singular Spectrum, Orthogonal Polynomials, and Inverse Spectral theory, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 76, part. 2 (eds. F. Gesztesy, P. Deift, C. Galvez, P. Perry, W. Schlag), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 741–820; <http://arxiv.org/abs/1002.0388v1>.
- [15] O. H. Hald, *The inverse Sturm–Liouville problem with symmetric potentials*, Acta Math., **141:3–4** (1978), 263–291.
- [16] M. Hitrik, *Stability of the inverse problem in potential scattering on the real line*, Comm. Partial Differential Equations, **25:5–6** (2000), 925–955.
- [17] H. Hochstadt, *The inverse Sturm–Liouville problem*, Comm. Pure Appl. Math., **26** (1973), 715–729.
- [18] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *1D Schrödinger operators with periodic singular potentials*, Methods Func. Anal. Topol., **7:4** (2001), 31–42; <http://arxiv.org/abs/math/0109129v1>.
- [19] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials*, Inverse Problems, **19:3** (2003), 665–684.
- [20] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials, II. Reconstruction by two spectra*, in: Functional Analysis and its Applications, North-Holland Mathematical Studies, vol. 197 (eds. V. Kadets, W. Zelazko), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2004, 97–114.
- [21] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Transformation operators for Sturm–Liouville operators with singular potentials*, Math. Phys. Anal. Geom., **7:2** (2004), 119–149.
- [22] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials*, J. Funct. Anal., **238:1** (2006), 27–57.
- [23] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in the Sobolev space scale*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2), **49:2** (2006), 309–329.
- [24] Е. Л. Коротяев, Д. С. Челкак, *Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями*, Алгебра и анализ, **21:5** (2009), 114–137.
- [25] М. Г. Крейн, *Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля*, Докл. АН СССР, **76** (1951), 21–24.
- [26] М. Г. Крейн, *О методе эффективного решения обратной краевой задачи*, Докл. АН СССР, **94** (1954), 987–990.
- [27] N. Levinson, *The inverse Sturm–Liouville problem*, Mat. Tidsskr. B., 1949, 25–30.
- [28] Б. М. Левитан, *Об определении дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам*, Изв. АН СССР, сер. матем., **28:1** (1964), 63–78.
- [29] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.
- [30] J. R. Mclaughlin, *Stability theorems for two inverse spectral problems*, Inverse Problems, **4** (1988), 529–540.

- [31] M. M. Malamud, *Spectral analysis of Volterra operators and inverse problems for systems of ordinary differential equations*, Sfb Preprint No. 269, Berlin, June 1997.
- [32] В. А. Марченко, *Некоторые задачи в теории дифференциального оператора второго порядка*, Докл. АН СССР, **72** (1950), 457–460.
- [33] В. А. Марченко, *Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка*, Труды ММО, **1** (1951), 328–420.
- [34] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [35] В. А. Марченко, К. В. Маслов, *Устойчивость задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции*, Матем. сб., **81:4** (1970), 525–551.
- [36] В. А. Марченко, И. В. Островский, *Характеризация спектра оператора Хилла*, Матем. сб., **97:4** (1975), 540–606.
- [37] В. А. Марченко, И. В. Островский, *Аппроксимация периодических потенциалов конечнозонными*, Вестник Харьк. ун-та №205. Прикл. матем. и механика, вып. 45, 1980, 4–40.
- [38] M. Marletta, R. Weikard, *Weak stability for an inverse Sturm–Liouville problem with finite spectral data and complex potential*, Inverse Problems, **21:4** (2005), 1275–1290.
- [39] A. Mizutani, *On the inverse Sturm–Liouville problem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, **31:2** (1984), 319–350.
- [40] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Acad. Press, Orlando, 1987.
- [41] Т. И. Рябушко, *Устойчивость восстановления оператора Штурма–Лиувилля по двум спектрам*, Теор. функц., функц. анализ и его прилож., **18** (1973), 176–185.
- [42] Т. И. Рябушко, *Оценки нормы разности двух потенциалов граничной задачи Штурма–Лиувилля*, Теория функций, функц. анализ и его прилож., **39** (1983), 114–117.
- [43] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Матем. заметки, **66:6** (1999), 897–912.
- [44] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*, Труды ММО, **64** (2003), 159–219.
- [45] A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, *Inverse problem for Sturm–Liouville operators with distribution potentials: Reconstruction from two spectra*, Russian J. Math. Phys., **12:4** (2005), 507–514.
- [46] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева*, Матем. заметки, **80:6** (2006), 864–884.
- [47] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма–Лиувилля*, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **260** (2008), 227–247.
- [48] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Свойства отображения, связанного с восстановлением оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции. Равномерная устойчивость в шкале соболевских пространств*, <http://arxiv.org/abs/1010.5344v1>.
- [49] А. Н. Тихонов, *О единственности решения задачи электропроводимости*, Докл. АН СССР, **69** (1949), 797–800.
- [50] В. А. Юрко, *Об устойчивости восстановления оператора Штурма–Лиувилля, Дифференциальные уравнения и теория функций* (Саратовский университет), **3** (1980), 113–124.