Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, П. П. Никитин, Описание характеров и факторпредставлений бесконечной симметрической инверсной полугруппы, *Функци. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 1, 16–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3023>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:09:09

Описание характеров и факторпредставлений бесконечной симметрической инверсной полугруппы*

© 2011. А. М. ВЕРШИК, П. П. НИКИТИН

В статье приводится полный список неразложимых характеров бесконечной симметрической полугруппы. По сравнению с аналогичным списком для бесконечной симметрической группы необходимо ввести лишь один новый параметр, имеющий наглядный комбинаторный смысл. В работе используется теория представлений конечных симметрических полугрупп и теория представлений бесконечной симметрической группы.

Введение

Эта статья посвящена описанию характеров бесконечной симметрической полугруппы. Основной результат соединяет, с одной стороны, теорию представлений конечных симметрических полугрупп, развитую Манном [13], [14], Соломоном [17], Халверсоном [12], Вагнером [1], Престоном [16] и Поповой [11], а с другой — теорию представлений локально конечных групп, в частности, бесконечной симметрической группы, и локально полупростых алгебр, развитую в работах Тóма [18], Вершика–Керова [4]–[6], [20]. Анализ диаграммы Браттели для бесконечной симметрической полугруппы, проведенный ниже, напоминает анализ в более сложной ситуации — в задаче о характерах алгебр Брауэра–Вейля [7]. Симметрическая полугруппа возникала не только в литературе по теории полугрупп и их представлений, но и в связи с теорией представлений бесконечной симметрической группы [15] и для определения полугруппы кос [19]; также рассматривались q -аналоги симметрических полугрупп [12]. Повидимому, определение бесконечной симметрической полугруппы, данное в статье, и проблемы, связанные с ее представлениями, в литературе до сих пор не обсуждались.

Рассмотрим множество всех взаимно однозначных *частичных* отображений множества $\{1, \dots, n\}$, т. е. взаимно однозначных отображений, действующих из некоторого подмножества множества $\{1, \dots, n\}$ на некоторое (возможно, отличное от первого) подмножество множества $\{1, \dots, n\}$. Зададим умножение двух таких отображений как композицию отображений там, где она определена. В результате мы получим полугруппу с нулем (отображение с пустой областью определения), называемую обычно *симметрической инверсной полугруппой*, обозначим ее R_n (есть и другие обозначения см. [9], [17]).

Очевидным образом симметрическая группа S_n является подгруппой полугруппы R_n : $S_n \subset R_n$. Полугруппа R_n может быть представлена как полугруппа всех 0-1-матриц с не более чем одной единицей в каждой строке и каждом столбце с матричным умножением. Эта реализация аналогична натуральному пред-

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ-08-01-00379-а и РФФИ-09-01-12175-офи-м.

ставлению симметрической группы. Матрицы такого вида находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными расстановками не бьющих друг друга ладей на $n \times n$ -доске, поэтому этот моноид (полугруппа с единицей) был назван Л. Соломоном *ладейным моноидом* (*rook monoid*).

Очень важны следующие свойства инверсных полугрупп, в частности, симметрической инверсной полугруппы (см. дополнение):

- (1) комплексная полугрупповая алгебра любой конечной инверсной полугруппы полупроста ([10], [14]);
- (2) любая конечная инверсная полугруппа может быть изоморфно вложена в симметрическую инверсную полугруппу ([1], [16]);
- (3) класс конечных инверсных полугрупп порождает в точности класс инволютивных полупростых биалгебр [2].

Следующий результат, описывающий характеры конечной инверсной полугруппы, фактически был найден несколькими авторами, его комбинаторно-динамическая характеристика приведена в [12].

Множество неприводимых представлений (и, следовательно, множество неприводимых характеров) симметрической полугруппы R_n параметризуется набором всех диаграмм Юнга с не более чем n клетками. Ветвление представлений в терминах диаграмм выглядит так: переход от неприводимого представления полугруппы R_n к представлениям полугруппы R_{n+1} состоит в том, что соответствующая представлению диаграмма Юнга либо остается без изменений, либо получает обычным образом одну новую клетку (растет).

Бесконечная симметрическая группа S_∞ есть счетная группа всех финитных (т.е. нетождественных лишь на конечном подмножестве) взаимно однозначных отображений счетного множества в себя. Так же можно определить *бесконечную симметрическую инверсную полугруппу*¹⁾ R_∞ как множество частичных взаимно однозначных не тождественных на конечном множестве отображений счетного множества в себя²⁾. Группа S_∞ есть индуктивный предел цепочки групп S_n , $n = 1, 2, \dots$, с естественными вложениями групп. Точно так же полугруппы R_n , $n = 1, 2, \dots$, образуют цепочку относительно естественных мономорфизмов полугрупп³⁾ $R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_n \subset \dots$, и ее индуктивный предел есть бесконечная симметрическая инверсная полугруппа. Связь между диаграммами Браттели для бесконечной симметрической группы (граф Юнга) и диаграммой для бесконечной симметрической полугруппы естественно приводит к новой операции на графах, сопоставляющей каждой диаграмме Браттели ее «медленный» вариант. (Ср. с понятием «паскализации» графа в [7].)

Наши результаты опираются на хорошо развитую теорию представлений бесконечной симметрической группы S_∞ и отчасти обобщают ее. Напомним, что список характеров бесконечной симметрической группы был найден Тома [18]. Новое доказательство его теоремы, данное Вершиком и Керовым [4], было основано на аппроксимации характеров бесконечной группы характерами конечных

¹⁾Мы опускаем, как правило, слово «инверсная» и говорим просто о (бесконечной) симметрической полугруппе.

²⁾Тем самым в бесконечной симметрической инверсной полугруппе нулевого отображения нет, так как всякий элемент должен быть тождественным отображением на дополнении к конечному множеству.

³⁾При мономорфизме $R_n \subset R_{n+1}$ нуль полугруппы переходит не в нуль, а в некоторый проектор, точнее — в образующую $p_n \in R_{n+1}$, см. теорему 1.7.

симметрических групп и использовало комбинаторику диаграмм Юнга, которые, как хорошо известно, параметризуют неприводимые комплексные представления конечных симметрических групп. Параметрами неразложимых характеров в изложении [4] служат частоты строк и столбцов последовательности растущих диаграмм Юнга. *Основной результат настоящей статьи состоит в том, что список параметров характеров бесконечной симметрической полугруппы получается из списка параметров Тома добавлением одного нового числа из отрезка $[0, 1]$.* Смысл этого параметра состоит в следующем. Параметрами неприводимых представлений конечной симметрической полугруппы R_n также служат диаграммы Юнга, но с любым числом клеток k , не превосходящим n ; последовательность растущих диаграмм, таким образом, помимо предельных частот строк и столбцов имеет еще один параметр — предел отношения k/n , равный относительной скорости, с которой путь в графе ветвления проходит по диаграммам Юнга, или, иначе говоря, равный замедлению скорости аппроксимации характера бесконечной полугруппы характерами конечных полугрупп.

Описание характеров полугруппы позволяет дать реализацию самого представления. Она осуществляется в том же пространстве, что и представление бесконечной симметрической полугруппы. Точнее, пространство представления строится точно так же, как и в модели факторпредставлений бесконечной симметрической группы в работе [5], но по расширенному списку параметров, см. теорему 2.16.

В первом параграфе приведены необходимые факты теории представлений конечных симметрических инверсных полугрупп. Второй параграф посвящен непосредственно теории представлений бесконечной симметрической полугруппы R_∞ и содержит основные результаты. В дополнении собраны общие сведения о конечных инверсных полугруппах и некоторые новые факты об их полугрупповых алгебрах как алгебрах Хопфа.

§1. Теория представлений конечных симметрических инверсных полугрупп

1.1. Полупростота полугрупповой алгебры $\mathbb{C}[R_n]$. Полный список неприводимых представлений. Назовем *рангом* отображения $a \in R_n$ число элементов, на которых это отображение не определено. Каждое из множеств $A_r = \{a \in R_n \mid \text{ранг } a \text{ не меньше } r\}$ при $0 \leq r \leq n$ является идеалом полугруппы R_n . Цепочка идеалов

$$R_n = A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n$$

является главным рядом полугруппы R_n , т. е. не существует идеала, лежащего строго между A_r и A_{r+1} , см. теорему 1.1.

Обозначим через $\mathbb{C}[S_n]$ комплексную групповую алгебру симметрической группы S_n . Эта алгебра, как и групповая алгебра любой конечной группы, является полупростой в силу наличия инвариантного скалярного произведения.

Комплексная полугрупповая алгебра инверсной полугруппы также всегда полупроста, что следует из общей теоремы 3.3. Явное разложение алгебры $\mathbb{C}[R_n]$ на матричные компоненты предложено Манном [13].

Теорема 1.1 (Манн). *Алгебра $\mathbb{C}[R_n]$ полупроста и имеет вид*

$$\mathbb{C}[R_n] \cong \bigoplus_{r=0}^n M_{\binom{n}{r}}(\mathbb{C}[S_r]).$$

Здесь $M_l(A)$ есть алгебра матриц порядка l над алгеброй A . Описание представлений алгебры $\mathbb{C}[R_n]$ дается следующей теоремой.

Теорема 1.2 (Манн). *Пусть полугруппа S изоморфна полугруппе $M_n(G)$ матриц размера $n \times n$ с элементами из некоторой группы G . Пусть характеристика поля F равна нулю или является простым числом, не делящим порядок группы G . Пусть $\{\gamma_p\}_{p=1}^k$ — полный набор неэквивалентных неприводимых представлений группы G над F . Обозначим через γ'_p отображение, заданное формулой*

$$\gamma'_p(\{x_{ij}\}) = \{\gamma_p(x_{ij})\}$$

для любой матрицы $\{x_{ij}\} \in S = M_n(G)$. Тогда $\{\gamma'_p\}_{p=1}^k$ — полный набор неэквивалентных неприводимых представлений полугруппы S над F .

Обозначим через $\mathcal{P}_r$ множество всех разбиений натурального числа r . Из предыдущей теоремы следует, что множество неприводимых представлений полугруппы R_n может быть естественным образом параметризовано множеством $\bigcup_{r=0}^n \mathcal{P}_r$.

Замечание 1.3. Как видно из приведенной выше формы неприводимых представлений полугруппы R_n , любое такое представление является продолжением однозначно определенного индуцированного представления группы S_n . Точнее, для неприводимого представления полугруппы R_n , отвечающего разбиению $\lambda \in \mathcal{P}_r$, рассмотрим представление подгруппы $S_r \times S_{n-r} \subset S_n$, где действие группы S_r отвечает разбиению λ , а группа S_{n-r} действует тривиально. Соответствующее индуцированное представление группы S_n может быть продолжено до рассматриваемого неприводимого представления полугруппы R_n . (Это отмечено также в [15].)

Замечание 1.4. На полугрупповой алгебре симметрической полугруппы $\mathbb{C}[R_n]$, как и на групповой алгебре симметрической группы $\mathbb{C}[S_n]$, есть инволюция, переводящая, в частности, каждое неприводимое представление π в представление $\text{sgn } \pi$. Эта инволюция соответствует естественной инволюции графа Юнга и, следовательно, медленного графа Юнга (см. определение в разд. 2.1), состоящей в переходе от диаграммы к отражению этой диаграммы от диагонали. Однако эта инволюция не является инволюцией группы S_n или полугруппы R_n .

1.2. Формула для характеров конечной симметрической полугруппы. Манну [13] принадлежит также формула, выражающая характеры симметрической инверсной полугруппы через характеры симметрических групп. Для формулировки теоремы для каждого подмножества $K \subset \{1, \dots, n\}$, $|K| = r$, зафиксируем произвольную частичную биекцию $\mu_K: K \mapsto \{1, \dots, r\}$. Через $\mu_K^-: \{1, \dots, r\} \mapsto K$ будем обозначать отображение, обратное к μ_K на K : $\mu_K^- \circ \mu_K$ — тождественное отображение на множестве K .

Теорема 1.5 (Манн). Пусть χ^* — характер неприводимого представления полугруппы R_n , отвечающего разбиению $\lambda \in \mathcal{P}_r$, $1 \leq r \leq n$. Пусть χ — соответствующий характер симметрической группы S_r . Тогда для любого элемента $\sigma \in R_n$

$$\chi^*(\sigma) = \sum \chi(\mu_K \sigma \mu_K^{-1}),$$

где сумма берется по всем подмножествам K области определения элемента σ , таким, что $|K| = r$ и $K\sigma = K$.

1.3. Задание полугруппы через образующие и соотношения. Нас будут интересовать семейства образующих полугрупп $\{R_n\}_{n=0}^\infty$, возрастающие при вложениях $R_n \subset R_{n+1}$. Этому условию удовлетворяют образующие, предложенные Поповой [11], и образующие, предложенные Халверсоном [12]. Образующие и соотношения у Халверсона выписаны для q -аналога симметрической инверсной полугруппы. Ниже приведен частный случай доказанного им утверждения для $q = 1$.

Через σ_i , $1 \leq i < n$, обозначим коксетеровские образующие группы S_n . Через $p_i \in R_n$, $1 \leq i \leq n$, обозначим следующие отображения: $p_i(j)$ не определено, если $j \leq i$, и $p_i(j) = j$, если $j > i$.

Теорема 1.6 (Попова). Полугруппа R_n задается образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, p_1 и следующими соотношениями:

- (1) коксетеровские соотношения для группы S_n ;
- (2) $\sigma_2 p_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1} p_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1} = p_1 = p_1^2$;
- (3) $(p_1 \sigma_1)^2 = p_1 \sigma_1 p_1 = (\sigma_1 p_1)^2$.

Теорема 1.7 (Халверсон). Полугруппа R_n задается образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, p_1, \dots, p_n$ и следующими соотношениями:

- (1) коксетеровские соотношения для группы S_n ;
- (2) $\sigma_i p_j = p_j \sigma_i = p_j$ при $1 \leq i < j \leq n$;
- (3) $\sigma_i p_j = p_j \sigma_i$ при $1 \leq j < i \leq n-1$;
- (4) $p_i^2 = p_i$ при $1 \leq i \leq n$;
- (5) $p_{i+1} = p_i \sigma_i p_i$ при $1 \leq i \leq n-1$.

Любопытное задание полугруппы R_n образующими и соотношениями принадлежит Соломону [17]: в дополнение к коксетеровским образующим группы S_n он рассматривает также «правый сдвиг» ν :

$$\nu(i) = \begin{cases} i+1 & \text{при } 1 \leq i < n, \\ \text{не определено} & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Теорема 1.8 (Соломон). Полугруппа R_n задается образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, ν и следующими соотношениями:

- (1) коксетеровские соотношения для группы S_n ;
- (2) $\nu^{i+1} \sigma_i = \nu^{i+1}$;
- (3) $\sigma_i \nu^{n-i+1} = \nu^{n-i+1}$;
- (4) $\sigma_i \nu = \nu \sigma_{i+1}$;
- (5) $\nu \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1} \nu = \nu$,

где $1 \leq i \leq n-1$, кроме n . (4), где $1 \leq i \leq n-2$.

§2. Теория представлений бесконечной симметрической инверсной полугруппы

В этом параграфе предполагается знакомство с основными понятиями и фактами теории локально полупростых и конечно аппроксимативных алгебр. Кроме того, используются факты из теории представлений конечных симметрических групп S_n и бесконечной симметрической группы S_∞ . См., например, [20].

Существует естественное вложение полугруппы $R_n \subset R_{n+1}$, при котором каждое отображение из полугруппы R_n переходит в отображение из R_{n+1} , переводящее элемент $n + 1$ в себя. Рассмотрим индуктивный предел цепочки полугрупп $R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_n \subset \dots$, который мы будем называть *бесконечной симметрической инверсной полугруппой* R_∞ .

Граф ветвления алгебры $C[R_\infty]$. Через $\mathbb{Y}$ обозначим граф Юнга, а через $\mathbb{Y}_n$ — этаж этого графа, вершины которого нумеруются всеми возможными разбиениями числа n (диаграммами Юнга). Через $|\lambda|$ будем обозначать число клеток диаграммы λ (сумму частей разбиения λ).

Через $\tilde{\mathbb{Y}}$ обозначим граф ветвления полугрупповой алгебры $C[R_\infty]$. Описание графа $\tilde{\mathbb{Y}}$ принадлежит Халверсону [12].

Теорема 2.1 (Халверсон). *Граф ветвления $\tilde{\mathbb{Y}}$ описывается следующим образом:*

- (1) вершины n -го этажа нумеруются всеми диаграммами Юнга с не более чем n клетками, $\tilde{\mathbb{Y}}_n = \bigcup_{i=0}^n \mathbb{Y}_i$;
- (2) ребро соединяет вершины $\lambda \in \tilde{\mathbb{Y}}_n$ и $\mu \in \tilde{\mathbb{Y}}_{n+1}$, если или $\lambda = \mu$, или μ получается из λ добавлением одной клетки.

Это приводит нас к следующему определению: *медленным графом $\tilde{\Gamma}$* , построенным по графу ветвления Γ , называется следующий граф:

- (1) вершины n -го этажа графа $\tilde{\Gamma}$ есть объединения вершин всех этажей исходного графа Γ с номерами не более n , $\tilde{\Gamma}_n = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$;
- (2) ребро соединяет вершины $\lambda \in \tilde{\Gamma}_n$ и $\mu \in \tilde{\Gamma}_{n+1}$, если или $\lambda = \mu$, или вершина μ соединена ребром с вершиной λ в исходном графе.

Напомним, что графом Паскаля $\mathbb{P}$ называется следующий граф:

- (1) множество $\mathbb{P}_n$ вершин n -го этажа есть множество пар целых чисел (n, k) , $0 \leq k \leq n$;
- (2) ребро соединяет вершины $(n, k) \in \mathbb{P}_n$ и $(n + 1, l) \in \mathbb{P}_{n+1}$, если $l = k$ или $l = k + 1$.

Заметим, что если в качестве исходного графа Γ взять цепь (граф, каждый этаж которого состоит всего из одной вершины), то соответствующим медленным графом $\tilde{\Gamma}$ будет граф $\mathbb{P}$. По аналогии с графом Паскаля мы будем нумеровать вершины n -го этажа $\tilde{\Gamma}_n$ медленного графа парами (n, λ) , где $\lambda \in \Gamma_i$, $i \leq n$.

Замечание 2.2. Отметим, что если мы возьмем в качестве исходного графа граф Паскаля, $G = \mathbb{P}$, то медленным графом $\tilde{G}$ будет трехмерный аналог графа Паскаля. Для трехмерного графа Паскаля медленным графом будет четырехмерный граф Паскаля и т.д. Определение многомерных аналогов графа Паскаля и описание следов соответствующих алгебр см., например, в [6].

Замечание 2.3. Для множества путей на графе ветвления $\tilde{Y}$ существует биекция со случайными блужданиями на графе Юнга следующего вида: в каждый момент времени разрешено или остаться в прежней вершине, или допустимым образом спуститься на этаж ниже. Исходя из этого описания, графы, подобные $\tilde{Y}$, названы медленными.

Замечание 2.4. В работе [7] изучалась теория представлений бесконечной алгебры Брауэра. Как и в предыдущем замечании, можно построить биекцию между путями в графе ветвления алгебры Брауэра и случайными блужданиями по графу Юнга похожего вида: начиная с пустой диаграммы в графе Юнга, на каждом следующем шаге можно перейти из текущей вершины либо в вершину следующего этажа (соединенную ребром с текущей), либо в вершину предыдущего этажа (также соединенную ребром с текущей).

2.2. Сведения из теории локально полупростых алгебр. Обозначим через $T(\Gamma)$ пространство путей графа Γ . На множестве $T(\Gamma)$ имеется «хвостовое» отношение эквивалентности (см. [4]): пути $x, y \in T(\Gamma)$ эквивалентны, $x \sim y$, если они совпадают, начиная с некоторого места. Разбиение на классы эквивалентности будем обозначать через $\xi = \xi_\Gamma$. Также для каждого $k \in \mathbb{N} \cup 0$ и каждого пути s длины k , $s = (s_0, s_1, \dots, s_k)$, обозначим через $F_s \subset T(\Gamma)$ цилиндр $F_s = \{t \in T \mid t_i = s_i \text{ при } 0 \leq i \leq k\}$.

Для $x, y \in \Gamma$ обозначим через $\dim(x; y)$ число путей, ведущих из вершины x в вершину y . Через $\dim(y) = \dim(\emptyset; y)$ обозначим число всех путей в вершину y . Через $\mathcal{E}(\Gamma)$ обозначим множество эргодических центральных мер на $T(\Gamma)$. Для $\mu \in \mathcal{E}(\Gamma)$ через $\mu(y)$ обозначим меру множества всех путей, проходящих через вершину y , т. е. суммарную меру всех цилиндров F_s , $s = (s_0, s_1, \dots, s_{|y|})$, $s_{|y|} = y$.

Мы будем использовать следующее описание характеров локально полупростой алгебры и центральных мер на ее графе ветвления (эргодический метод).

Теорема 2.5 [4]. Для любой центральной эргодической меры μ множество путей $s = (s_0, s_1, \dots, s_f, \dots)$, таких, что для всех вершин y

$$\mu(y) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\dim(y) \cdot \dim(y; s_f)}{\dim s_f},$$

имеет полную меру.

Теорема 2.6 [4]. Для любого характера ϕ алгебры $A = C^*(\bigcup_{f=0}^{\infty} A_f)$ существует путь $\{\lambda_f\}_{f=0}^{\infty}$ в диаграмме Браттели, такой, что

$$\phi(a) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\chi_{\lambda_f}(a)}{\dim \lambda_f}$$

для всех $a \in A$. Здесь χ_{λ_f} — характер представления λ_f алгебры A_f , $\dim \lambda_f$ — размерность представления.

2.3. Описание центральных мер на медленных графах. Ключевым свойством произвольного медленного графа $\tilde{\Gamma}$ является возможность записать пространство путей $T(\tilde{\Gamma})$ как прямое произведение пространств путей $T(\Gamma)$ и $T(\mathbb{P})$. То же верно для множества путей между любыми двумя вершинами. Более того, разбиение $\xi_{\tilde{\Gamma}}$ и центральные эргодические меры на $T(\tilde{\Gamma})$ также могут быть записаны в виде соответствующих произведений.

Лемма 2.7. Пусть Γ — граф некоторой локально полупростой алгебры, $\tilde{\Gamma}$ — соответствующий медленный граф. Тогда

1. $T(\tilde{\Gamma}) = T(\Gamma) \times T(\mathbb{P})$. Более того, число путей между любыми двумя вершинами медленного графа $\tilde{\Gamma}$ равно произведению числа путей между соответствующими вершинами исходного графа Γ и числа путей между соответствующими вершинами графа Паскаля $\mathbb{P}$:

$$\dim_{\tilde{\Gamma}}((n_1, \lambda_1); (n_2, \lambda_2)) = \dim_{\Gamma}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \dim_{\mathbb{P}}((n_1, |\lambda_1|); (n_2, |\lambda_2|)). \quad (1)$$

2. Пусть $s_{\tilde{\Gamma}}, t_{\tilde{\Gamma}} \in T(\tilde{\Gamma})$, $s_{\Gamma}, t_{\Gamma} \in T(\Gamma)$, $s_{\mathbb{P}}, t_{\mathbb{P}} \in T(\mathbb{P})$ и $s_{\tilde{\Gamma}}$ соответствует паре $(s_{\Gamma}, s_{\mathbb{P}})$, $t_{\tilde{\Gamma}}$ соответствует паре $(t_{\Gamma}, t_{\mathbb{P}})$. Тогда $s_{\tilde{\Gamma}} \sim t_{\tilde{\Gamma}}$ (относительно $\xi_{\tilde{\Gamma}}$) в том и только том случае, когда $s_{\Gamma} \sim t_{\Gamma}$ (относительно ξ_{Γ}) и $s_{\mathbb{P}} \sim t_{\mathbb{P}}$ (относительно $\xi_{\mathbb{P}}$).

Доказательство. 1. Каждому пути в графе $\tilde{\Gamma}$ соответствует единственная строго возрастающая последовательность вершин исходного графа Γ . Кроме того, каждому пути $(i, \lambda_i)_{i=n_1}^{n_2}$ в графе $\tilde{\Gamma}$ можно сопоставить путь $(i, |\lambda_i|)_{i=n_1}^{n_2}$ в графе Паскаля. Легко понять, что по построенной паре путей исходный путь восстанавливается однозначно, откуда следует, что $T(\tilde{\Gamma}) = T(\Gamma) \times T(\mathbb{P})$.

Заметим, что построенное отображение задает биекцию между путями из вершины (n_1, λ_1) в вершину (n_2, λ_2) в графе $\tilde{\Gamma}$ и парами путей — между соответствующими вершинами исходного графа Γ и между соответствующими вершинами графа Паскаля $\mathbb{P}$, что доказывает формулу (1).

2. Биекция в доказательстве п. 1 строится таким образом, что для путей $t_{\tilde{\Gamma}} = (t_{\Gamma}, t_{\mathbb{P}})$ «хвост» пути $t_{\tilde{\Gamma}}$ зависит только от «хвостов» путей t_{Γ} и $t_{\mathbb{P}}$, и наоборот. $\square$

Теорема 2.8 (описание центральных мер). Существует естественная биекция $\mathcal{E}(\tilde{\Gamma}) \cong \mathcal{E}(\Gamma) \times \mathcal{E}(\mathbb{P})$. Любая центральная эргодическая мера $M_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ есть произведение центральных эргодических мер $M_{\Gamma} \in \mathcal{E}(\Gamma)$ и $M_{\mathbb{P}} \in \mathcal{E}(\mathbb{P})$, а именно, $M_{\tilde{\Gamma}}(F_{(n, \lambda)}) = M_{\Gamma}(F_{\lambda}) \cdot M_{\mathbb{P}}(F_{(n, |\lambda|)})$ для любого цилиндра $F_{(n, \lambda)}$.

Доказательство. Для центральной эргодической меры $M_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ в соответствии с разложением $T(\tilde{\Gamma}) = T(\Gamma) \times T(\mathbb{P})$ рассмотрим проекции $M_{\Gamma} \in \mathcal{E}(\Gamma)$ и $M_{\mathbb{P}} \in \mathcal{E}(\mathbb{P})$, задаваемые следующим образом:

$$M_{\Gamma}(F_{\lambda}) = \sum_{n \geq |\lambda|} M_{\tilde{\Gamma}}(F_{(n, \lambda)}), \quad M_{\mathbb{P}}(F_{(n, k)}) = \sum_{|\lambda|=k} M_{\tilde{\Gamma}}(F_{(n, \lambda)}).$$

Меры M_{Γ} и $M_{\mathbb{P}}$ центральны в силу центральности меры $M_{\tilde{\Gamma}}$.

Далее, согласно формуле (1) из леммы 2.7 и теореме 2.5,

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\Gamma}}(F_{(n, \lambda)}) &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\dim((n, \lambda_n); (f, \lambda_f))}{\dim(f, \lambda_f)} \\ &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\dim_{\mathbb{P}}((n, |\lambda_n|); (f, |\lambda_f|))}{\dim_{\mathbb{P}}(f, |\lambda_f|)} \cdot \frac{\dim_{\Gamma}(\lambda_n; \lambda_f)}{\dim_{\Gamma}(\lambda_f)} \\ &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\dim_{\mathbb{P}}((n, |\lambda_n|); (f, |\lambda_f|))}{\dim_{\mathbb{P}}(f, |\lambda_f|)} \cdot \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\dim_{\Gamma}(\lambda_n; \lambda_f)}{\dim_{\Gamma}(\lambda_f)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пределы в правой части равенства (2) существуют и равны $M_\Gamma(F_\lambda)$ и $M_\mathbb{P}(F_{(n,k)})$, что доказывает требуемую формулу для $M_{\tilde{\Gamma}}$. Эргодичность мер M_Γ и $M_\mathbb{P}$ следует из эргодичности меры $M_{\tilde{\Gamma}}$.

Обратно, произведение в указанном смысле центральных эргодических мер $M_\Gamma \in \mathcal{E}(\Gamma)$ и $M_\mathbb{P} \in \mathcal{E}(\mathbb{P})$ дает центральную эргодическую меру $M_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$. Центральность следует из леммы 2.7, эргодичность — из равенства (2). $\square$

Напомним (см., например, [6]), что для графа Паскаля $\mathbb{P}$ существование пределов в теореме 2.5 равносильно тому, что для пути

$$((0, k_0), (1, k_1), \dots, (f, k_f), \dots)$$

существует предел

$$\lim_{f \rightarrow \infty} k_f / f = \delta, \quad \delta \in [0; 1], \quad (3)$$

и каждому $\delta \in [0; 1]$ отвечает единственная центральная мера $M_\mathbb{P} = M_\mathbb{P}^\delta$.

Следствие 2.9. *Любая мера $M_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ параметризуется парой (δ, M_Γ) , $\delta \in [0; 1]$, $M_\Gamma \in \mathcal{E}(\Gamma)$.*

Следствие 2.10. *Мера $M_{\tilde{\Gamma}} = (\delta, M_\Gamma)$ на $T(\tilde{\Gamma})$ сосредоточена на путях, для которых соответствующие пути в графе Γ принадлежат носителю меры M_Γ и, кроме того, существует предел (3).*

В частности, рассмотрим произвольную центральную эргодическую меру $M_{\tilde{\mathbb{Y}}}$ на графе $\mathbb{Y}$, отвечающую параметрам $\alpha = \{\alpha_i\}$, $\beta = \{\beta_i\}$, γ . Тогда мера $M_{\tilde{\mathbb{Y}}} = (\delta, M_{\mathbb{Y}})$ на $T(\tilde{\mathbb{Y}})$ будет сосредоточена на путях вида $\{(f, \lambda_f)\}$, для которых соответствующие пределы для последовательности $\{\lambda_f\}$ равны $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ и, кроме того, существует предел $\lim_{f \rightarrow \infty} |\lambda_f| / f = \delta$.

2.4. Формула для характеров бесконечной симметрической группы. Приведенная выше биекция между множествами центральных мер на пространствах путей графа Γ и медленного графа $\tilde{\Gamma}$ имеет место для произвольного исходного градуированного графа Γ . Эта биекция переносится на множества характеров алгебр, отвечающих этим графам (см. следствие 2.11 ниже) в силу соответствия между центральными мерами и характерами, однако сами явные формулы для характеров уже существенно зависят от графов и алгебр и не имеют универсального смысла. Ниже мы доказываем формулу, выражающую характер алгебры $\mathbb{C}[R_\infty]$ через соответствующий характер алгебры $\mathbb{C}[S_\infty]$. В этом разделе под характером мы всегда понимаем неразложимый характер.

Следствие 2.11. *Описанная выше параметризация центральных мер задает биекцию, при которой каждой паре $(\delta, \chi_{\alpha, \beta, \gamma}^{S_\infty})$, где $\delta \in [0, 1]$ и $\chi_{\alpha, \beta, \gamma}^{S_\infty}$ — характер алгебры $\mathbb{C}[S_\infty]$, отвечает некоторый характер $\chi_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^{R_\infty}$ алгебры $\mathbb{C}[R_\infty]$.*

Для упрощения обозначений ниже мы часто опускаем верхние индексы и параметр γ (который выражается через α и β), полагая

$$\chi_{\alpha, \beta} \equiv \chi_{\alpha, \beta, \gamma}^{S_\infty}, \quad \chi_{\alpha, \beta, \delta} \equiv \chi_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^{R_\infty}.$$

Сопряжение элемента $\sigma \in R_n$ элементом симметрической группы не меняет значения характера, поэтому достаточно рассмотреть приведенные элементы $\sigma^\circ \in R_n$, для которых все неподвижные точки находятся в конце: для любого

элемента $\sigma \in R_n$ существуют $g \in S_n$, $n(\sigma) \in \mathbb{N} \cup 0$, такие, что $\sigma^\circ = g\sigma g^{-1}$, причем $\sigma^\circ(i) \neq i$ при $i < n(\sigma)$ и $\sigma^\circ(i) = i$ при $i \geq n(\sigma)$. По определению вложения $R_n \subset R_{n+1}$ мы можем считать, что $\sigma^\circ \in R_{n(\sigma)}$. Порядок $n(\sigma)$ элемента σ° однозначно определяется элементом σ .

Введем множество $M_k(\sigma) \subset S_n$, элементы которого будем параметризовать всеми k -элементными подмножествами $K \subset \{1, \dots, n\}$, отображаемыми элементом σ на себя: каждому такому подмножеству сопоставим биекцию $\tilde{\sigma} \in S_n$, совпадающую с σ на K и тождественную в остальных точках.

Заметим, что для каждого элемента полугруппы R_n существует максимальное (возможно, пустое) подмножество множества $\{1, \dots, n\}$, взаимно однозначно отображаемое этим элементом на себя. Сужение элемента на это подмножество мы будем называть *обратимой частью* исходного элемента. Обратимую часть любого элемента $\sigma \in R_n$ можно рассматривать как элемент некоторой симметрической группы S_r , $r \leq n$, и, следовательно, можно записать как произведение непересекающихся циклов. Множество $M_k(\sigma)$ также может быть параметризовано множеством всех поднаборов циклов суммарной длины k из циклического разложения обратимой части элемента σ .

В следующей теореме значение неразложимого характера бесконечной симметрической полугруппы на элементе $\sigma \in R_n$ представляется в виде линейной комбинации значений соответствующего характера Тома на каждом из элементов дизъюнктного объединения $\bigsqcup_k M_k(\sigma)$ с некоторыми коэффициентами, зависящими только от параметра δ .

Теорема 2.12 (формула для характеров). Пусть $\chi_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^{R_\infty} \equiv \chi_{\alpha, \beta, \delta}$ — неразложимый характер алгебры $\mathbb{C}[R_\infty]$, $\chi_{\alpha, \gamma, \beta}^{S_\infty} \equiv \chi_{\alpha, \beta}$ — соответствующий неразложимый характер алгебры $\mathbb{C}[S_\infty]$ и $\sigma \in R_\infty$ — приведенный элемент. Тогда

$$\chi_{\alpha, \beta, \delta}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n\sigma} \left(\delta^{n(\sigma)-k} (1-\delta)^k \cdot \sum_{\tilde{\sigma} \in M_k(\sigma)} \chi_{\alpha, \beta}(\tilde{\sigma}) \right).$$

Доказательство. Согласно теореме 2.6, существует путь $\{(f, \lambda_f)\}_{f=0}^\infty$, для которого

$$\chi_{\alpha, \beta, \delta}(\sigma) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\chi_{(f, \lambda_f)}^*(\sigma)}{\dim(f, \lambda_f)}.$$

Напомним, что элемент $\sigma \in R_n$ рассматривается как элемент полугруппы R_f , тождественный на подмножестве $\{n+1, \dots, f\}$. По теореме 1.5 для вычисления характера $\chi_{(f, \lambda_f)}^*(\sigma)$ достаточно описать неподвижные под действием элемента $\sigma \in R_f$ подмножества множества $\{1, \dots, f\}$ размера $|\lambda_f|$. Для полного описания таких подмножеств достаточно каждому неподвижному подмножеству размера k множества $\{1, \dots, n\}$ сопоставить все возможные подмножества $|\lambda_f| - k$ неподвижных точек из множества $\{n+1, \dots, f\}$. Таким образом,

$$\chi_{(f, \lambda_f)}^*(\sigma) = \sum_k \left(\binom{f-n}{|\lambda_f| - k} \cdot \sum_{\tilde{\sigma} \in M_k(\sigma)} \chi_{\lambda_f}(\tilde{\sigma}) \right).$$

В силу п. 1 леммы 2.7

$$\begin{aligned}\chi_{\alpha,\beta,\delta}(\sigma) &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\sum_k \left(\binom{f-n}{|\lambda_f|-k} \cdot \sum_{\tilde{\sigma}} \chi_{\lambda_f}(\tilde{\sigma}) \right)}{\dim(f, |\lambda_f|) \cdot \dim(\lambda_f)} \\ &= \sum_k \left(\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\binom{f-n}{|\lambda_f|-k}}{\dim(f, |\lambda_f|)} \cdot \sum_{\tilde{\sigma}} \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\chi_{\lambda_f}(\tilde{\sigma})}{\dim(\lambda_f)} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Согласно следствию 2.10 и теореме 2.6, примененной к бесконечной симметрической группе S_∞ , каждое из слагаемых в правом сомножителе правой части выражения (4) стремится к соответствующему значению характера $\chi_{\alpha,\beta}$. Кроме того, согласно следствию 2.10, существует предел $\lim |\lambda_f|/f = \delta$, откуда следует, что

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\binom{f-n}{|\lambda_f|-k}}{\dim(f, |\lambda_f|)} = \delta^{n-k} (1-\delta)^k,$$

и это завершает доказательство. $\square$

Следствие 2.13. Для произвольного элемента $\sigma \in R_n \subset R_\infty$

$$\chi_{\alpha,\beta,\delta}(\sigma) = \sum_{k=0}^n \left(\delta^{n-k} (1-\delta)^k \cdot \sum_{\tilde{\sigma} \in M_k(\sigma)} \chi_{\alpha,\beta}(\tilde{\sigma}) \right).$$

Следствие 2.14. Характер $\chi_{\alpha,\beta,\delta}$ алгебры R_∞ , суженный на S_∞ , есть $\chi_{\alpha',\beta'}$, где $\alpha'_1 = \delta$, $\alpha'_i = (1-\delta)\alpha_{i-1}$ при $i > 1$ и $\beta' = (1-\delta)\beta$.

Доказательство. Мы проверим утверждение для случая $\beta = 0$. Пусть $\alpha'_1 = \delta$, $\alpha'_i = (1-\delta)\alpha_{i-1}$ при $i > 1$, и пусть $\sigma \in S_n$. Тогда

$$\chi_{\alpha',0}^{S_\infty}(\sigma) = \prod_{\gamma} \left((1-\delta)^{k_\gamma} \cdot \sum_i \alpha_i^{k_\gamma} + \delta^{k_\gamma} \right),$$

где произведение берется по всем минимальным циклам γ в циклическом разложении элемента σ и k_γ — длины этих циклов. Раскрывая произведение, получим

$$\chi_{\alpha',0}^{S_\infty}(\sigma) = \sum_k \sum_{\tilde{\sigma} \in M_k(\sigma)} \left((1-\delta)^k \delta^{n-k} \cdot \prod_{\gamma} \left(\sum_i \alpha_i^{k_\gamma} \right) \right),$$

где внутреннее произведение берется по всем минимальным циклам γ поднабора $\tilde{\sigma}$. Записывая последнее равенство в виде

$$\chi_{\alpha',0}^{S_\infty}(\sigma) = \sum_k \left(\delta^{n-k} (1-\delta)^k \cdot \sum_{\tilde{\sigma} \in M_k(\sigma)} \chi_{\alpha,0}^{S_\infty}(\tilde{\sigma}) \right) = \chi_{\alpha',0,\delta}^{R_\infty}(\sigma),$$

получаем искомое утверждение. $\square$

Замечание 2.15. В предыдущем следствии параметры α и β не равноправны, несмотря на то что мы наблюдаем симметрию в графе $\tilde{Y}$. Это связано с тем, что при вложении группы S_n в полугруппу R_n ограничение неприводимых представлений полугруппы R_n приводит к представлению, индуцированному с

представления подгруппы $S_r \times S_{n-r} \subset S_n$, единичного на втором сомножителе, см. замечание 1.3. Поэтому операция ограничения представления не коммутирует с инволюцией (см. замечание 1.4), что нарушает симметрию между параметрами α и β .

2.5. Реализация представлений. Мы остановимся на случае $\sum_i \alpha_i = 1$, т.е. все β_i равны 0. Рассмотрим меру на множестве $\mathbb{N}$ вида $\mu_\alpha(i) = \alpha_i$, множество последовательностей $\mathcal{X} = \prod \mathbb{N}$ с мерой $m_\alpha = \prod \mu_\alpha$ и множество $\widetilde{\mathcal{X}}$ пар последовательностей, совпадающих с некоторого места. В пространстве $L^2(\widetilde{\mathcal{X}}, m_\alpha)$ может быть реализовано представление симметрической группы S_∞ , отвечающее параметрам $(\alpha, 0)$, см. [5], [21].

Теорема 2.16. *Реализация в пространстве функций $L^2(\widetilde{\mathcal{X}}, m_{\alpha'})$ представления группы S_∞ , отвечающего параметрам $(\alpha', 0)$, где α' задан в следствии 2.14, может быть продолжена до реализации представления полугруппы R_∞ , отвечающего параметрам $(\alpha, 0, \delta)$.*

Доказательство. Зададим действие проектора p_1 из теоремы 1.6 следующим образом: любую последовательность $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \mathcal{X}$ он переводит в последовательность $(1, a_2, a_3, \dots) \in \mathcal{X}$. Соотношения теоремы 1.6 очевидным образом выполняются.

Таким образом, нам достаточно проверить, что введение дополнительного проектора не расширяет пространство представления. Но, как показано в работе [3], пространство факторпредставления симметрической группы S_∞ совпадает со всем пространством $L^2(\widetilde{\mathcal{X}}, m_{\alpha'})$, что завершает доказательство. $\square$

Следствие 2.17. *В терминах приведенной реализации можно дать короткую формулу для характеров как меры множества неподвижных точек аналогично формуле для характеров симметрической группы (ср. [5]), а именно*

$$\chi_{\alpha, 0, \delta}(\sigma) = m_{\alpha'}(\{x : \sigma(x) = x\}),$$

где α' задан в следствии 2.14. См. также [3].

§3. Дополнение. Общие сведения о конечных инверсных полугруппах

В этом параграфе мы преимущественно следуем монографии [9] и статье [2].

3.1. Определение инверсной полугруппы.

Теорема 3.1. *Следующие три условия для полугруппы S равносильны:*

- (1) для любого $a \in S$ существует $x \in S$, такой, что $axa = a$, и любые два идемпотента полугруппы S коммутируют;
- (2) каждый главный левый и каждый главный правый идеал полугруппы S порождается единственным идемпотентом;
- (3) для любого $a \in S$ существует единственный $x \in S$, такой, что $axa = a$ и $axx = x$.

Полугруппа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1, называется *инверсной полугруппой*. Элементы a и x из п. (1) теоремы называются *инверсными* друг к другу, иногда используется обозначение $x = a^{-1}$. Отметим, что $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ для любых $a, b \in S$.

Докажем, что симметрическая инверсная полугруппа является инверсной. Для каждого частичного отображения $\sigma \in R_n$, действующего из некоторого подмножества $X \subset \{1, \dots, n\}$ в $Y \subset \{1, \dots, n\}$, построим отображение σ^{-1} из Y в X , обратное в обычном смысле слова, т. е. для $y \in Y$ и $x \in X$ положим $\sigma^{-1}(y) = x$, если $\sigma(x) = y$. Элементы σ и σ^{-1} , очевидно, инверсны друг к другу. Кроме того, идемпотентами симметрической инверсной полугруппы являются те и только те отображения, которые переводят в себя некоторое подмножество $X \subset \{1, \dots, n\}$ и не определены на $\{1, \dots, n\} \setminus X$. Следовательно, любые два идемпотента коммутируют, и по теореме 3.1 полугруппа является инверсной.

3.2. Аналог теоремы Кэли. Вагнер [1] и Престон [16] доказали для инверсных полугрупп аналог теоремы Кэли для групп.

Теорема 3.2. *Произвольная инверсная полугруппа S изоморфна инверсной подполугруппе симметрической инверсной полугруппы всех взаимно однозначных частичных отображений множества S .*

Доказательство намного труднее, чем для группового аналога, и мы его не приводим (см. [9]). Отметим, что теорема справедлива как для конечных, так и для бесконечных инверсных полугрупп.

3.3. Полупростота полугрупповой алгебры. Для произвольной конечной полугруппы S и поля F можно рассмотреть полугрупповую алгебру $F[S]$ над этим полем. Базисом в алгебре $F[S]$ являются элементы полугруппы S , закон умножения базисных элементов совпадает с законом умножения элементов полугруппы. Необходимые и достаточные условия полупростоты алгебры $F[S]$ конечной инверсной полугруппы S были независимо получены Манном [14] и Оганесяном [10].

Теорема 3.3. *Полугрупповая алгебра $F[S]$ конечной инверсной полугруппы S над полем F полупроста тогда и только тогда, когда характеристика поля равна нулю или является простым числом, не делящим порядок никакой подгруппы из S .*

3.4. Инволютивные биалгебры и полугрупповые алгебры инверсной полугруппы. Биалгеброй (см. [8]) мы называем векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, в котором заданы согласованные структуры ассоциативной алгебры с единицей и коассоциативной алгебры с коединицей. А именно, должны удовлетворяться следующие эквивалентные условия:

- (1) коумножение и коединица являются гомоморфизмами соответствующих алгебр;
- (2) умножение и единица являются гомоморфизмами соответствующих коалгебр.

Введем также понятие *ослабленной биалгебры* для случая, когда выполняется только условие гомоморфности умножения и коумножения.

Групповая алгебра конечной группы со структурой свертки и диагональным коумножением является кокоммутативной биалгеброй (и даже алгеброй Хопфа). Хорошо известно (см. [8]), что полугрупповая алгебра любой конечной полугруппы с единицей (моноида) есть также кокоммутативная биалгебра с естественным определением операций.

Инволюцией алгебры называется антилинейный антиавтоморфизм второго порядка этой алгебры, антилинейный антиавтоморфизм второго порядка коалгебры называется коинволюцией. Биалгебра, снабженная инволюцией и коинволюцией, называется *инволютивной биалгеброй* или биалгеброй с инволюцией, если умножение коммутирует с коинволюцией, а коумножение — с инволюцией.

В [2] показано, что класс конечных инверсных полугрупп порождает в точности класс инволютивных полупростых биалгебр.

Теорема 3.4. *Полугрупповая алгебра $\mathbb{C}[S]$ конечной инверсной полугруппы S есть полупростая кокоммутативная инволютивная биалгебра. Аналогично, двойственная полугрупповая алгебра конечной инверсной полугруппы с единицей является коммутативной инволютивной биалгеброй. Обратно, всякая конечномерная полупростая кокоммутативная (в двойственном варианте — коммутативная) инволютивная биалгебра изоморфна (как инволютивная биалгебра) полугрупповой алгебре (соответственно двойственной полугрупповой алгебре) конечной инверсной полугруппы с единицей.*

Для инверсных полугрупп без единицы полугрупповая биалгебра является ослабленной биалгеброй (коединица не задает гомоморфизм).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. В. Вагнер, *Обобщенные группы*, Докл. АН СССР, **84** (1952), 24–43.
- [2] А. М. Вершик, *Двойственность Крейна, позитивные 2-алгебры и дилатация коумножений*, Функц. анализ и его прил., **41:2** (2007), 24–43.
- [3] А. М. Вершик, *Несвободные действия групп и теория характеров*, готовится к печати.
- [4] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы*, Функц. анализ и его прил., **15:4** (1981), 15–27.
- [5] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы*, Докл. АН СССР, **257:5** (1981), 1037–1040.
- [6] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 -функтор*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 26, ВИНТИ, М., 1985, 3–56.
- [7] А. М. Вершик, П. П. Никитин, *Следы на бесконечных алгебрах Брауэра*, Функц. анализ и его прил., **40:3** (2006), 3–11.
- [8] К. Кассель, *Квантовые группы*, Фазис, М., 1999.
- [9] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Мир, М., 1972.
- [10] В. А. Оганесян, *О полупростоте системной алгебры*, Докл. АН Арм. ССР, **21** (1955), 145–147.
- [11] Л. И. Попова, *Определяющие соотношения некоторых подгрупп частичных преобразований конечного множества*, Уч. записки Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **218** (1961), 191–212.
- [12] T. Halverson, *Representations of the q -rook monoid*, J. Algebra, **273:1** (2004), 227–251.
- [13] W. D. Munn, *The characters of the symmetric inverse semigroup*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **53:1** (1957), 13–18.
- [14] W. D. Munn, *On semigroup algebras*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **51:1** (1955), 1–15.
- [15] G. Olshansky, *Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach*, in: Representations of Lie Groups and Lie Algebras, Académiai Kiadó, Budapest, 1985, 181–197.
- [16] G. B. Preston, *Representations of inverse semi-groups*, J. London Math. Soc., **29** (1954), 411–419.

- [17] L. Solomon, *Representations of the rook monoid*, J. Algebra, **256**:2 (2002), 309–342.
- [18] E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe*, Math. Z., **85**:1 (1964), 40–61.
- [19] V. V. Vershinin, *On the inverse braid monoid*, Topology Appl., **156**:6, 1153–1166.
- [20] A. M. Vershik, S. V. Kerov, *The Grothendieck group of the infinite symmetric group and symmetric Functions (with the elements of the theory K_0 -functor of AF-algebras)*, in: Adv. Stud. Contemp. Math., vol. 7, Gordon and Breach, New York, 1990, 39–118.
- [21] A. M. Vershik, N. V. Tsilevich, *On different models of representations of the infinite symmetric group*, Adv. Appl. Math., **37**:4 (2006), 526–540.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
11 октября 2010 г.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: pnikitin0103@yahoo.co.uk