Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Л. Рыбников, О фундаментальной группе дополнения к комплексной конфигурации гиперплоскостей, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 2, 71–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3025>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:04:08

О фундаментальной группе дополнения к комплексной конфигурации гиперплоскостей*

© 2011. Г. Л. РЫБНИКОВ

Светлой памяти И. М. Гельфанда

В работе построены две комбинаторно эквивалентные конфигурации прямых на комплексной проективной плоскости, у которых фундаментальные группы дополнений не изоморфны. В доказательстве используется новый инвариант фундаментальной группы дополнения к конфигурации прямых заданного комбинаторного типа относительно изоморфизмов, индуцирующих канонический изоморфизм первых групп гомологий.

Эта статья является переработанным вариантом препринта [8], вышедшего в 1994 г. и впоследствии неоднократно цитировавшегося разными авторами. Используемый здесь инвариант позднее обсуждался, в частности, в работе [2]. Я благодарен В. А. Васильеву, побудившему меня представить работу к публикации, и С. А. Юзвинскому, давшему мне ряд советов по улучшению текста.

Я благодарен рецензентам, замечания которых позволили мне исправить ряд недочетов первоначального варианта статьи.

§ 1. Введение

Многие топологические свойства комплексной конфигурации гиперплоскостей можно описать в терминах ее комбинаторной структуры (матроида). Например, так обстоят дела для кольца когомологий дополнения к конфигурации [6] и для мальцевского пополнения фундаментальной группы такого дополнения [3]. Однако все известные алгоритмы вычисления самой фундаментальной группы дополнения используют нематроидные данные. (В случае комплексификации вещественной конфигурации ответ может быть дан в терминах ориентированного матроида, что требует больше информации, чем просто размерности всевозможных пересечений гиперплоскостей конфигурации, как для обычного матроида.)

Согласно классической теореме Зарисского, фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbb{CP}^n$ изоморфна фундаментальной группе дополнения к пересечению этой гиперповерхности с общей двумерной плоскостью в этой плоскости. Поэтому в нашем случае достаточно изучить фундаментальные группы дополнений к конфигурациям прямых в $\mathbb{CP}^2$. В настоящей работе мы описываем комбинаторную структуру конфигураций прямых в терминах

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №09-01-12185-офи_м и ВШЭ 09-09-0010 и проекта ТЗ-62.0 «Математические исследования в области маломерной топологии, алгебраической геометрии, теории представлений» ВШЭ.

структуры инцидентности, что по сути эквивалентно использованию матроидного языка, но имеет преимущество большей наглядности.

Цель настоящей работы — построить две комбинаторно эквивалентные конфигурации прямых в $\mathbb{CP}^2$, фундаментальные группы дополнений к которым неизоморфны. Опишем вкратце наш подход.

Пусть X — дополнение к конфигурации прямых $\mathcal{L}$, и пусть C — структура инцидентности, которая описывает комбинаторную структуру конфигурации $\mathcal{L}$. Обозначим через H свободную абелеву группу с базисом, занумерованным прямыми структуры инцидентности C . Первая группа гомологий $H_1(X, \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа с базисом из циклов, обходящих в положительном направлении прямые конфигурации $\mathcal{L}$. Таким образом, она канонически изоморфна группе H . Пусть X' — дополнение к еще одной конфигурации прямых, реализующих ту же структуру C . В силу канонических изоморфизмов $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong H$ и $H_1(X', \mathbb{Z}) \cong H$ мы имеем канонические проекции $\pi_1(X) \rightarrow H$ и $\pi_1(X') \rightarrow H$, ядрами которых являются коммутанты групп $\pi_1(X)$ и $\pi_1(X')$.

Прежде всего, мы получим некоторое необходимое условие для существования изоморфизма $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X')$, согласованного с этими проекциями, т. е. индуцирующего тождественный автоморфизм группы H . Для этого по заданной структуре C мы строим некоторую инвариантную конструкцию, зависящую от группы $\pi_1(X)$, рассматриваемой вместе с проекцией $\pi_1(X) \rightarrow H$. Если эта инвариантная конструкция дает разные результаты для групп $\pi_1(X)$ и $\pi_1(X')$, то изоморфизм $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X')$ рассматриваемого типа существовать не может. Построенный инвариант зависит только от $\pi_1(X)/\gamma_4\pi_1(X)$, где $\gamma_k G$ есть k -й член нижнего центрального ряда группы G .

Далее мы рассматриваем две комплексно-сопряженные реализации структуры инцидентности C_8 , соответствующей матроиду Маклейна [4] (см. также [10]), и показываем, что наш инвариант различает эти реализации. Мы также доказываем, что для структуры инцидентности C_8 группа автоморфизмов группы H , получающихся редукцией из автоморфизмов группы $\pi_1(X)$, изоморфна группе автоморфизмов самой структуры инцидентности. Наконец, мы комбинируем эти результаты, чтобы показать, что структура инцидентности C_{13} , полученная посредством склеивания двух экземпляров структуры Маклейна, имеет по крайней мере две реализации с неизоморфными фундаментальными группами дополнений.

Я глубоко благодарен за обсуждения и советы Т. В. Алексеевской, А. Дрессу, А. Б. Гончарову, С. М. Львовскому, Н. Е. Мневу, Г. А. Носкову, С. Ю. Орекову, Д. Стоуну, Г. Циглеру и особенно И. М. Гельфанду, без которого эта статья никогда бы не была написана.

§2. Конструкция различающего инварианта

Определение 1. Структурой инцидентности называется тройка $C = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \succ)$, состоящая из множества прямых $\mathcal{L}$, множества точек $\mathcal{P}$ и бинарного соответствия $\succ$, называемого инцидентностью, между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$. При этом требуется выполнение следующих аксиом:

(1) для любых двух различных прямых $l, l' \in \mathcal{L}$ существует единственная точка $p \in \mathcal{P}$, такая, что $l \succ p$ и $l' \succ p$;

(2) любая точка инцидентна по меньшей мере двум прямым.

Если l , l' и p — такие, как в аксиоме (1), то мы пишем $p = l \cap l'$ и называем p точкой пересечения прямых l и l' . Назовем структуру $C = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \succ)$ невырожденной, если $|\mathcal{P}| > 1$, т.е. если не все прямые пересекаются в одной точке¹⁾.

Определение 2. Комплексной реализацией структуры инцидентности $C = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \succ)$ называется инъективное отображение ϕ из $\mathcal{L}$ в множество прямых на $\mathbb{C}P^2$ и из $\mathcal{P}$ в множество точек на $\mathbb{C}P^2$, такое, что $\phi p \in \phi l$ тогда и только тогда, когда $p \prec l$.

Пусть $C = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \succ)$ — конечная невырожденная структура инцидентности. Пронумеруем элементы из $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \{l_0, l_1, \dots, l_n\}$, и назовем l_0 бесконечно удаленной прямой. Положим $\mathcal{P}_0 = \{p \in \mathcal{P} \mid p \not\prec l_0\}$. Опишем в абстрактных терминах предложенное в [1] описание фундаментальной группы дополнения к конфигурации прямых в $\mathbb{C}^2$ в терминах образующих и соотношений (см. также [7]).

Пусть F — свободная группа с образующими $w_1, \dots, w_n$, и пусть $\mathcal{A} = \{(i, p) \in \{1, \dots, n\} \times \mathcal{P}_0 \mid p \prec l_i\}$. Предположим, что для каждой пары $(i, p) \in \mathcal{A}$ выбран элемент $w_i(p) \in F$, сопряженный в F к w_i : $w_i(p) = (g(i, p))^{-1} w_i g(i, p)$ для некоторого $g(i, p) \in F$. Таким образом, элементы $w_i(p)$ задаются некоторым отображением $g: \mathcal{A} \rightarrow F$.

Пусть $p \in \mathcal{P}_0$ и $\{i_1, \dots, i_k\} = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid l_i \succ p\}$, причем $i_1 < \dots < i_k$. Положим $c_s(p) = w_{i_s}(p) w_{i_{s-1}}(p) \cdots w_{i_1}(p) w_{i_k}(p) \cdots w_{i_{s+1}}(p)$ для $s = 1, \dots, k$ и $r(i_s, p) = c_{s-1}(p)^{-1} c_s(p)$ для $s = 1, \dots, k$, где $c_0(p) = c_k(p)$. Легко видеть, что $r(i_s, p) = [w_{i_s}(p), c_s(p)]$ и $\prod_{s=1}^k r(i_s, p) = 1$, поэтому лишь $k-1$ из элементов $r(i_s, p)$ независимы. Рассмотрим для каждого $p \in \mathcal{P}_0$ множество $\{r(i_2, p), \dots, r(i_k, p)\}$ независимых элементов, и пусть $\mathcal{R} = \mathcal{R}(g) = \{r(i, p) \mid l_i \succ p, i \neq \min\{j \mid l_j \succ p\}\}$ — объединение этих множеств. Положим $G = G(\mathcal{R}) = F / \langle \mathcal{R} \rangle$, где $\langle \mathcal{R} \rangle$ — минимальная нормальная подгруппа в F , содержащая $\mathcal{R}$.

Пусть ϕ — комплексная реализация структуры C , и пусть $X = \mathbb{C}P^2 \setminus \bigcup_{l \in \mathcal{L}} \phi l$. Тогда, согласно [1], имеет место изоморфизм $\pi_1(X) \cong G(\mathcal{R}(g))$ для некоторого выбора отображения g . При этом изоморфизме образующая w_i соответствует маленькой петле, обходящей ϕl_i в положительном направлении (прямые в $\mathbb{C}^2$ имеют каноническую коориентацию).

Рассмотрим нижний центральный ряд $(\gamma_k F)$ группы F ($\gamma_1 F = F$, $\gamma_{k+1} F = [F, \gamma_k F]$). Хорошо известно, что $\text{gr}_k F = \gamma_k F / \gamma_{k+1} F$ — свободные абелевы группы конечного ранга. Более того, $\text{gr} F = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \text{gr}_k F$ естественно изоморфна (как градуированная абелева группа) свободной алгебре Ли L над $\mathbb{Z}$ с n образующими $x_1, \dots, x_n$, являющимися образами элементов $w_1, \dots, w_n$ в $F / \gamma_2 F$; $L = \bigoplus_{k=1}^{\infty} L_k$ градуирована степенью мономов (см., например, [5, гл. 5]). При этом изоморфизме лиевский коммутатор в L отвечает групповому коммутатору в F . Всюду далее мы будем отождествлять $\text{gr}_k F$ с L_k . Положим $H = L_1 = F / \gamma_2 F$; это свободная абелева группа с базисом $x_1, \dots, x_n$. В случае когда $G = \pi_1(X)$ для некоторой комплексной реализации структуры C , мы имеем $H \cong H_1(X, \mathbb{Z})$, причем (x_i) — это базис, двойственный к базису в $H^1(X, \mathbb{Z})$, состоящему из стандартных образующих кольца Орлика–Соломона [6].

¹⁾Понятие невырожденной структуры инцидентности по существу эквивалентно понятию простого матроида ранга 3 на множестве прямых.

Группа $\langle \mathcal{R} \rangle$ порождена элементами $r(i, p)$ (являющимися коммутаторами), а также элементами вида $[w_{i_1}^{\pm 1}, [w_{i_2}^{\pm 1}, \dots, [w_{i_k}^{\pm 1}, r(i, P)] \dots]]$ (здесь квадратные скобки обозначают групповой коммутатор). Поэтому $\langle \mathcal{R} \rangle \subset \gamma_2 F$. Легко видеть, что образы элементов из $\mathcal{R}$ в L_2 имеют вид $\bar{r}(i, p) = [x_i, \sum_{j: p \prec l_j} x_j]$ (здесь квадратные скобки обозначают лиевский коммутатор); таким образом, они зависят только от C .

В дальнейшем нам понадобится более широкий класс групп G . Пусть теперь $\mathcal{R} = \{r(i, p) \mid (i, p) \in \mathcal{A}, i \neq \min\{j \mid l_j \succ p\}\}$ — множество произвольных элементов из $\gamma_2 F$, удовлетворяющих условию, что образы элементов $r(i, p)$ в L_2 — те же $\bar{r}(i, p)$, что и выше. Назовем такое множество $\mathcal{R}$ *допустимым* для C . Как и выше, полагаем $G = G(\mathcal{R}) = F/\langle \mathcal{R} \rangle$. Поскольку $\langle \mathcal{R} \rangle \subset \gamma_2 F$, каноническая проекция $F \rightarrow H$ пропускается через однозначно определенный сюръективный гомоморфизм $G \rightarrow H$. Ядро этого гомоморфизма, очевидно, совпадает с коммутантом группы G . Нас будут интересовать условия, при которых между двумя группами вида $G(\mathcal{R})$ (с различными допустимыми $\mathcal{R}$) существует изоморфизм, согласованный с определенными выше проекциями $G(\mathcal{R}) \rightarrow H$.

Нижний центральный ряд группы F задает на подгруппе $\langle \mathcal{R} \rangle \subset F$ фильтрацию $(\langle \mathcal{R} \rangle \cap \gamma_k F)$, а на факторгруппе $G = F/\langle \mathcal{R} \rangle$ — фильтрацию, совпадающую с ее нижним центральным рядом $(\gamma_k G)$. Через $\text{gr}_k \langle \mathcal{R} \rangle$ и $\text{gr}_k G$ мы будем обозначать присоединенные градуированные факторы этих фильтратий. По определению допустимого множества $\mathcal{R}$ абелева группа $R_2 = \text{gr}_2 \langle \mathcal{R} \rangle \subseteq L_2$ порождена элементами $\bar{r}(i, p) = [x_i, \sum_{j: p \prec l_j} x_j]$ и, таким образом, однозначно определяется структурой C . Докажем, что и группа $R_3 = \text{gr}_3 \langle \mathcal{R} \rangle \subseteq L_3$ однозначно определяется структурой C .

Предложение 2.1. *Для любого допустимого множества $\mathcal{R}$ имеет место равенство $R_3 = [H, R_2]$ в алгебре Ли $L = \text{gr } F$.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $\bar{r}(i, p)$ линейно независимы в L_2 . Из элементов вида $[w_j, r(i, P)]$ выберем такие $u_1, \dots, u_m$, чтобы их образы образовывали базис в $[H, R_2]$. Аналогично теореме Ф. Холла о базисе (см. [5, теорема 5.13A]), легко доказать, что любой элемент группы $\langle \mathcal{R} \rangle$ однозначно представляется в виде $\prod_{r \in \mathcal{R}} r^{c_r} \cdot \prod_{i=1}^m u_i^{d_i} \cdot z$, где $c_r, d_i \in \mathbb{Z}$, $z \in \langle \mathcal{R} \rangle \cap \gamma_4 F$ (порядок, в котором элементы $r \in \mathcal{R}$ встречаются в произведении $\prod_{r \in \mathcal{R}} r^{c_r}$, фиксирован заранее). Поскольку образы элементов $r \in \mathcal{R}$ в $\text{gr}_2 \langle \mathcal{R} \rangle$ линейно независимы, любой элемент из $\langle \mathcal{R} \rangle \cap \gamma_3 F$ имеет вид $\prod_{i=1}^m u_i^{d_i} \cdot z$. Отсюда сразу следует, что $R_3 = [H, R_2]$. $\square$

Положим $P_2 = L_2/R_2$ и $P_3 = L_3/R_3$. Если группа G задана образующими и соотношениями как $G(\mathcal{R})$ с некоторым допустимым $\mathcal{R}$, то тем самым задан изоморфизм $G/\gamma_2 G = \text{gr}_1 G \cong H$. Легко видеть, что коль скоро этот изоморфизм задан, изоморфизмы $\gamma_2 G/\gamma_3 G = \text{gr}_2 G \cong P_2$ и $\gamma_3 G/\gamma_4 G = \text{gr}_3 G \cong P_3$ однозначно определены. В этом смысле $\gamma_2 G/\gamma_3 G$ и $\gamma_3 G/\gamma_4 G$ канонически определяются структурой C .

Группа $G/\gamma_3 G$ является расширением группы H (свободной абелевой группы) с помощью тривиального H -модуля P_2 . Такие расширения параметризуются группой $H^2(H, P_2) \cong \text{Hom}(\Lambda^2 H, P_2)$. Но поскольку $\Lambda^2 H \cong L_2$, мы имеем естественную проекцию $\chi_2: \Lambda^2 H \rightarrow P_2$. Легко видеть, что χ_2 — это в точности элемент из $H^2(H, P_2)$, соответствующий групповому расширению

$1 \rightarrow P_2 \rightarrow G/\gamma_3 G \rightarrow H \rightarrow 1$. Поэтому $G/\gamma_3 G$ определяется структурой инцидентности канонически с точностью до автоморфизма, тривиального на H и на P_2 . Группа таких автоморфизмов изоморфна $\text{Hom}(H, P_2)$.

Группа $M = \gamma_2 G/\gamma_4 G$ абелева, но структура H -модуля на ней нетривиальна. Рассуждения, подобные тем, что мы использовали для $G/\gamma_3 G$, показывают, что этот модуль также определяется структурой C канонически с точностью до действия абелевой группы $\text{Hom}(P_2, P_3)$.

Рассмотрим групповое расширение $1 \rightarrow M \rightarrow G/\gamma_4 G \rightarrow H \rightarrow 1$. Оно соответствует некоторому элементу $\chi_3 \in H^2(H, M)$. Из короткой точной последовательности H -модулей $0 \rightarrow P_3 \rightarrow M \rightarrow P_2 \rightarrow 0$ мы получаем длинную точную последовательность

$$\dots \rightarrow H^1(H, P_2) \xrightarrow{\delta} H^2(H, P_3) \xrightarrow{\alpha} H^2(H, M) \xrightarrow{\beta} H^2(H, P_2) \rightarrow \dots$$

Перепишем ее в следующем виде:

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(H, P_2) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(\Lambda^2 H, P_3) \xrightarrow{\alpha} H^2(H, M) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(\Lambda^2 H, P_2) \rightarrow \dots$$

Мы имеем равенство $\beta(\chi_3) = \chi_2$, поэтому χ_3 есть элемент множества $\beta^{-1}(\chi_2)$, которое является главным однородным пространством над абелевой группой $\text{Hom}(\Lambda^2 H, P_3)/\delta \text{Hom}(H, P_2)$.

Напомним, что H -модуль M определяется по C лишь с точностью до действия абелевой группы $\text{Hom}(P_2, P_3)$, поэтому только орбита $\bar{\chi}_3$ элемента χ_3 относительно этого действия имеет инвариантный смысл. Множество орбит $Y = \beta^{-1}(\chi_2)/\text{Hom}(P_2, P_3)$ является главным однородным пространством над группой $T = \text{Hom}(R_2, P_3)/\delta \text{Hom}(H, P_2)$, где δ — это композиция δ с естественной проекцией $\text{Hom}(\Lambda^2 H, P_3) \rightarrow \text{Hom}(R_2, P_3)$. Мы видим, что Y , T и действие T на Y определяются структурой C канонически, так что любой выбор допустимого множества $\mathcal{R}$ задает корректно определенный элемент $\bar{\chi}_3(\mathcal{R}) \in Y$.

Предположим теперь, что заданы два допустимых множества $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. Рассмотрим соответствующие группы $G = G(\mathcal{R})$ и $G' = G(\mathcal{R}')$. Пусть $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \bar{\chi}_3(\mathcal{R}') - \bar{\chi}_3(\mathcal{R}) \in T$. Из определений ясно, что $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}'') = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}') + \kappa(\mathcal{R}', \mathcal{R}'')$ для любых допустимых $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}''$.

Обе группы $G/\gamma_2 G$ и $G'/\gamma_2 G'$ канонически изоморфны H . Поэтому мы имеем канонический изоморфизм $\lambda_1: G/\gamma_2 G \rightarrow G'/\gamma_2 G'$. Как отмечалось выше, изоморфизм $\lambda_2: G/\gamma_3 G \rightarrow G'/\gamma_3 G'$, продолжающий λ_1 , существует всегда, хотя он и не определен канонически.

Теорема 2.2. *Изоморфизм $\lambda_3: G/\gamma_4 G \rightarrow G'/\gamma_4 G'$, продолжающий λ_1 , существует тогда и только тогда, когда $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = 0$ в T .*

Доказательство. Как мы показали, алгебры Ли $\text{gr}(G/\gamma_4 G)$ и $\text{gr}(G'/\gamma_4 G')$ канонически изоморфны и порождаются $G/\gamma_2 G$ и $G'/\gamma_2 G'$ соответственно. Поэтому если λ_3 существует, то $\text{gr } \lambda_3$ определен однозначно и совпадает с каноническим изоморфизмом. Следовательно, $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = 0$.

В другую сторону, если $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = 0$, то расширения $1 \rightarrow M \rightarrow G/\gamma_4 G \rightarrow H \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow M \rightarrow G'/\gamma_4 G' \rightarrow H \rightarrow 1$ отличаются на некоторый автоморфизм H -модуля M ; поэтому после применения этого автоморфизма они становятся эквивалентными. Следовательно, существует изоморфизм λ_3 , продолжающий λ_1 . $\square$

Чтобы использовать инвариант, предоставляемый теоремой 2.2, мы должны еще описать P_2 и P_3 . В общем случае можно сказать следующее.

Отождествим L_2 с $\Lambda^2 H$. Обозначим через (x_i^*) базис в H^* , двойственный к базису (x_i) в H . Тогда $L_2^* = \Lambda^2 H^*$ и $R_2^\perp \subset \Lambda^2 H^*$ порождается следующими элементами: $\omega_{ijk} = (x_i^* - x_j^*) \wedge (x_j^* - x_k^*) = x_i^* \wedge x_j^* + x_j^* \wedge x_k^* + x_k^* \wedge x_i^*$ при $l_i \succ l_j \cap l_k \in \mathcal{P}_0$ и $\omega_{ij} = x_i^* \wedge x_j^*$ при $l_0 \succ l_i \cap l_j$. Легко проверить, что $(R_2^\perp)^\perp = R_2$, поэтому P_2 является свободной абелевой группой и $P_2^* \cong R_2^\perp$. Следовательно, мы можем рассматривать определенные выше формы ω_{ijk} и ω_{ij} как элементы группы P_2^* .

Мы имеем точную последовательность абелевых групп

$$0 \rightarrow \Lambda^3 H \xrightarrow{d} H \otimes L_2 \xrightarrow{c} L_3 \rightarrow 0,$$

где $d(x \wedge y \wedge z) = x \otimes [y, z] + y \otimes [z, x] + z \otimes [x, y]$ и $c(x \otimes f) = [x, f]$. Как мы знаем, $R_3 = [H, R_2]$, поэтому $R_3 = c(H \otimes R_2)$. Из двойственной точной последовательности

$$0 \leftarrow \Lambda^3 H^* \xleftarrow{d^*} H^* \otimes \Lambda^2 H^* \xleftarrow{c^*} L_3^* \leftarrow 0$$

мы видим, что $R_3^\perp = \text{Ker } d^*|_{H^* \otimes R_2^\perp}$. Следовательно, $R_3^\perp$ содержит элементы вида $S_{ijk} = (x_i^* - x_j^*) \otimes \omega_{ijk}$ при $l_i \succ l_j \cap l_k \in \mathcal{P}_0$ и $S_{ij} = x_i^* \otimes \omega_{ij}$ при $l_0 \succ l_i \cap l_j$. Я не утверждаю, что эти элементы порождают $R_3^\perp$ — как мы увидим в следующем параграфе, это не обязательно так, — но я не знаю никакого общего описания остальных элементов из $R_3^\perp$.

Если расшифровать данное выше в гомологических терминах определение $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$, получается следующий явный алгоритм для его вычисления.

Пусть $\mathcal{R} = \{r(i, p) \mid (i, p) \in \mathcal{A}, i \neq \min\{j \mid l_j \succ p\}\}$ и $\mathcal{R}' = \{r'(i, p) \mid (i, p) \in \mathcal{A}, i \neq \min\{j \mid l_j \succ p\}\}$ — произвольные допустимые множества. Множество $\bar{\mathcal{R}} = \{\bar{r}(i, p) \mid (i, p) \in \mathcal{A}, i \neq \min\{j \mid l_j \succ p\}\}$ образует базис в R_2 . Поставим в соответствие каждому элементу $\bar{r}(i, p) \in \bar{\mathcal{R}}$ элемент $t(i, p) = (r'(i, p))^{-1} r(i, p) \in F$. Поскольку $r(i, p), r'(i, p) \in \gamma_2 F$, причем образы их в $\text{gr}_2 F$ совпадают (и равны $\bar{r}(i, p)$), то $t(i, p) \in \gamma_3 F$. Рассмотрим гомоморфизм $R_2 \rightarrow P_3$, определенный на базисе $\bar{\mathcal{R}}$ так: каждый элемент $\bar{r}(i, p)$ переходит в образ элемента $t(i, p)$ в $P_3 = (\text{gr}_3 F)/R_3$. Образ этого гомоморфизма в $T = \text{Hom}(R_2, P_3)/\bar{\delta} \text{Hom}(H, P_2)$ — это и есть $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$.

Далее нам также понадобится явная формула для отображения $\bar{\delta}$:

$$\bar{\delta} f(\bar{r}(i, p)) = \left[f(x_i), \sum_{j: p \prec l_j} x_j \right] + \left[x_i, \sum_{j: p \prec l_j} f(x_j) \right]$$

для любого $f \in \text{Hom}(H, P_2)$.

Посмотрим, как можно описать $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ в случае, когда $\mathcal{R} = \mathcal{R}(g)$ и $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(g')$ для некоторых отображений $g, g': \mathcal{A} \rightarrow F$.

Предложение 2.3. Если $g(i, p) \equiv g'(i, p) \pmod{\gamma_2 F}$ для любых $i = 1, \dots, n$ и $p \prec l_i$, то $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = 0$. Иными словами, $\bar{\chi}_3(\mathcal{R}(g))$ зависит только от $\bar{g}: \mathcal{A} \rightarrow H$.

Доказательство. Действительно, в этом случае $w_i(p) \equiv w'_i(p) \pmod{\gamma_3 F}$ и, следовательно, $r(i, p) \equiv r'(i, p) \pmod{\gamma_4 F}$. Поэтому $(r(i, p))^{-1} r'(i, p) \in \gamma_4 F$ и $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = 0$. $\square$

Рассмотрим абелеву группу $A = H^{\mathcal{A}}$. Для $a \in A$ определим $\tilde{\tau}a \in \text{Hom}(R_2, P_3)$, полагая

$$\tilde{\tau}a(\bar{r}(i, p)) = \left[[x_i, a(i, p)], \sum_{j: p \prec l_j} x_j \right] + \left[x_i, \sum_{j: p \prec l_j} [x_j, a(j, p)] \right] + R_3.$$

Пусть $\tau a = \tilde{\tau}a + \bar{\delta} \text{Hom}(H, P_2)$.

Предложение 2.4. Если $\mathcal{R} = \mathcal{R}(g)$ и $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(g')$, то $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \tau(\bar{g} - \bar{g}')$.

Доказательство следует из приведенного выше алгоритма для вычисления $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$. $\square$

Было бы интересно найти $\text{Ker } \tau$. Вот несколько частичных результатов в этом направлении.

Определим следующие элементы из A : $a_{i,p}^{(0)}$ при $i \in \{1, \dots, n\}$, $p \in \mathcal{P}_0$, $p \prec l_i$; $a_{i,p}^{(1)}$ при $i \in \{1, \dots, n\}$, $p \in \mathcal{P}_0$; $a_{i,p_1,p_2}^{(2)}$ для $i \in \{1, \dots, n\}$, $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_0$, $p_1, p_2 \prec l_i$ (p_1 и p_2 не обязательно различны), с помощью формул

$$a_{i,p}^{(0)}(j, q) = \delta_{i,j} \delta_{p,q} x_i, \quad a_{i,p}^{(1)}(j, q) = \delta_{p,q} x_i, \quad a_{i,p_1,p_2}^{(2)}(j, q) = \delta_{i,j} \delta_{p_1,q} \sum_{k: p_2 \succ l_k} x_k.$$

Обозначим через U порожденную ими подгруппу в A .

Предложение 2.5. $U \subseteq \text{Ker } \tilde{\tau}$.

Доказательство. Утверждение проверяется прямым вычислением. $\square$

Пусть B — подгруппа в A , состоящая из функций, не зависящих от p .

Предложение 2.6. $B \subseteq \tilde{\tau}^{-1}(\bar{\delta} \text{Hom}(H, P_2))$.

Доказательство. Пусть $a \in B$, $a(i, p) = \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j$. Определим элемент $f \in \text{Hom}(H, P_2)$, полагая $f(x_i) = \sum_{j=1}^n k_{ij} [x_i, x_j]$. Тогда $\tilde{\tau}a = \bar{\delta}(f)$. $\square$

Положим $W = A/(U + B)$. Гомоморфизм τ является композицией проекции $\pi: A \rightarrow W$ и некоторого гомоморфизма $\bar{\tau}: W \rightarrow T$. Я не знаю, всегда ли гомоморфизм $\bar{\tau}$ инъективен, но в примере, который будет разобран в следующем параграфе, это так.

§3. Вычисления для структуры Маклейна

Матроид Маклейна ML_8 может быть определен как аффинная плоскость над $\mathbb{F}_3$, из которой выброшен один элемент. Прямые соответствующей структуры инцидентности C_8 занумерованы элементами из $\mathbb{F}_3^2 \setminus \{(0, 0)\}$, причем три прямые в C_8 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда соответствующие элементы лежат на одной аффинной прямой (в смысле $\mathbb{F}_3^2$). Из этого описания видно, что группа автоморфизмов структуры C_8 изоморфна $GL_2(\mathbb{F}_3)$.

Занумеруем прямые структуры C_8 так, чтобы они соответствовали следующим точкам из $\mathbb{F}_3^2$: $l_0 \leftrightarrow (2, 2)$, $l_1 \leftrightarrow (0, 1)$, $l_2 \leftrightarrow (1, 0)$, $l_3 \leftrightarrow (2, 0)$, $l_4 \leftrightarrow (2, 1)$, $l_5 \leftrightarrow (1, 2)$, $l_6 \leftrightarrow (0, 2)$, $l_7 \leftrightarrow (1, 1)$. Тогда точки структуры C_8 имеют вид p_{012} , p_{034} , p_{056} , p_{07} , p_{135} , p_{147} , p_{16} , p_{23} , p_{246} , p_{257} , p_{367} , p_{45} , где $p_{ijk} \prec l_i, l_j, l_k$ и $p_{ij} \prec l_i, l_j$. Таким образом, $\mathcal{P}_0$ состоит из последних 8 из перечисленных выше точек.

Легко проверить, что любая комплексная реализация структуры C_8 проективно эквивалентна реализации ϕ следующего вида:

$$\begin{aligned} \phi l_0 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \mid z_0 = 0\}, \\ \phi l_1 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \mid z_1 = 0\}, \\ \phi l_2 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \mid z_1 = z_0\}, \\ \phi l_3 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \mid z_2 = 0\}, \\ \phi l_4 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \mid z_2 = z_0\}, \\ \phi l_5 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \mid z_2 + \omega z_1 = 0\}, \\ \phi l_6 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \mid z_2 + \omega z_1 = (\omega + 1)z_0\}, \\ \phi l_7 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \mid (\omega + 1)z_1 + z_2 = z_0\}, \end{aligned}$$

где ω — некоторый корень многочлена $x^2 + x + 1$. Точки ϕp для $p \in \mathcal{P}$ определяются как точки пересечения соответствующих прямых.

Обозначим через ϕ^+ (соответственно через ϕ^-) реализацию структуры C_8 , отвечающую корню $\omega = \exp(2\pi i/3)$ (соответственно корню $\omega = \exp(-2\pi i/3)$). Положим $G^+ = \pi_1(X^+)/\gamma_4\pi_1(X^+)$ и $G^- = \pi_1(X^-)/\gamma_4\pi_1(X^-)$.

Теорема 3.1. *Не существует изоморфизма $G^+ \rightarrow G^-$, такого, что индуцированный изоморфизм $H_1(X^+, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X^-, \mathbb{Z})$ переводит элементы канонического базиса группы $H_1(X^+, \mathbb{Z})$ в соответствующие элементы канонического базиса группы $H_1(X^-, \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Пусть $X^\pm = \mathbb{C}P^2 \setminus \bigcup \phi^\pm l$. Применение алгоритма Арволы дает нам следующие наборы определяющих соотношений для $\pi_1(X^\pm)$ (в обоих случаях в свободной группе F с образующими $w_1, \dots, w_7$):

$$\begin{aligned} [w_5, w_3, w_1], \quad [w_7, w_4, w_1], \quad [w_6, w_1], \quad [w_3, w_2], \quad [w_6, w_4, w_2], \\ [w_7, w_5, w_5^{-1}w_2w_5], \quad [w_7, w_6, w_6^{-1}w_3w_6], \quad [w_5, w_3w_6w_4w_6^{-1}w_3^{-1}] \end{aligned}$$

для $\pi_1(X^+)$ и

$$\begin{aligned} [w_5, w_3, w_1], \quad [w_7, w_4, w_1], \quad [w_6, w_1], \quad [w_3, w_5^{-1}w_2w_5], \quad [w_7^{-1}w_6w_7, w_4, w_2], \\ [w_7, w_5, w_5^{-1}w_2w_5], \quad [w_7, w_6, w_6^{-1}w_3w_6], \quad [w_5, w_7w_4w_7^{-1}] \end{aligned}$$

для $\pi_1(X^-)$. Эти наборы соотношений отвечают отображениям $g^\pm: \mathcal{A} \rightarrow F$, все значения которых равны 1, кроме следующих:

$$\begin{aligned} g^+(3, p_{367}) = w_6, \quad g^+(4, p_{45}) = w_6^{-1}w_3^{-1}, \quad g^+(2, p_{257}) = w_5, \quad g^-(3, p_{367}) = w_6, \\ g^-(4, p_{45}) = w_7^{-1}, \quad g^-(2, p_{23}) = w_5, \quad g^-(2, p_{257}) = w_5, \quad g^-(6, p_{246}) = w_7. \end{aligned}$$

Положим $a_0 = \bar{g}^+ - \bar{g}^-: \mathcal{A} \rightarrow H$. Это отображение имеет лишь следующие ненулевые значения:

$$a_0(4, p_{45}) = x_7 - x_6 - x_3, \quad a_0(2, p_{23}) = -x_5, \quad a_0(6, p_{246}) = -x_7.$$

По теореме 2.2 и предложению 2.4 достаточно доказать, что $\tau a_0 \neq 0$ в T .

Лемма 3.2. *Образ отображения a_0 в W ненулевой.*

Доказательство. Вначале мы вычислим $\widetilde{W} = A/U$. Так как любая образующая $a_{i,p}^{(\alpha)}$ группы U обращается в нуль на (j, q) с $q \neq p$, мы можем рассмотреть разложения $A = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_0} A_p$, $U = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_0} U_p$ и $\widetilde{W} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_0} \widetilde{W}_p$, где A_p , U_p и $\widetilde{W}_p$ определены очевидным образом. Для каждого p вычисление легко проделать. Все $\widetilde{W}_p$ оказываются свободными абелевыми группами, поэтому $\widetilde{W}$ — тоже свободная абелева группа, и, таким образом, ее двойственная $\widetilde{W}^*$ естественно изоморфна $U^\perp \subset A^*$.

Пусть $e_{ij}(p) \in A^*$ определяются равенствами $(e_{ij}(p), a) = (x_j^*, a(i, p))$ для $a \in A$, где (x_i^*) — базис в H^* , двойственный каноническому базису (x_i) в H . Базис в $U^\perp$ состоит из следующих элементов:

$$\begin{aligned} I(p_{135}) &= e_{13}(p_{135}) - e_{15}(p_{135}) + e_{35}(p_{135}) - e_{31}(p_{135}) + e_{51}(p_{135}) - e_{53}(p_{135}), \\ I(p_{147}) &= e_{14}(p_{147}) - e_{17}(p_{147}) + e_{47}(p_{147}) - e_{41}(p_{147}) + e_{71}(p_{147}) - e_{74}(p_{147}), \\ I(p_{367}) &= e_{36}(p_{367}) - e_{37}(p_{367}) + e_{67}(p_{367}) - e_{63}(p_{367}) + e_{73}(p_{367}) - e_{76}(p_{367}), \\ I(p_{257}) &= e_{25}(p_{257}) - e_{27}(p_{257}) + e_{57}(p_{257}) - e_{52}(p_{257}) + e_{72}(p_{257}) - e_{75}(p_{257}), \\ I(p_{246}) &= e_{24}(p_{246}) - e_{26}(p_{246}) + e_{46}(p_{246}) - e_{42}(p_{246}) + e_{62}(p_{246}) - e_{64}(p_{246}), \\ J(p_{16}) &= e_{12}(p_{16}) - e_{62}(p_{16}) + e_{64}(p_{16}) - e_{14}(p_{16}) + e_{17}(p_{16}) - e_{67}(p_{16}) \\ &\quad + e_{63}(p_{16}) - e_{13}(p_{16}) + e_{15}(p_{16}) - e_{65}(p_{16}), \\ J(p_{45}) &= e_{43}(p_{45}) - e_{53}(p_{45}) + e_{51}(p_{45}) - e_{41}(p_{45}) + e_{47}(p_{45}) - e_{57}(p_{45}) \\ &\quad + e_{52}(p_{45}) - e_{42}(p_{45}) + e_{46}(p_{45}) - e_{56}(p_{45}), \\ J(p_{23}) &= e_{21}(p_{23}) - e_{31}(p_{23}) + e_{35}(p_{23}) - e_{25}(p_{23}) + e_{27}(p_{23}) - e_{37}(p_{23}) \\ &\quad + e_{36}(p_{23}) - e_{26}(p_{23}) + e_{24}(p_{23}) - e_{34}(p_{23}), \\ K_1(p_{135}) &= e_{12}(p_{135}) + e_{36}(p_{135}) - e_{37}(p_{135}) + e_{57}(p_{135}) - e_{52}(p_{135}) - e_{56}(p_{135}), \\ K_2(p_{135}) &= e_{14}(p_{135}) - e_{17}(p_{135}) + e_{37}(p_{135}) - e_{34}(p_{135}) - e_{36}(p_{135}) + e_{56}(p_{135}), \\ K_1(p_{147}) &= e_{12}(p_{147}) + e_{13}(p_{147}) - e_{15}(p_{147}) - e_{43}(p_{147}) + e_{75}(p_{147}) - e_{72}(p_{147}), \\ K_2(p_{147}) &= e_{12}(p_{147}) + e_{46}(p_{147}) - e_{42}(p_{147}) - e_{43}(p_{147}) + e_{73}(p_{147}) - e_{76}(p_{147}), \\ K_1(p_{367}) &= e_{31}(p_{367}) - e_{34}(p_{367}) - e_{35}(p_{367}) + e_{65}(p_{367}) + e_{74}(p_{367}) - e_{71}(p_{367}), \\ K_2(p_{367}) &= e_{34}(p_{367}) + e_{62}(p_{367}) - e_{64}(p_{367}) - e_{65}(p_{367}) + e_{75}(p_{367}) - e_{72}(p_{367}), \\ K_1(p_{257}) &= e_{21}(p_{257}) + e_{53}(p_{257}) - e_{51}(p_{257}) - e_{56}(p_{257}) + e_{76}(p_{257}) - e_{73}(p_{257}), \\ K_2(p_{257}) &= e_{24}(p_{257}) - e_{21}(p_{257}) - e_{26}(p_{257}) + e_{56}(p_{257}) + e_{71}(p_{257}) - e_{74}(p_{257}), \\ K_1(p_{246}) &= e_{21}(p_{246}) + e_{47}(p_{246}) - e_{41}(p_{246}) - e_{43}(p_{246}) + e_{63}(p_{246}) - e_{67}(p_{246}), \\ K_2(p_{246}) &= e_{25}(p_{246}) - e_{27}(p_{246}) + e_{43}(p_{246}) + e_{67}(p_{246}) - e_{63}(p_{246}) - e_{65}(p_{246}). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую линейную функцию $t: \widetilde{W} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$$t = 2I(p_{367}) + J(p_{45}) + K_1(p_{135}) - K_2(p_{147}) + K_1(p_{257}) - K_1(p_{246}) + 3\mathbb{Z}.$$

Несложно проверить, что $t|_B = 0$ и $t(a_0) = 1$. Поэтому образ элемента a_0 в $W = \widetilde{W}/B$ не равен нулю. $\square$

Лемма 3.3. $U = \text{Ker } \tilde{\tau}$ для структуры C_8 .

Доказательство. Чтобы доказать это, изучим сначала P_3 . Вычисления показывают, что базис в $R_3^\perp$ состоит из элементов $S_{ij} = x_i^* \otimes x_i^* \wedge x_j^*$ для $l_0 \succ l_i \cap l_j$, где $i < j$, $S_{ijk} = (x_i^* - x_j^*) \otimes (x_i^* - x_j^*) \wedge (x_j^* - x_k^*)$ для $l_i \succ l_j \cap l_k \in \mathcal{P}_0$, где $i < j$, $i < k$, и следующих добавочных элементов:

$$\begin{aligned}
T_0 &= x_7^* \otimes (x_1^* - x_3^*) \wedge (x_3^* - x_5^*) + (x_2^* - x_3^*) \otimes (x_1^* - x_4^*) \wedge (x_4^* - x_7^*) \\
&\quad + (x_4^* - x_5^*) \otimes (x_3^* - x_6^*) \wedge (x_6^* - x_7^*) + (x_1^* - x_6^*) \otimes (x_2^* - x_5^*) \wedge (x_5^* - x_7^*) \\
&\quad - x_7^* \otimes (x_2^* - x_4^*) \wedge (x_4^* - x_6^*) + (x_4^* - x_5^*) \otimes x_1^* \wedge x_2^* \\
&\quad - (x_1^* - x_6^*) \otimes x_3^* \wedge x_4^* + (x_2^* - x_3^*) \otimes x_5^* \wedge x_6^*, \\
T_1 &= x_7^* \otimes (x_1^* - x_3^*) \wedge (x_3^* - x_5^*) - x_3^* \otimes (x_1^* - x_4^*) \wedge (x_4^* - x_7^*) \\
&\quad - x_5^* \otimes (x_3^* - x_6^*) \wedge (x_6^* - x_7^*) + x_1^* \otimes (x_2^* - x_5^*) \wedge (x_5^* - x_7^*) \\
&\quad - (x_5^* - x_7^*) \otimes x_1^* \wedge x_2^* - (x_1^* - x_7^*) \otimes x_3^* \wedge x_4^* - (x_3^* - x_7^*) \otimes x_5^* \wedge x_6^*, \\
T_2 &= x_2^* \otimes (x_1^* - x_3^*) \wedge (x_3^* - x_5^*) + (x_2^* - x_5^*) \otimes (x_3^* - x_6^*) \wedge (x_6^* - x_7^*) \\
&\quad + (x_3^* - x_6^*) \otimes (x_2^* - x_5^*) \wedge (x_5^* - x_7^*) - x_3^* \otimes (x_2^* - x_4^*) \wedge (x_4^* - x_6^*) \\
&\quad + (x_3^* - x_5^*) \otimes x_1^* \wedge x_2^* - (x_2^* - x_6^*) \otimes x_3^* \wedge x_4^* + (x_2^* - x_3^*) \otimes x_5^* \wedge x_6^*, \\
T_3 &= x_6^* \otimes (x_1^* - x_3^*) \wedge (x_3^* - x_5^*) - (x_3^* - x_6^*) \otimes (x_1^* - x_4^*) \wedge (x_4^* - x_7^*) \\
&\quad - (x_1^* - x_4^*) \otimes (x_3^* - x_6^*) \wedge (x_6^* - x_7^*) - x_1^* \otimes (x_2^* - x_4^*) \wedge (x_4^* - x_6^*) \\
&\quad + (x_4^* - x_6^*) \otimes x_1^* \wedge x_2^* - (x_1^* - x_6^*) \otimes x_3^* \wedge x_4^* + (x_1^* - x_3^*) \otimes x_5^* \wedge x_6^*, \\
T_4 &= x_4^* \otimes (x_1^* - x_3^*) \wedge (x_3^* - x_5^*) + (x_2^* - x_5^*) \otimes (x_1^* - x_4^*) \wedge (x_4^* - x_7^*) \\
&\quad + (x_1^* - x_4^*) \otimes (x_2^* - x_5^*) \wedge (x_5^* - x_7^*) - x_5^* \otimes (x_2^* - x_4^*) \wedge (x_4^* - x_6^*) \\
&\quad + (x_4^* - x_5^*) \otimes x_1^* \wedge x_2^* - (x_1^* - x_5^*) \otimes x_3^* \wedge x_4^* + (x_2^* - x_4^*) \otimes x_5^* \wedge x_6^*.
\end{aligned}$$

Более того, $(R_3^\perp)^\perp = R_3$, так что P_3 является свободной абелевой группой и $P_3^* \cong R_3^\perp$. Поэтому достаточно показать, что $U^\perp = \text{Im } \tilde{\tau}^*$.

Отождествим $(\text{Hom}(R_2, P_3))^*$ с $R_2 \otimes P_3^*$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
I(p_{135}) &= \tilde{\tau}^*(r(1, p_{135}) \otimes S_{135}), \quad I(p_{147}) = \tilde{\tau}^*(r(1, p_{147}) \otimes S_{147}), \\
J(p_{16}) &= \tilde{\tau}^*(r(1, p_{16}) \otimes T_3), \quad K_1(p_{135}) = \tilde{\tau}^*(r(1, p_{135}) \otimes (T_0 - T_3)), \\
K_2(p_{135}) &= \tilde{\tau}^*(r(1, p_{135}) \otimes T_3), \quad K_1(p_{147}) = -\tilde{\tau}^*(r(1, p_{147}) \otimes T_0), \\
K_2(p_{147}) &= -\tilde{\tau}^*(r(1, p_{147}) \otimes T_3).
\end{aligned}$$

Поэтому $(U^\perp)_p \subset \text{Im } \tilde{\tau}^*$ для $p = p_{135}, p_{147}, p_{16}$. Теперь мы можем воспользоваться тем, что группа, порожденная перестановками (16)(25)(34) и (135)(246), действует на C_8 автоморфизмами, чтобы доказать то же самое для любого $p \in \mathcal{P}_0$. Отсюда следует, что $U^\perp \subset \text{Im } \tilde{\tau}^*$. Комбинируя это с предложением 2.5, мы получаем утверждение доказываемой леммы. $\square$

Лемма 3.4. $B = \tilde{\tau}^{-1}(\bar{\delta} \text{Hom}(H, P_2))$ для структуры C_8 .

Доказательство. Покажем сначала, что если $\bar{\delta}f \in \tilde{\tau}A$ для некоторого $f \in \text{Hom}(H, P_2)$, то

- (1) $(\omega_{ij}, f(x_k)) = 0$ для любых i, j, k , таких, что $l_i \cap l_j \prec l_0$, $k \neq i, j$, и
- (2) $(\omega_{ijk}, f(x_m)) = 0$ для любых i, j, k, m , таких, что $l_i \succ l_j \cap l_k \in \mathcal{P}_0$, $m \neq i, j, k$.

Предположим, что утверждение (1) не выполнено; тогда, поскольку никакие четыре различные прямые из C_8 не пересекаются в одной точке, мы имеем $p = l_i \cap l_k \in \mathcal{P}_0$ и $(S_{ij}, \bar{\delta}f(r(k, p))) = (\omega_{ij}, f(x_k)) \neq 0$. Но $(S_{ij}, \bar{\tau}a(r(k, p))) = 0$ для любых $a \in A$; поэтому утверждение (1) должно выполняться.

Предположим теперь, что утверждение (2) не выполнено; тогда либо $p = l_i \cap l_m \in \mathcal{P}_0$, либо $p' = l_j \cap l_m \in \mathcal{P}_0$. Используя симметрию относительно порядка (ijk) , мы можем считать, что $p = l_i \cap l_k \in \mathcal{P}_0$. Тогда $(S_{ijk}, \bar{\delta}f(r(m, p))) = (\omega_{ijk}, f(x_m)) \neq 0$. Но $(S_{ijk}, \bar{\tau}a(r(m, p))) = 0$ для любых $a \in A$; поэтому утверждение (2) тоже должно выполняться.

Следовательно, мы можем выбрать $\tilde{f} \in \text{Hom}(H, \Lambda^2 H)$ с $f(x) = \tilde{f}(x) + R_2$ так, чтобы $\tilde{f}(x_k) = x_k \wedge b(k)$ для некоторого $b: \{1, \dots, 7\} \rightarrow H$. Отсюда вытекает, что $\bar{\delta}f = \bar{\tau}a$, где $a \in B$, $a(k, p) = b(k)$ для любых k и p . $\square$

Из последних двух лемм следует, что $\bar{\tau}: W \rightarrow T$ является вложением, поэтому $\tau a_0 \neq 0$. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Заметим, что в процессе вычислений мы предъявили ненулевой гомоморфный образ различающего инварианта τa_0 в группе $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Небольшие дополнительные вычисления показывают, что и сам элемент τa_0 имеет порядок 3 в T и, тем самым, принадлежит подгруппе кручения. Это не случайно — при тензорном умножении на $\mathbb{Q}$ инвариант обязан обращаться в нуль, поскольку мальцевские пополнения фундаментальных групп канонически изоморфны (см. [3]).

Отметим, что группы $\pi_1(X^+)$ и $\pi_1(X^-)$ на самом деле изоморфны, поскольку существует гомеоморфизм $X^+ \rightarrow X^-$, индуцированный комплексным сопряжением. Но поскольку комплексное сопряжение обращает коориентацию прямых, индуцированный изоморфизм первых групп гомологий переводит канонический базис первой из них в минус канонический базис второй.

Попробуем описать автоморфизмы группы $G = \pi_1(X^+) \cong \pi_1(X^-)$.

Как мы уже отмечали, $\text{Aut}(C_8) \cong GL_2(\mathbb{F}_3)$. Легко видеть, что подкрутка на автоморфизмы, отвечающие элементам группы $SL_2(\mathbb{F}_3)$, преобразует реализацию $\phi^\pm$ в проективно эквивалентную реализацию, а остальные автоморфизмы делают из ϕ^+ реализацию, проективно эквивалентную ϕ^- , и наоборот.

Пусть $g \in GL_2(\mathbb{F}_3)$. Обозначим через σ_g перестановку множества индексов $\{0, 1, \dots, 7\}$, такую, что прямая l_i переходит в $l_{\sigma_g(i)}$ при соответствующем g автоморфизме структуры C_8 . Выберем также некоторую петлю $w_0 \in G$, обходящую вокруг бесконечно удаленной прямой l_0 в положительном направлении. Поскольку проективная эквивалентность дает изоморфизм фундаментальных групп, мы получаем для каждого $g \in SL_2(\mathbb{F}_3)$ автоморфизм η_g группы G , переводящий каждый из элементов $w_i \in G$ ($i = 0, 1, \dots, 7$) в некоторую петлю, обходящую вокруг $l_{\sigma_g(i)}$ в положительном направлении, т. е. в элемент, сопряженный к $w_{\sigma_g(i)}$ в G . Аналогично, используя комплексное сопряжение, дающее изоморфизм групп $\pi_1(X^+)$ и $\pi_1(X^-)$, мы получаем для $g \in GL_2(\mathbb{F}_3) \setminus SL_2(\mathbb{F}_3)$ автоморфизм η_g группы G , переводящий каждый из элементов $w_i \in G$ ($i = 0, 1, \dots, 7$) в некоторую петлю, обходящую вокруг $l_{\sigma_g(i)}$ в отрицательном направлении, т. е. в элемент, сопряженный к $w_{\sigma_g(i)}^{-1}$ в G .

Рассмотрим $H = G/\gamma_2 G$. Поскольку автоморфизмы группы G переводят $\gamma_2 G$ в себя, мы можем привести любой автоморфизм $\eta \in \text{Aut } G$ по модулю $\gamma_2 G$ и получить $\bar{\eta} \in \text{Aut } H$. Пусть $W = \{\bar{\eta} \mid \eta \in \text{Aut } G\}$.

Теорема 3.5. *Сопоставление $g \mapsto \bar{\eta}_g$ является изоморфизмом групп $GL_2(\mathbb{F}_3) \rightarrow W$.*

Доказательство. Определим в H элемент $x_0 = -\sum_{i=1}^7 x_i$. Легко видеть, что

$$\bar{\eta}_g(x_i) = \begin{cases} x_{\sigma_g(i)}, & \text{если } g \in SL_2(\mathbb{F}_3), \\ -x_{\sigma_g(i)}, & \text{если } g \notin SL_2(\mathbb{F}_3) \end{cases}$$

для $i = 0, 1, \dots, 7$. Отсюда видно, что сопоставление $g \mapsto \bar{\eta}_g$ является инъективным гомоморфизмом. Докажем сюръективность.

Пусть $\eta \in \text{Aut } G$ — любой автоморфизм. Продолжим $\bar{\eta} \in \text{Aut } H$ на $\Lambda^2 H$. Очевидно, что это продолжение переводит в себя подгруппу $R_2 = \text{Ker}(\Lambda^2 H \rightarrow P_2)$, где $P_2 = \gamma_2 G / \gamma_3 G$ (см. §2). Рассмотрим $R_2^\perp \subseteq \Lambda^2 H^*$. Как мы знаем, абелева группа $R_2^\perp$ порождена элементами $\omega_{ijk} = (x_i^* - x_j^*) \wedge (x_j^* - x_k^*) = x_i^* \wedge x_j^* + x_j^* \wedge x_k^* + x_k^* \wedge x_i^*$ при $l_i \succ l_j \cap l_k \in \mathcal{P}_0$ и $\omega_{0ij} = \omega_{ij} = x_i^* \wedge x_j^*$ при $l_0 \succ l_i \cap l_j$.

Лемма 3.6. *Любой разложимый элемент в $R_2^\perp \subseteq \Lambda^2 H^*$ для структуры C_8 пропорционален какому-то элементу вида ω_{ijk} , где $p_{ijk} \in \mathcal{P}$.*

Доказательство. Поскольку H^* — свободная абелева группа, можно проводить вычисления над $\mathbb{Q}$ в $H^* \otimes \mathbb{Q}$. Отметим, что элементы ω_{ijk} линейно независимы и группа $\text{Aut}(C_8)$ переводит порожденные ими одномерные подпространства в $H^* \otimes \mathbb{Q}$ друг в друга, действуя на множестве $\{(\omega_{ijk}) \mid p_{ijk} \in \mathcal{P}\}$ этих подпространств транзитивно. Поэтому достаточно доказать, что если разложимый элемент ω представляется в виде линейной комбинации элементов вида ω_{ijk} , причем ω_{012} входит в это разложение с коэффициентом 1, то $\omega = \omega_{012}$.

Действительно, представим ω в виде $\omega = \sum_{0 < i < j} a_{ij} x_i^* \wedge x_j^*$. Тогда $a_{12} = 1$ и имеется разложение вида $\omega = (x_1^* + \sum_{i=3}^7 c_i x_i^*) \wedge (x_2^* + \sum_{i=3}^7 d_i x_i^*)$. С другой стороны, ω представляется в виде линейной комбинации элементов вида ω_{ijk} . Сравнивая два этих разложения, легко получить, что $\omega = \omega_{012}$. $\square$

Пусть $V = H \otimes \mathbb{Q}$. Поскольку H — свободный $\mathbb{Z}$ -модуль, мы будем считать его вложенным в V . Векторное пространство V можно представить как $\mathbb{Q}^8 / \langle e_0 + \dots + e_7 \rangle$, где $(e_0, \dots, e_7)$ — стандартный базис пространства $\mathbb{Q}^8$. При этом $x_i = e_i + \langle e_0 + \dots + e_7 \rangle$ для любого $i = 0, \dots, 7$. Легко видеть, что действие автоморфизмов структуры инцидентности C_8 на V происходит из ее действия перестановками σ_g базисных векторов в $\mathbb{Q}^8$.

Двойственное пространство V^* представляется как подпространство в $(\mathbb{Q}^8)^*$, порожденное элементами $e_i^* - e_j^*$. Двойственный базис к базису $(x_1, \dots, x_7)$ пространства V состоит из элементов $x_i^* = e_i^* - e_0^*$ ($i = 1, \dots, 7$). Как мы установили, формы вида $\omega_{ijk} = (e_i^* - e_j^*) \wedge (e_j^* - e_k^*)$, где $p_{ijk} \in \mathcal{P}$, переходят под действием автоморфизма $\bar{\eta}$ в формы того же вида (с точностью до знака). Рассмотрим ядро такой формы в V . Оно состоит из всех векторов, в которые e_i, e_j и e_k входят с равными коэффициентами. Легко проверить, что минимальные ненулевые подпространства в V , получаемые пересечением ядер некоторых из ω_{ijk} — это в точности одномерные подпространства, натянутые на x_s ($s = 0, 1, \dots, 7$). Отсюда следует, что автоморфизм $\bar{\eta}$ переводит каждый из x_s в $\pm x_{\sigma(s)}$ для некоторой перестановки $\sigma \in S_8$. Поскольку векторы x_s связаны соотношением $\sum x_s = 0$, все знаки « $\pm$ » при $x_{\sigma(s)}$ одинаковы. Также легко проверить, представляя $\langle x_s \rangle$

как пересечение ядер форм ω_{ijk} , что $\sigma = \sigma_g$ для некоторого $g \in GL_2(\mathbb{F}_3)$, причем знак «+» возникает при $g \in SL_2(\mathbb{F}_3)$, а «-» в противном случае. Последнее утверждение следует из того, что не существует автоморфизма $\eta: G \rightarrow G$, такого, что $\bar{\eta}(x_i) = -x_i$ для любого $i = 0, 1, \dots, 7$ (иначе, применяя комплексное сопряжение, мы получили бы контрпример к теореме 3.1). $\square$

Замечание 1. Теорема 3.5 означает, по сути, что для конфигурации Маклейна стандартный базис в первой группе гомологий — абелианизации фундаментальной группы — «почти» является инвариантом самой фундаментальной группы. Более точно, инвариантом является набор циклических подгрупп, порожденных элементами стандартного базиса и элементом x_0 (циклом, охватывающим бесконечно удаленную прямую). Более того, при каждом автоморфизме набор $\{x_0, \dots, x_7\}$ переходит либо в себя, либо в набор $\{-x_0, \dots, -x_7\}$. Именно эта «структурная жесткость» стандартного базиса для конфигурации Маклейна будет использована в следующем параграфе.

Далеко не все конфигурации прямых обладают этим свойством. Например, для конфигурации прямых общего положения фундаментальная группа абелева, и стандартный базис первой группы гомологий ни в каком смысле не восстанавливается по фундаментальной группе¹⁾.

§4. Комбинаторно эквивалентные конфигурации с различными фундаментальными группами

Определим структуру инцидентности C_{13} как результат склеивания двух структур Маклейна следующим образом. Пусть $C'_8 = (\mathcal{L}', \mathcal{P}', \succ)$ и $C''_8 = (\mathcal{L}'', \mathcal{P}'', \succ)$ — два экземпляра структуры Маклейна ($\mathcal{L}' = \{l'_0, \dots, l'_7\}$, $\mathcal{P}' = \{p'_{012}, \dots, p'_{45}\}$, $\mathcal{L}'' = \{l''_0, \dots, l''_7\}$, $\mathcal{P}'' = \{p''_{012}, \dots, p''_{45}\}$). Введем отношение эквивалентности на $\mathcal{L}' \cup \mathcal{L}''$, полагая $l'_0 \sim l''_0$, $l'_1 \sim l''_1$, $l'_2 \sim l''_2$, и отношение эквивалентности на $\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$, полагая $p'_{012} \sim p''_{012}$. Пусть $\mathcal{P}''' = \{p'''_{ij} \mid i, j \in \{3, \dots, 7\}\}$. Положим $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'')/\sim$, $\widehat{\mathcal{P}} = ((\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}'')/\sim) \cup \mathcal{P}'''$. Отношение инцидентности между $\widehat{\mathcal{L}}$ и $(\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}'')/\sim$ индуцируется отношениями инцидентности на C'_8 , C''_8 , а отношение инцидентности между $\widehat{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{P}'''$ определяется так: $p'''_{ij} \prec l'_i, l''_j$. Пусть $C_{13} = (\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{P}}, \succ)$. Обозначим через $\hat{l}_i$ класс эквивалентности прямой l'_i ($i = 0, 1, 2$) и через $\hat{p}_{012}$ класс эквивалентности точки p'_{012} .

Пусть ψ — проективное преобразование пространства $\mathbb{CP}^2$, удовлетворяющее условиям $\psi \phi^\pm l_i = \phi^\pm l_i (= \phi^- l_i)$ для $i = 0, 1, 2$. Такое преобразование задается формулой $(z_0 : z_1 : z_2) \mapsto (z_0 : z_1 : az_0 + bz_1 + cz_2)$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$. Предположим, что преобразование ψ таково, что ни одна из прямых $\psi \phi^\pm l_i$, $i = 3, \dots, 7$, не проходит ни через одну точку пересечения прямых $\phi^\pm l_j$, $j = 0, 1, \dots, 7$. Такие ψ мы будем называть общими. Построим реализации ϕ_ψ^{++} и ϕ_ψ^{+-} структуры C_{13} , склеив их из реализаций ϕ^+ и ϕ^- структуры C_8 следующим образом: положим $\phi_\psi^{\pm} \hat{l}_i = \phi^\pm l_i$ при $i = 0, 1, 2$, $\phi_\psi^{\pm} \hat{l}'_i = \phi^\pm l_i$ и $\phi_\psi^{\pm} \hat{l}''_i = \psi \phi^\pm l_i$ при $i = 3, \dots, 7$. Для общего преобразования ψ точки пересечения прямых вида $\phi_\psi^{\pm} \hat{l}$ (где $\hat{l} \in \widehat{\mathcal{L}}$) друг с другом находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из $\widehat{\mathcal{P}}$, т. е. мы получаем реализации структуры C_{13} . Пусть $X_\psi^{\pm} = \mathbb{CP}^2 \setminus \bigcup \phi_\psi^{\pm} l$.

¹⁾ Я благодарен рецензенту, порекомендовавшему мне добавить это замечание.

Отметим, что пространство общих преобразований ψ связно, поэтому фундаментальные группы $G^{++} = \pi_1(X_\psi^{++})$ и $G^{+-} = \pi_1(X_\psi^{+-})$ не зависят от выбора ψ , с точностью до изоморфизма, согласованного с каноническим базисом в $G^{+\pm}/\gamma_2 G^{+\pm}$. В связи с этим индекс ψ мы можем опускать.

Теорема 4.1. *Группы G^{++} и G^{+-} неизоморфны.*

Доказательство. Пусть $\widehat{G}$ — одна из групп G^{++} и G^{+-} . Обозначим через $\hat{x}_1, \hat{x}_2, x'_3, \dots, x'_7, x''_3, \dots, x''_7$ образы стандартных образующих группы $\widehat{G}$ в $\widehat{H} = \widehat{G}/\gamma_2 \widehat{G}$. Положим $\hat{x}_0 = -\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - x'_3 - \dots - x'_7 - x''_3 - \dots - x''_7$.

Лемма 4.2. *Пусть, как в предыдущем параграфе, $G = \pi_1(X^+)$. Существуют согласованные проекции $\pi': \widehat{G} \rightarrow G$, $\pi'': \widehat{G} \rightarrow G$ и вложения $\nu': G \rightarrow \widehat{G}$, $\nu'': G \rightarrow \widehat{G}$, такие, что по модулю второго члена нижнего центрального ряда имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \pi'(\hat{x}_i) &= x_i \quad (0 \leq i \leq 2), \quad \pi'(x'_i) = x_i \quad \text{и} \quad \pi'(x''_i) = 0 \quad (3 \leq i \leq 7), \\ \bar{\nu}'(x_i) &= \hat{x}_i \quad (0 \leq i \leq 2), \quad \bar{\nu}'(x_i) = x'_i \quad (3 \leq i \leq 7), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \pi''(\hat{x}_i) &= x_i \quad (0 \leq i \leq 2), \quad \pi''(x'_i) = 0 \quad \text{и} \quad \pi''(x''_i) = x_i \quad (3 \leq i \leq 7), \\ \bar{\nu}''(x_i) &= \hat{x}_i \quad (0 \leq i \leq 2), \quad \bar{\nu}''(x_i) = x''_i \quad (3 \leq i \leq 7) \end{aligned}$$

в случае $\widehat{G} = G^{++}$ и

$$\begin{aligned} \pi''(\hat{x}_i) &= -x_i \quad (0 \leq i \leq 2), \quad \pi''(x'_i) = 0 \quad \text{и} \quad \pi''(x''_i) = -x_i \quad (3 \leq i \leq 7), \\ \bar{\nu}''(x_i) &= -\hat{x}_i \quad (0 \leq i \leq 2), \quad \bar{\nu}''(x_i) = -x''_i \quad (3 \leq i \leq 7) \end{aligned}$$

в случае $\widehat{G} = G^{+-}$.

Доказательство. Проекции строятся очевидным образом, путем выбрасывания прямых $\phi^+ l_i$ при $i = 3, \dots, 7$ (или прямых $\psi \phi^\pm l_i$ при $i = 3, \dots, 7$). Чтобы построить вложения, надо выбрать общее проективное преобразование ψ так, чтобы прямые $\psi \phi^\pm l_i$ при $i = 3, \dots, 7$ не пересекали некоторый открытый шар, содержащий все точки пересечения аффинных прямых $\phi^+ l_i$ при $i = 1, \dots, 7$, а прямые $\phi^+ l_i$ при $i = 3, \dots, 7$ не пересекали некоторый открытый шар, содержащий все точки пересечения аффинных прямых $\psi \phi^\pm l_i$ при $i = 1, \dots, 7$. Легко видеть, что дополнения к прямым вида $\phi^+ l_i$ и $\psi \phi^\pm l_i$ в таких открытых шарах гомеоморфны соответственно пространствам X^+ и $X^\pm$. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть $\eta: \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}$ — автоморфизм и $\bar{\eta}: \widehat{H} \rightarrow \widehat{H}$ — его приведение по модулю $\gamma_2 \widehat{G}$. Тогда существуют элемент $g \in GL_2(\mathbb{F}_3)$, $\sigma_g(\{0, 1, 2\}) = \{0, 1, 2\}$, и число $\varepsilon = \pm 1$, такие, что $\bar{\eta}(\hat{x}_i) = \varepsilon \hat{x}_{\sigma_g(i)}$ при $0 \leq i \leq 2$ и либо $\bar{\eta}(x'_i) = \varepsilon x'_{\sigma_g(i)}$ и $\bar{\eta}(x''_i) = \varepsilon x''_{\sigma_g(i)}$, либо $\bar{\eta}(x'_i) = \varepsilon x'_{\sigma_g(i)}$ и $\bar{\eta}(x''_i) = \varepsilon x''_{\sigma_g(i)}$ при $3 \leq i \leq 7$. То же верно для любого изоморфизма $G^{++} \rightarrow G^{+-}$.*

Доказательство следует из теоремы 3.5 и леммы 4.2. $\square$

Лемма 4.4. *Существует автоморфизм $\eta: G^{++} \rightarrow G^{++}$, такой, что $\bar{\eta}(\hat{x}_i) = \hat{x}_i$ при $0 \leq i \leq 2$ и $\bar{\eta}(x'_i) = x'_i$, $\bar{\eta}(x''_i) = x''_i$ при $3 \leq i \leq 7$.*

Доказательство. Поскольку для общего проективного преобразования ψ нужного нам вида обратное преобразование ψ^{-1} тоже является общим, ψ индуцирует некоторый изоморфизм $\nu: \pi_1(X_{\psi^{-1}}^{++}) \rightarrow \pi_1(X_{\psi}^{++})$. Рассмотрим также изоморфизм $\mu: \pi_1(X_{\psi}^{++}) \rightarrow \pi_1(X_{\psi^{-1}}^{++})$, задаваемый гомотопией вдоль некоторого пути, соединяющего ψ с ψ^{-1} в пространстве общих преобразований. Поскольку изоморфизм μ согласован с каноническими базисами, а изоморфизм ν меняет местами образы прямых l'_i и l''_i , их композиция $\eta = \nu\mu: \pi_1(X_{\psi}^{++}) \rightarrow \pi_1(X_{\psi}^{++})$ — нужный нам автоморфизм. $\square$

Лемма 4.5. *Не существует автоморфизма $\eta: G^{+-} \rightarrow G^{+-}$, такого, что $\bar{\eta}(\hat{x}_i) = \hat{x}_i$ при $0 \leq i \leq 2$ и $\bar{\eta}(x'_i) = x''_i$, $\bar{\eta}(x''_i) = x'_i$ при $3 \leq i \leq 7$.*

Доказательство вытекает из теоремы 3.5 и леммы 4.2. $\square$

Утверждение теоремы легко следует из лемм 4.3, 4.4 и 4.5. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. Arvola, *The fundamental group of the complement of an arrangement of complex hyperplanes*, Topology, **31**:4 (1992), 757–765.
- [2] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, J. I. Cogolludo Agustín, M. A. Marco Buzunáriz, *Invariants of combinatorial line arrangements and Rybnikov's example*, in: Singularity Theory and its Applications, Adv. Studies in Pure Math., vol. 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, 1–34.
- [3] T. Kohno, *On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces*, Nagoya Math. J., **92** (1983), 21–37.
- [4] S. MacLane, *Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry*, Amer. J. Math., **58**:1 (1936), 236–241.
- [5] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп*, Наука, М., 1974.
- [6] P. Orlik, L. Solomon, *Combinatorics and topology of complements of hyperplanes*, Invent. Math., **56**:2 (1980), 167–189.
- [7] P. Orlik, H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1992.
- [8] G. Rybnikov, *On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement*, DIMACS Tech. Report 94-13 (1994), 33–50; <http://arxiv.org/abs/math/9805056>.
- [9] D. J. A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, London–New York, 1976.
- [10] G. M. Ziegler, *Matroid representations and free arrangements*, Trans. Amer. Math. Soc., **320**:2 (1990), 525–541.