Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Левенталь, В. С. Мандрекар, С. А. Чобанян, К
теореме Никишина о перестановочной сходимости
почти наверное функциональных рядов, *Функц.
анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 1, 41–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3026>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:35:19

К теореме Никишина о перестановочной сходимости почти наверное функциональных рядов*

© 2011. Ш. ЛЕВЕНТАЛЬ, В. МАНДРЕКАР, С. А. ЧОБАНЯН

Для ряда, составленного из случайных величин со значениями в банаховом пространстве, мы находим необходимые и достаточные условия для почти наверное сходимости почти всех его простых перестановок. Результаты восходят к известной теореме Никишина о существовании почти наверное сходящейся перестановки числового случайного ряда. Мы приводим также пример числового случайного ряда с общим членом, сходящимся п. н. к нулю, который сходится по вероятности, но п. н. расходится для любой перестановки ряда.

§1. Введение

Главную задачу, изучаемую в этой работе, можно сформулировать следующим образом. Пусть $\sum_1^\infty \xi_l$ — ряд, составленный из скалярных случайных величин либо, более общо, из случайных величин, принимающих значения в нормированном пространстве X (действительном или комплексном), такой, что некоторая последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} \xi_l$ сходится почти наверное (п. н.) к X -значной случайной величине S . Найти условия, при которых существует перестановка $\sum_1^\infty \xi_{\pi(l)}$ этого ряда, сходящаяся п. н. к S (или условия, при которых множество таких перестановок имеет полную меру относительно естественно вводимой меры на множестве $\mathbf{k}$ -простых перестановок).

Задача возникла в теории ортогональных рядов в связи с изучением их п. н. сходящихся перестановок. В 1964 г. Гарсия [12] показал, что если (φ_l) — ортонормированная система и (α_l) — последовательность скаляров, такая, что $\sum |\alpha_l|^2 < \infty$, то существует перестановка $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая, что ряд $\sum_1^\infty \alpha_{\pi(l)} \varphi_{\pi(l)}$ сходится п. н. (элементарное доказательство неравенства, лежащего в основе доказательства Гарсия, можно найти в [9]). Никишин [26] нашел следующее обобщение теоремы Гарсия: если ряд $\sum_1^\infty \xi_l$, составленный из скалярных случайных величин, сходится по мере к случайной величине S и

$$\sum_1^\infty |\xi_l|^2 < \infty \quad \text{п. н.}, \quad (1.1)$$

то существует перестановка $\sum_1^\infty \xi_{\pi(l)}$ этого ряда, сходящаяся п. н. к S . В работах [7], [5] мы рассмотрели случай, когда случайные величины принимают значения в нормированном пространстве, и показали, что теорема Никишина остается справедливой, если условие (1.1) заменить следующим:

$$\text{ряд } \sum_1^\infty \xi_l \eta_l \text{ сходится п. н.}, \quad (1.2)$$

*Работа поддержана грантом GNSF/ST08/3-384.

где (r_l) — последовательность радемахеровских случайных величин, независимая от (ξ_l) .

В настоящей статье мы находим следующее улучшение условия (1.2), учитывающее специфику последовательности (k_n) : если последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} \xi_l$ ряда $\sum_1^\infty \xi_l$, составленного из случайных величин (вообще говоря, принимающих значения в нормированном пространстве), сходится п. н. к случайной величине S , то существует перестановка $\sum_1^\infty \xi_{\pi(l)}$ этого ряда, сходящаяся п. н. к S при условии, что

$$\sum_{k_n}^{k_{n+1}-1} \xi_l r_l \rightarrow 0 \quad \text{п. н. при } n \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Более того, мы показываем, что при выполнении условия (1.3) (и только в этом случае) множество $\mathbf{k}$ -простых перестановок $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, для которых $\sum_1^\infty \xi_{\pi(l)}$ сходится п. н. к S , составляет множество полной меры. Результаты являются новыми и в скалярном случае. В [8] нами была решена аналогичная задача о справедливости усиленного закона больших чисел для перестановок случайной последовательности.

Наш метод основан на двусторонней оценке величины $\mu_{\mathbf{x},t} = \frac{1}{n!} \text{card}\{\pi : \max_{l \leq n} \|x_{\pi(1)} + \dots + x_{\pi(l)}\| > t\}$ для заданных $x_1, \dots, x_n$ из нормированного пространства X , полученной в [5]. Соответствующие неравенства (см. §3) восходят к монографии Кашина и Саакяна [17], где была доказана оценка сверху для одномерного случая. Использование оценки для $\mu_{\mathbf{x},t}$ вместо использовавшихся ранее оценок для среднего $A_{\mathbf{x}} = \text{Ave}_\pi \max_{l \leq n} \|x_{\pi(1)} + \dots + x_{\pi(l)}\|$ позволило показать, что (1.3) является необходимым и достаточным условием для сходимости ряда $\sum_1^\infty \xi_{\pi(l)}$ для почти всех $\mathbf{k}$ -простых π . Наш метод сводит решение общей задачи к простейшему случаю констант (к теореме 4.1). Следует отметить, что и этот простейший случай является весьма содержательным — вариант теоремы 4.1 (касающийся только существования сходящейся перестановки) представляет собой главную часть решения известной задачи Штейница–Банаха (см. [30], [1]) о линейности и замкнутости области сумм условно сходящегося функционального ряда. Для бесконечномерных пространств задача о существовании сходящейся перестановки (неслучайного) ряда была впервые рассмотрена М. И. Кадецем [15]. Приложения к задаче об области сумм исследованы в монографии М. И. Кадеца и В. М. Кадеца [16]. Отметим также, что существование сходящейся перестановки ряда $\sum x_l$ в пространстве $C[0, 2\pi]$ при условии сходимости некоторой последовательности частичных сумм и ряда $\sum x_l r_l$ использовалось Печерским [28], Ревешем [29] и совсем недавно Конягиным [18] для исследования задачи Ульянова о существовании равномерно сходящейся перестановки тригонометрического ряда Фурье непрерывной периодической функции.

В §4 мы отмечаем также следующий любопытный результат, который мы формулируем для случая констант. Для сходящегося ряда $\sum x_l$ в банаховом пространстве X сходимость п. н. ряда $\sum x_l r_l$ (т. е. сходимость исходного ряда для почти всех расстановок знаков) оказывается эквивалентной сходимости ряда для почти всех простых перестановок (ср. с классической формулировкой: сходимость ряда для всех знаков эквивалентна сходимости этого ряда для всех перестановок).

В §5 мы анализируем условия (1.2) и (1.3) для банахова пространства X с учетом его геометрии. В §6 даны следствия основной теоремы 4.1 с использова-

нием результатов §5. В §7 мы приводим обобщение теоремы Никишина (теорема 7.1) как следствие теоремы 4.1 для случая констант и теоремы Фубини.

Заключительный §8 посвящен контрпримеру. Утверждения типа теоремы Никишина подразумевают существование случайного ряда, сходящегося по вероятности и такого, что ни одна его перестановка не сходится п. н. Мы строим пример такого ряда при дополнительном условии сходимости п. н. к нулю общего члена, которое приводит к далеко не тривиальным построениям.

§2. Обозначения

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ обозначает основное вероятностное пространство. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство (действительное или комплексное). Отображение $\xi: \Omega \rightarrow X$ называется случайной величиной со значениями в X (X -значной случайной величиной), если оно измеримо по Бохнеру, т. е. $\xi = \lim \xi_n$ P -п. н., где отображение $\xi_n: \Omega \rightarrow X$ измеримо и принимает конечное число значений. Пусть $\mathbf{k} = (k_n)$, $1 = k_1 < k_2 < \dots$, — последовательность натуральных чисел, $I_n^{\mathbf{k}} = \{k_n + 1, \dots, k_{n+1}\}$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность соответствующих блоков, $\Pi_n^{\mathbf{k}}$ — группа всех перестановок $\pi^{(n)}: I_n^{\mathbf{k}} \rightarrow I_n^{\mathbf{k}}$ и $\mu_n^{\mathbf{k}}$ — равномерное распределение на $\Pi_n^{\mathbf{k}}$ (присваивающее каждой перестановке $\pi^{(n)}$ вероятность $1/(k_{n+1} - k_n!)$), и пусть $\Sigma_n^{\mathbf{k}}$ есть σ -алгебра всех подмножеств группы $\Pi_n^{\mathbf{k}}$. Рассмотрим произведение вероятностных пространств

$$(\Pi^{\mathbf{k}}, \Sigma^{\mathbf{k}}, \mu^{\mathbf{k}}) = \prod_{n=1}^{\infty} (\Pi_n^{\mathbf{k}}, \Sigma_n^{\mathbf{k}}, \mu_n^{\mathbf{k}}).$$

Очевидно, что $\Pi^{\mathbf{k}}$ является тихоновской компактной группой и $\mu^{\mathbf{k}}$ есть мера Хаара на ней. Каждый элемент $(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \dots) \in \Pi^{\mathbf{k}}$ определяет перестановку $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, а именно, $\pi(1) = 1$ и, если $l \in I_n^{\mathbf{k}}$, то $\pi(l) = \pi^{(n)}(l) \in I_n^{\mathbf{k}}$. Мы говорим, что эта перестановка π является $\mathbf{k}$ -простой перестановкой, или перестановкой, инвариантной относительно блоков $I_n^{\mathbf{k}}$, $n \in \mathbb{N}$.

§3. Необходимые максимальные неравенства

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — векторы из нормированного пространства X (действительного или комплексного), $S = \sum_1^n x_l$, и пусть $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ обозначает перестановку в $\{1, \dots, n\}$. Обозначим через $r_1, \dots, r_n$ радемахеровские случайные величины (т. е. независимые случайные величины, принимающие значения -1 и $+1$ с равными вероятностями $1/2$). Мы можем предполагать, что $r_1, \dots, r_n$ определены на $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$, где λ — мера Лебега, определенная на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}$ отрезка $[0, 1]$. Следующее двустороннее неравенство в общем случае нормированного пространства было доказано в [5]. Оно восходит к монографии Кашина и Саакяна [17], где правая часть была доказана для одномерного случая. Для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} \lambda \left\{ u : \left\| \sum_1^n x_k r_k(u) \right\| > 2t + \|S\| \right\} &\leq \frac{1}{n!} \text{card} \left\{ \pi : \max_{k \leq n} \left\| \sum_1^k x_{\pi(l)} \right\| > t - \|S\| \right\} \\ &\leq 10\lambda \left\{ u : \left\| \sum_1^n x_k r_k(u) \right\| > \frac{t}{12} - 2\|S\| \right\}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Из (3.1) вытекает следующее неравенство Море и Пизье [25]: если $\sum_1^n x_l = 0$, то

$$C_1 \mathbf{E} \left\| \sum_1^n x_k r_k \right\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \max_{k \leq n} \left\| \sum_1^k x_{\pi(l)} \right\| \leq C_2 \mathbf{E} \left\| \sum_1^n x_k r_k \right\|, \quad (3.2)$$

где C_1 и C_2 — абсолютные постоянные. Ясно, что неравенство (3.1) позволяет устанавливать двусторонние оценки типа (3.2) для средних общего вида $\frac{1}{n!} \sum_{\pi} \Phi(\max_{k \leq n} \|\sum_1^k x_{\pi(l)}\|)$, где $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — любая возрастающая функция (см. [5]).

В связи с возможными обобщениями неравенства (3.1) стоит привести следующую гипотезу, которая была доказана ее автором в одномерном случае.

Гипотеза [20]. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — векторы из нормированного пространства X (действительного или комплексного), такие, что $\sum_1^n x_l = 0$. Существуют такие абсолютные постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что для любого набора знаков $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ и любого $t > 0$

$$\frac{1}{n!} \text{card} \left\{ \pi : \max_{k \leq n} \left\| \sum_1^k x_{\pi(l)} \right\| > t \right\} \leq C_1 \frac{1}{n!} \text{card} \left\{ \pi : \max_{k \leq n} \left\| \sum_1^k x_{\pi(l)} \theta_l \right\| > \frac{t}{C_2} \right\}.$$

§ 4. Сходимость рядов для почти всех простых перестановок. Случай постоянных слагаемых

4.1. Сходимость неслучайного ряда для $\mathbf{k}$ -почти всех перестановок.

Теорема 4.1. Пусть (a_k) — последовательность элементов нормированного пространства X , такая, что последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} a_l$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $S \in X$. Для того чтобы ряд $\sum_1^{\infty} a_{\pi(l)}$ сходиллся к S $\mu^{\mathbf{k}}$ -п.н. (т.е. для почти всех $\mathbf{k}$ -простых π), где $\mathbf{k} = (k_n)$, $1 = k_1 < k_2 < \dots$, необходимо и достаточно чтобы

$$\sum_{k_n+1}^{k_{n+1}} a_l r_l \rightarrow 0 \quad \lambda\text{-п.н.}, \quad (4.1)$$

где (r_n) , $n \in \mathbb{N}$, — последовательность радемахеровских случайных величин, определенных на $[0, 1]$ с мерой Лебега λ .

Доказательство. Мы используем двустороннее неравенство (3.1) и следующий критерий сходимости ряда $\sum_1^{\infty} a_l$, $a_l \in X$: ряд сходится тогда и только тогда, когда существует последовательность $k_n \uparrow \infty$, $k_n \in \mathbb{N}$, такая, что последовательность частичных сумм $\sum_1^{k_n} a_l$ сходится и $\max_{k_n < m \leq k_{n+1}} \|\sum_{k_n+1}^m a_l\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $V_n = \sum_{k_n+1}^{k_{n+1}} a_l$ и $M_n^{\pi} = \max_{k_n < m \leq k_{n+1}} \|\sum_{k_n+1}^m a_{\pi(l)}\|$, $\pi \in \Pi^{\mathbf{k}}$.

Достаточность. Согласно (3.1), мы имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{\mathbf{k}} \{ \pi \in \Pi^{\mathbf{k}} : M_n^{\pi} + \|V_n\| > \varepsilon \} \leq 10 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \left\{ u : \left\| \sum_{k_n+1}^{k_{n+1}} a_l r_l(u) \right\| + 2\|V_n\| > \frac{\varepsilon}{12} \right\}. \quad (4.2)$$

Сходимость последовательности (S_{k_n}) влечет за собой сходимость к нулю последовательности (V_n) . Следовательно, условие (4.1), независимость радемахеровской последовательности (r_l) и лемма Бореля–Кантелли в части необходимости влекут за собой конечность правой части неравенства (4.2). Отсюда вытекает, что левая часть в (4.2) также конечна. Далее, утверждение о достаточности из леммы Бореля–Кантелли влечет за собой сходимость $\mu^{\mathbf{k}}$ -п. н. к нулю последовательности $M_n^\pi + \|V_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, и последовательности (M_n^π) .

Необходимость. В силу левого фрагмента неравенства (3.3) для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \left\{ u : \left\| \sum_{k_n+1}^{k_{n+1}} a_l r_l(u) \right\| - \|V_n\| > \varepsilon \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{\mathbf{k}} \left\{ \pi : M_n^\pi + \|V_n\| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (4.3)$$

Поскольку M_n^π как случайные величины на $(\Pi^{\mathbf{k}}, \Sigma^{\mathbf{k}}, \mu^{\mathbf{k}})$ независимы и $M_n^\pi + \|V_n\| \rightarrow 0$ $\mu^{\mathbf{k}}$ -п. н., правая часть неравенства (4.3) конечна в силу утверждения о необходимости из леммы Бореля–Кантелли. Следовательно, левая часть в (4.3) также конечна и в силу утверждения о достаточности из леммы Бореля–Кантелли мы приходим к (4.1).

Замечание. Подчеркнем, что при доказательстве теоремы мы не использовали свойство полноты пространства X .

4.2. Закон нуля или единицы.

Предложение 4.2. Пусть $\sum_1^\infty a_l$ — ряд, $a_l \in X$, X — нормированное пространство, $S_{n_k} = \sum_1^{n_k} a_l$, и пусть $S_{n_k} \rightarrow S$ в X . Положим

$$C = \left\{ \pi \in \Pi^{\mathbf{k}} : \sum_1^\infty a_{\pi(k)} \text{ сходится в } X \right\}.$$

Тогда $\mu^{\mathbf{k}}(C) = 0$ или 1.

Предложение 4.2 является прямым следствием закона нуля или единицы Колмогорова, поскольку C принадлежит остаточной σ -алгебре последовательности канонических вложений σ -алгебр $\Sigma_n^{\mathbf{k}}$ в $\Sigma^{\mathbf{k}} = \prod_1^\infty \Sigma_n^{\mathbf{k}}$.

Следующий простой пример показывает, что $\mu^{\mathbf{k}}(C)$ может быть нулем, но C не является пустым.

Пример. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum_1^\infty a_l$, $a_l \in \mathbb{R}^1$, такой, что $\sum_1^\infty a_l^2 = \infty$. Последнее условие означает, что ряд $\sum_1^\infty a_l r_l$ расходится λ -п. н. Следовательно, существует такая последовательность индексов $\mathbf{k} = (k_n)$, $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \uparrow \infty$, что $\sum_{k_n+1}^{k_{n+1}} a_l r_l$ не сходится λ -п. н. к нулю (так что условие (4.1) теоремы 4.1 не выполняется). Очевидно, что последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} a_l$ сходится, в то время как, согласно теореме 4.1 и предложению 4.2, ряд $\sum_1^\infty a_{\pi(l)}$ расходится для почти всех $\pi \in \Pi^{\mathbf{k}}$.

4.3. Почти безусловная сходимость. Пусть $\sum_1^\infty a_l$ — ряд с членами из нормированного пространства X .

Определение. Мы говорим, что ряд $\sum_1^\infty a_l$ в нормированном пространстве X сходится в X для почти всех простых перестановок, если для каждой последовательности натуральных чисел $\mathbf{k} = (k_n)$, $1 = k_1 < k_2 < \dots$,

$$\mu^{\mathbf{k}} \left\{ \pi \in \Pi^{\mathbf{k}} : \sum_1^\infty a_{\pi(l)} \text{ сходится в } X \right\} = 1.$$

Теорема 4.3. Пусть $\sum_1^\infty a_l$ — сходящийся ряд в банаховом пространстве X . Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\sum_1^\infty a_l r_l$ сходится λ -п.н. в X ;
- (ii) $\sum_1^\infty a_l$ сходится в X для почти всех простых перестановок.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Зафиксируем последовательность индексов $\mathbf{k} = (k_n)$, $1 = k_1 < k_2 < \dots$. Из сходимости λ -п.н. ряда $\sum_1^\infty a_l r_l$ вытекает сходимость λ -п.н. к нулю последовательности $\sum_{l \in I_n} a_l r_l$. Следовательно, согласно теореме 4.1, ряд $\sum_1^\infty a_{\pi(l)}$ сходится $\mu^{\mathbf{k}}$ -п.н. Поскольку $\mathbf{k}$ — произвольная возрастающая последовательность индексов, ряд $\sum_1^\infty a_l$ сходится для почти всех простых перестановок.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Согласно теореме 4.1, из (ii) вытекает, что $R_n := \sum_{l \in I_n} a_l r_l \rightarrow 0$ λ -п.н. для любого фиксированного $\mathbf{k}$. Так как сходимость радемахеровских сумм по вероятности и их сходимость в $L_2([0, 1], \lambda, X)$ эквивалентны (см. [32, предложение 5.2, с. 248]), R_n сходится к нулю в $L_2([0, 1], \lambda, X)$. Следовательно, по теореме Ито–Нисиро ряд $\sum_1^\infty a_l r_l$ сходится λ -п.н. в X и теорема доказана.

Замечание. 1. В свете теоремы 4.3 условие (ii) можно назвать условием почти безусловной сходимости.

2. Полнота пространства X была использована при доказательстве импликации (ii) $\Rightarrow$ (i).

§5. Сходимость λ -п.н. радемахеровских рядов и сумм в банаховом пространстве

В §4 мы решили задачи о перестановочной сходимости п.н. в терминах сходимости радемахеровских рядов и сумм. Стоит заметить, что сходимость радемахеровских рядов играет большую роль в современной геометрической теории банаховых пространств. В этом параграфе мы приводим некоторые известные конструктивные условия для сходимости п.н. радемахеровских рядов и сумм в банаховом пространстве.

5.1. Сходимость $\sum_{k_n+1}^{k_{n+1}} a_l r_l \rightarrow 0$ λ -п.н. в нормированном пространстве.

Предложение 5.1. Пусть $\sum_1^\infty a_l r_l$ — радемахеровский ряд с коэффициентами $a_l \in X$, $l \in \mathbb{N}$, X — нормированное пространство (действительное или комплексное), и пусть $\mathbf{k} = (k_n)$, $1 = k_1 < k_2 < \dots$, — последовательность натуральных чисел и $I_n := \{k_n + 1, k_n + 2, \dots, k_{n+1}\}$. Тогда $\sum_{l \in I_n} a_l r_l \rightarrow 0$ λ -п.н., если выполняется одно из следующих условий:

- (i) $\sum_{n=1}^\infty \exp \left\{ - \frac{\varepsilon}{\mathbf{E}_\lambda \|\sum_{l \in I_n} a_l r_l\|^2} \right\} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{\lambda} \left\| \sum_{l \in I_n} a_l r_l \right\|^2 < \infty,$$

где $\mathbf{E}_{\lambda}$ — математическое ожидание относительно лебеговой меры λ на $[0, 1]$.

Доказательство. (i) влечет за собой сходимость $\sum_{l \in I_n} a_l r_l \rightarrow 0$ λ -п.н. согласно лемме Бореля–Кантелли и следующему неравенству (см. [19, с. 101]): для любых $x_1, \dots, x_n$ из нормированного пространства X и любого $\varepsilon > 0$

$$\lambda \left[\left\| \sum_1^n x_l r_l \right\| > \varepsilon \right] \leq 2 \exp \left\{ - \frac{\varepsilon^2}{32 \mathbf{E}_{\lambda} \left\| \sum_1^n x_l r_l \right\|^2} \right\}.$$

Из условия (ii) следует (i), поскольку $\exp\{-1/t\} \leq t$, $t > 0$.

Замечания. 1. В отличие от гауссовского случая, условие (i) для радемахеровских сумм $L_n := \sum_{l \in I_n} a_l r_l$ является только достаточным условием сходимости сумм L_n к нулю λ -п.н. Действительно, если $k_n = n$, то $L_n \rightarrow 0$ λ -п.н. тогда и только тогда, когда $a_l \rightarrow 0$. Очевидно, что если последовательность a_l сойдется к нулю достаточно медленно, условие (i) не будет выполнено.

2. Ниже мы неоднократно будем пользоваться тем фактом, что $L_n \rightarrow 0$ λ -п.н., если ряд $\sum_1^{\infty} a_l r_l$ сходится λ -п.н.

5.2. Сходимость λ -п.н. ряда $\sum_1^{\infty} a_l r_l$. Вряд ли существуют эффективные необходимые и достаточные условия (например, выраженные в терминах коэффициентов) в общем случае банахова пространства. Наиболее популярным и известным является необходимое и достаточное условие для случая гильбертова пространства H : если $a_l \in H$, $l \in \mathbb{N}$, то $\sum_1^{\infty} a_l r_l$ сходится λ -п.н. в H тогда и только тогда, когда $\sum_1^{\infty} \|a_l\|^2 < \infty$. Известно также, что пространства L_p , $1 \leq p \leq 2$, имеют тип p и котип 2, т.е. сходимость ряда $\sum \|a_l\|^p$ влечет за собой сходимость λ -п.н. радемахеровского ряда $\sum a_l r_l$, а сходимость λ -п.н. последнего ряда влечет за собой неравенство $\sum \|a_l\|^2 < \infty$; соответственно пространства L_p , $2 \leq p < \infty$, имеют тип 2 и котип p . В теореме 5.2 для класса банаховых решеток, имеющих некоторый котип, приводятся эффективные необходимые и достаточные условия λ -п.н. сходимости ряда $\sum a_k r_k$. Для общего банахова пространства X мы можем сформулировать следующее утверждение, использующее понятия модуля гладкости ρ_X и модуля выпуклости δ_X (см., например, [4]): сходимость ряда $\sum_1^{\infty} \rho_X(\|a_l\|)$ обеспечивает сходимость λ -п.н. ряда $\sum_1^{\infty} a_l r_l$, а сходимость λ -п.н. последнего ряда влечет за собой сходимость ряда $\sum_1^{\infty} \delta_X(\|a_l\|)$.

Теорема 5.2 [24]. Пусть X — банахова решетка. Следующие условия эквивалентны.

- (i) X имеет котип q для некоторого q , $2 \leq q < \infty$;
- (ii) ряд $\sum_1^{\infty} a_l r_l$ сходится λ -п.н. в X тогда и только тогда, когда последовательность $(\sum_1^n |a_l|^2)^{1/2}$ сходится в X при $n \rightarrow \infty$.

Замечания. 1. Известными примерами банаховых решеток являются пространства Орлича $L_{\Phi}(T, \Sigma, \nu)$ с σ -конечной мерой ν , в частности $L_p(T, \Sigma, \nu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Пространство Орлича $L_{\Phi}(T, \Sigma, \nu)$ имеет некоторый котип q , $2 \leq q < \infty$, если Φ удовлетворяет условию Δ_2 . Пространства L_p , $1 \leq p < \infty$, имеют котип $\max\{p, 2\}$.

2. По известной теореме Морэ–Пизье условие (i) теоремы 5.2 эквивалентно следующему известному геометрическому условию (см. [24] и [19, теорема 9.16]):

(iii) X не содержит (l_∞^n) равномерно.

3. Теорема 5.2 была доказана независимо в работе [14] в качестве следствия описания предгауссовских мер в банаховых подрешетках решетки $L_0(T, \Sigma, \nu)$.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 5.2.

Следствие 1. Пусть $X = L_p(T, \Sigma, \nu)$, $1 \leq p < \infty$, где ν есть σ -конечная мера, и $(a_l) \subset X$ — последовательность элементов. Ряд $\sum_1^\infty a_l r_l$ сходится λ -п.н. в X тогда и только тогда, когда

$$\int_T \left(\sum_1^\infty a_l^2 \right)^{p/2} \nu(dt) < \infty.$$

§6. Сходимость ряда $\sum_1^\infty a_{\pi(l)}$ для μ^k -почти всех π

6.1. Следствия теоремы 4.1. В этом параграфе мы используем результаты предыдущего параграфа для получения ряда следствий теоремы 4.1.

Теорема 6.1. Пусть (a_l) — последовательность векторов нормированного пространства X , такая, что некоторая последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} a_l$, $n \in N$, сходится к некоторому вектору $S \in X$. Тогда при выполнении каждого из следующих условий ряд $\sum_1^\infty a_{\pi(l)}$ сходится к S μ^k -п.н.:

- (i) ряд $\sum_1^\infty a_l r_l$ сходится λ -п.н. в X ;
- (ii) $\sum_{n=1}^\infty \exp \left\{ - \frac{\varepsilon}{\mathbf{E}_\lambda \left\| \sum_{l \in I_n^k} a_l r_l \right\|^2} \right\} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;
- (iii) $\sum_1^\infty \rho_X(\|a_l\|) < \infty$, где ρ_X — модуль гладкости пространства X ;
- (iv) X — банахова решетка некоторого котипа q , $2 \leq q < \infty$, и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_1^n |a_l|^2)^{1/2}$;
- (v) $X = L_p(T, \Sigma, \nu)$, $1 \leq p < \infty$, ν есть σ -конечная мера на Σ и

$$\int_T \left(\sum_1^\infty a_l^2 \right)^{p/2} \nu(dt) < \infty.$$

Доказательство. Достаточность условия (i) для μ^k -п.н. сходимости ряда $\sum_1^\infty a_{\pi(l)}$ вытекает из теоремы 4.1, так как из сходимости п.н. ряда $\sum_1^\infty a_l r_l$ вытекает сходимость п.н. к нулю последовательности $\sum_{l \in I_n} a_l r_l$ при $n \rightarrow \infty$.

Достаточность условия (ii) вытекает из теоремы 4.1 и предложения 5.1(i).

Достаточность условия (iii) следует из теоремы 4.1 (см. раздел 5.2).

Достаточность условия (iv) следует из теоремы 4.1 и теоремы 5.3.

Достаточность условия (v) является прямым следствием достаточности условия (iv), поскольку пространство $L_p(T, \sigma, \nu)$, $1 \leq p < \infty$, имеет конечный котип. Теорема доказана.

Замечание. Условие (i) теоремы 6.1 на самом деле эквивалентно условиям (iv) и (v) для соответствующих пространств. Условие (iii) для пространства X , не изоморфного гильбертову пространству, строго сильнее условия (i).

6.2. Существование сходящейся перестановки ряда. Большинство из условий (i)–(v) теоремы 6.1 неоднократно применялись как условия *существования* сходящейся к S перестановки ряда $\sum a_l$. Условие (i) было предложено в [4], хотя доказательство достаточности этого условия фактически содержится в работе [25], долгое время остававшейся незамеченной. Достаточность условия (iii) доказывалась в [11] и [31], условия (iv) — в [4]; для 2-выпуклых банаховых решеток (это частный случай решеток, имеющих некоторый котип q , $2 \leq q < \infty$) условие (iv) использовалось в [23]. Далее, условие (v) как условие существования сходящейся перестановки ряда было введено в [27] при дополнительном ограничении $1 \leq p \leq 2$.

Все эти результаты о существовании сходящейся перестановки восходят к работе Кадеца [15], который впервые рассмотрел случай бесконечномерного пространства — пространства L_p , $1 \leq p < \infty$. Кадец показал, что существование исковой сходящейся перестановки ряда обеспечивается условием $\sum_1^\infty \|a_l\|^d < \infty$, где $d = \min\{p, 2\}$ (с помощью неравенства Гёльдера можно убедиться в том, что последнее условие влечет за собой условие (v) теоремы 6.1).

В заключение раздела приведем наиболее общий результат в проблематике существования сходящейся перестановки, который в случае конечномерного X совпадает со знаменитой теоремой Штейница [30].

Теорема 6.2. Пусть $\sum_1^\infty a_l$ — ряд в локально выпуклом метризуемом пространстве X , такой, что последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} a_l$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $S \in X$. Тогда существует перестановка $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая, что ряд $\sum_1^\infty a_{\pi(l)}$ сходится к S в X , если выполняется следующее условие $(\sigma-\theta)$:

для любой перестановки $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ существует последовательность знаков $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$, такая, что ряд $\sum_1^\infty a_{\sigma(l)} \theta_l$ сходится в X .

Теорема 6.2 в приведенном общем виде была доказана в [3], однако в важном случае нормированного пространства она была доказана впервые в [28] и независимо в [6].

Можно показать с использованием теоремы Дворецкого–Ханани (см. [16, с. 21]), что в случае конечномерного X условие $(\sigma-\theta)$ эквивалентно условию $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, которое является и необходимым условием для существования сходящейся перестановки ряда. Таким образом, мы приходим к теореме Штейница, которая, по-видимому, является первой теоремой о существовании сходящейся перестановки ряда.

Теорема 6.3. Пусть $\sum_1^\infty a_l$ — ряд в конечномерном пространстве X , такой, что последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} a_l$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $S \in X$. Тогда существует перестановка $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая, что ряд $\sum_1^\infty a_l$ сходится к S в X тогда и только тогда, когда $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Как показано в [2], теорема 6.3 остается справедливой для случая метризуемого ядерного локально выпуклого пространства.

Легко убедиться в том, что в общем случае условие $(\sigma-\theta)$ теоремы 6.2 слабее условия сходимости ряда $\sum_1^\infty a_k r_k$. Однако, согласно теореме 6.1, последнее условие обеспечивает гораздо большее — сходимость ряда $\sum_1^\infty a_{\pi(l)}$ для μ^k -почти всех π .

Теоремы о существовании сходящейся перестановки использовались главным образом в связи с задачей о линейности и замкнутости области сумм условно

сходящегося ряда. По поводу истории, связанной с этой весьма интересной задачей, мы отсылаем читателя к монографии [16].

§7. Обобщения теоремы Никишина

В этом параграфе приводятся утверждения о сходящихся п. н. перестановках функциональных рядов. Следующая основная теорема сводится к теореме 4.1 с помощью теоремы Фубини.

Теорема 7.1. Пусть (ξ_k) — последовательность случайных величин, определенных на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и принимающих значения в нормированном пространстве X , такая, что последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} \xi_l$, $n \in \mathbb{N}$, сходится P -п. н. к X -значной случайной величине S . Для того чтобы ряд $\sum_1^\infty \xi_{\pi(l)}$ сходиллся к S $\mu^{\mathbf{k}} \times P$ -п. н. (где $\mathbf{k} = (k_n)$, $1 = k_1 < k_2 < \dots$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k_n+1}^{k_{n+1}} \xi_l r_l \rightarrow 0 \quad P \times \lambda\text{-п. н.}, \quad (7.1)$$

где (r_n) , $n \in \mathbb{N}$, — последовательность радемахеровских случайных величин, определенных на $[0, 1]$ с лебеговой мерой λ .

Следствие 1. Пусть (ξ_k) — последовательность случайных величин, принимающих значения в нормированном пространстве X , такая, что последовательность частичных сумм $S_{k_n} = \sum_1^{k_n} \xi_l$, $n \in \mathbb{N}$, сходится P -п. н. к случайной величине S . Тогда при выполнении каждого из следующих условий (i) и (ii) существует перестановка $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая, что ряд $\sum_1^\infty \xi_{\pi(l)}$ сходится п. н. к S :

(i) X — нормированное пространство и

$$\sum_1^\infty \xi_l r_l \text{ сходится } P \times \lambda\text{-п. н. в } X; \quad (7.2)$$

(ii) $X = \mathbb{R}^1$ или $X = \mathbb{C}^1$ и

$$\sum_1^\infty |\xi_l|^2 < \infty \quad \text{п. н.} \quad (7.3)$$

Доказательство. Достаточность условия (i) вытекает из теоремы 7.1, поскольку (7.2) влечет за собой (7.1). Условие (ii) достаточно, поскольку в случае $X = \mathbb{R}^1$ или $X = \mathbb{C}^1$ условие (7.3) эквивалентно (7.2).

Достаточность условия (ii) есть знаменитая теорема Никишина [27]. Достаточность условия (i) представляет собой обобщение теоремы Никишина на случай нормированного пространства, найденное в [7], [5].

§8. Контрпример

В этом параграфе мы приводим пример ряда, составленного из действительных случайных величин, сходящегося по вероятности и расходящегося п. н. для любой перестановки. Авторы выражают благодарность В. И. Тариеладзе, который обратил их внимание на важность такого примера при дополнительном необходимом ограничении — сходимости п. н. к нулю общего члена.

Пример. Пусть (γ_k) — последовательность независимых одинаково распределенных стандартных гауссовских случайных величин. Введем в рассмотрение (k_n) , последовательность натуральных чисел, определенную равенствами $k_1 = 1$, $k_n = k_{n-1} + n$, $n = 2, 3, \dots$ (т.е. $k_n = n(n+1)/2$), и положим

$$\xi_l = \frac{\gamma_l - \bar{\gamma}(n)}{\sqrt{n \ln n}}, \quad l \in I_n = \{k_{n-1} + 1, \dots, k_n\}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где $\bar{\gamma}(n) = \frac{1}{n} \sum_{l \in I_n} \gamma_l$. Мы утверждаем, что

- (i) ряд $\sum_1^\infty \xi_l$ сходится в L_2 и, следовательно, по вероятности;
- (ii) $\xi_l \rightarrow 0$ п. н. при $l \rightarrow \infty$;
- (iii) для любой перестановки $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ряд $\sum_1^\infty \xi_{\pi(l)}$ не является сходящимся п. н. (более того, для любой перестановки $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ он является расходящимся п. н.).

Заметим, что при $m < n$

$$\begin{aligned} S_{k_{n-1}+1, m} &:= \sum_{l=k_{n-1}+1}^{k_{n-1}+m} \xi_l = \frac{1}{\sqrt{n \ln n}} \left(\sum_{l=k_{n-1}+1}^{k_{n-1}+m} \gamma_l - m \bar{\gamma}(n) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n \ln n}} \left(\sum_{l=k_{n-1}+1}^{k_{n-1}+m} \gamma_l \left(1 - \frac{m}{n} \right) - \frac{m}{n} \sum_{l=k_{n-1}+m+1}^{k_n} \gamma_l \right) \end{aligned} \quad (8.1)$$

и $S_{k_{n-1}+1, n} = 0$. Заметим также, что σ -алгебры $\mathcal{B}_n$, порожденные случайными величинами $(\xi_l)_{l \in I_n}$, независимы.

Для доказательства п. (i) вычислим дисперсию суммы $S_{k_{n-1}+1, m}$ при $m \leq n$:

$$\mathbf{E}|S_{k_{n-1}, m}|^2 = \frac{1}{n \ln n} \left(\left(1 - \frac{m}{n} \right)^2 m + \frac{m^2}{n^2} (n - m) \right) \leq \frac{2}{\ln n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это значит, что $S_{k_{n-1}+1, m_n} \rightarrow 0$ в L_2 при $n \rightarrow \infty$ для любой последовательности m_n , $m_n \leq n$. Так как $S_{k_{n-1}, n} = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то отсюда вытекает, что ряд $\sum_1^\infty \xi_l$ сходится в L_2 и, следовательно, по вероятности.

Для доказательства п. (ii) вычислим дисперсию случайной величины ξ_l , $l \in I_n$, учитывая, что $\sqrt{l} \leq n \leq 2\sqrt{l}$:

$$\begin{aligned} \sigma_l^2 &:= \mathbf{E}|\xi_l|^2 = \frac{1}{n \ln n} \mathbf{E} \left(\gamma_l \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{\sum_{i \neq l} \gamma_i}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n \ln n} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{n-1}{n^2} \right] \leq \frac{4}{\sqrt{l} \ln l}. \end{aligned}$$

Теперь сходимость $\xi_l \rightarrow 0$ вытекает из следующего критерия (см., например, [21]).

Лемма. Гауссовская последовательность (η_l) с монотонно убывающими дисперсиями σ_l^2 сходится к нулю п. н., если

$$\sigma_l \sqrt{\ln l} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

Если, кроме того, (η_l) — независимая система, то условие (8.2) является и необходимым для сходимости п. н. к нулю последовательности (η_n) .

Для доказательства п. (iii) сначала убедимся в том, что сам ряд $\sum_1^\infty \xi_l$ не сходится к нулю п. н. Согласно (8.1), для каждого четного n

$$S_{k_{n-1}+1, n/2} = \sum_{k_{n-1}+1}^{k_{n-1}+n/2} \xi_l = \frac{1}{2\sqrt{n \ln n}} \left(\sum_{k_{n-1}+1}^{k_{n-1}+n/2} \gamma_l - \sum_{k_{n-1}+1+n/2}^{k_n} \gamma_l \right). \quad (8.3)$$

Несложные вычисления показывают, что стандартное отклонение случайной величины $S_{k_{n-1}+1, n/2}$ равно $\sigma = 1/(2\sqrt{\ln n})$. Поскольку $\{S_{k_{n-1}+1, n/2}, n \geq 1\}$ есть последовательность независимых гауссовских случайных величин, по приведенной выше лемме она не сходится п. н. к нулю и, следовательно, ряд $\sum_1^\infty \xi_n$, согласно критерию Коши, расходится п. н.

Рассмотрим теперь общую перестановку $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и положим

$$A_n = \pi^{-1}\{k_{n-1} + 1, k_{n-1} + 2, \dots, k_n\} = \{a(n, l) : l = 1, \dots, n\},$$

где $a(n, 1) < a(n, 2) < \dots < a(n, n)$. Введем также обозначения

$$Y_n := \sum_{l=a(n, 1)}^{a(n, n/2)} \xi_{\pi(l)} \cdot 1_{\{l \in A_n\}} \quad \text{и} \quad Z_n := \sum_{l=a(n, 1)}^{a(n, n/2)} \xi_{\pi(l)} \cdot 1_{\{l \notin A_n\}}.$$

Ясно, что $Y_n + Z_n = \sum_{l=a(n, 1)}^{a(n, n/2)} \xi_{\pi(l)}$. По критерию Коши достаточно показать, что

$$P\{Y_n + Z_n \not\rightarrow 0\} = 1. \quad (8.4)$$

Следующие два свойства случайных величин Y_n вытекают из определения:

(а) Y_n имеет то же распределение, что и $S_{k_{n-1}+1, n/2}$, для любого четного $n \in \mathbb{N}$;

(б) $\{Y_n : n \geq 1\}$ есть последовательность независимых случайных величин, не сходящаяся п. н. к нулю (более того, она почти всюду расходится).

Из (б) вытекает, что для некоторого $t > 0$

$$P(|Y_n| > t \text{ бесконечно часто}) = 1. \quad (8.5)$$

Ниже нам понадобится следующая функция $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$\varphi(k) = \inf\{m > k : L_k \text{ и } G_m \text{ независимы}\},$$

где $L_k := \sigma\{Y_1, Z_1, \dots, Y_k, Z_k\}$ и $G_m := \sigma\{Y_m, Z_m, Y_{m+1}, Z_{m+1}, \dots\}$ обозначают σ -алгебры, порожденные рассматриваемыми случайными величинами.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и определим по индукции случайную строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k : k \geq 1\}$, такую, что

(а) $P(\bigcap_{k=1}^\infty \{|Y_{n_k}| > t\}) \geq 1 - \varepsilon$;

(б) $\{(Y_{n_k}, Z_{n_k}), k \geq 1\}$ есть независимая последовательность пар случайных величин;

(с) для каждого $k \in \mathbb{N}$ двумерный случайный вектор (Y_{n_k}, Z_{n_k}) имеет симметричное распределение; кроме того, случайные величины $\text{sign}(Y_{n_k})$ и Z_{n_k} независимы.

Пусть $m_1 = \inf\{m \geq 1 : |Y_m| \geq t\}$. Согласно (8.5), имеем $m_1 < \infty$ п. н. Следовательно, мы можем выбрать натуральное (неслучайное) число N_1 , такое, что $P(m_1 \geq N_1) \leq \varepsilon/2$. Выберем далее $n_1 = \min\{m_1, N_1\}$. Очевидно, что $P(|Y_{n_1}| > t) \geq 1 - \varepsilon/2$. Положим теперь $m_2 = \inf\{m > \varphi(N_1) : |Y_m| \geq t\}$. Снова, согласно (8.5), мы имеем $m_2 < \infty$ п. н. и, как и на первом шаге, выбираем

N_2 так, чтобы $P(m_2 \geq N_2) \leq \varepsilon/2^2$. Затем полагаем $n_2 = \min\{m_2, N_2\}$. Заметим, что $n_1 \leq N_1 < \varphi(N_1) \leq n_2 \leq N_2$. По построению $P(\bigcap_{k=1}^2 \{|Y_{n_k}| > t\}) \geq 1 - \varepsilon/2 - \varepsilon/2^2 > 1 - \varepsilon$. Дальнейшее построение случайных индексов (n_k) по индукции очевидно. Пункт (а) выполняется, поскольку по построению

$$P\left(\bigcap_{k=1}^m \{|Y_{n_k}| > t\}\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2^2} - \dots - \frac{\varepsilon}{2^m} > 1 - \varepsilon$$

для любого $m \in \mathbb{N}$. Для доказательства п. (b) достаточно показать, что пара случайных величин (Y_{n_1}, Z_{n_1}) измерима относительно σ -алгебры L_{N_1} , а (Y_{n_2}, Z_{n_2}) — относительно σ -алгебры $G_{\varphi(N_1)}$. Требуемая независимость тогда будет следовать из независимости σ -алгебр L_{N_1} и $G_{\varphi(N_1)}$. Нужная измеримость следует из равенств

$$\begin{aligned} Y_{n_1} &= \sum_{k=1}^{N_1-1} Y_k \cdot 1_{A_k} + Y_{N_1} \cdot 1_{B_{N_1}}, & Z_{n_1} &= \sum_{k=1}^{N_1-1} Z_k \cdot 1_{A_k} + Z_{N_1} \cdot 1_{B_{N_1}}, \\ Y_{n_2} &= \sum_{k=\varphi(N_1)+1}^{N_2-1} Y_k \cdot 1_{C_k} + Y_{N_2} \cdot 1_{D_{N_2}}, & Z_{n_2} &= \sum_{k=\varphi(N_1)+1}^{N_2-1} Z_k \cdot 1_{C_k} + Z_{N_2} \cdot 1_{D_{N_2}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \{|Y_1| < t, \dots, |Y_{k-1}| < t, |Y_k| \geq t\}, \\ B_k &= \{|Y_1| < t, \dots, |Y_{k-1}| < t\}, \\ C_k &= \{|Y_{\varphi(N_1)+1}| < t, \dots, |Y_{k-1}| < t, |Y_k| \geq t\}, \\ D_k &= \{|Y_{\varphi(N_1)+1}| < t, \dots, |Y_{k-1}| < t\}. \end{aligned}$$

Для доказательства п. (с) заметим, что последовательности случайных величин $\{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{-\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ являются равнораспределенными. Отсюда вытекает равнораспределенность последовательностей $\{Y_n, Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{-Y_n, -Z_n, n \in \mathbb{N}\}$. Учитывая этот факт, а также конструкцию примера, нетрудно заключить, что распределение случайного вектора (Y_{n_k}, Z_{n_k}) симметрично.

Покажем теперь, что случайные величины $\text{sign}(Y_{n_l})$ и Z_{n_l} независимы для каждого $l \in \mathbb{N}$. Мы сделаем это для $l = 1$, доказательство для произвольного $l \in \mathbb{N}$ совершенно аналогично. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — произвольное измеримое множество. Учитывая симметричность распределения случайной величины Y_k для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$, а также независимость случайной величины $\text{sign}(Y_k)$ от σ -алгебры $\sigma\{Z_k, |Y_l|, l = 1, \dots, k\}$, получаем

$$\begin{aligned} P(\text{sign}(Y_{n_1}) = +1, Z_{n_1} \in E) &= \sum_{k=1}^{N_1} P(\text{sign}(Y_k) = +1, Z_k \in E, n_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N_1-1} P(\text{sign}(Y_k) = +1, Z_k \in E; A_k) + P(\text{sign}(Y_{N_1}) = +1, Z_{N_1} \in E; B_{N_1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N_1-1} P(\text{sign}(Y_k) = +1) \cdot P(Z_k \in E, n_1 = k) \\ &\quad + P(\text{sign}(Y_{N_1}) = +1) \cdot P(Z_{N_1} \in E; B_{N_1}) \\ &= \frac{1}{2} P(Z_{n_1} \in E). \end{aligned}$$

В частности, из п. (с) вытекает, что $P(\text{sign}(Y_{n_k}) = \text{sign}(Z_{n_k})) = 1/2$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, и по лемме Бореля–Кантелли и п. (b) получаем

$$P(\text{sign}(Y_{n_k}) = \text{sign}(Z_{n_k}) \text{ бесконечно часто}) = 1.$$

Теперь справедливость п. (а) дает

$$P(|Y_{n_k}| > t, \text{sign}(Y_{n_k}) = \text{sign}(Z_{n_k}) \text{ бесконечно часто}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что

$$P(|Y_{n_k} + Z_{n_k}| > t \text{ бесконечно часто}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Это означает, что $P(Y_n + Z_n \rightharpoonup 0) \geq 1 - \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $Y_n + Z_n \rightharpoonup 0$ п.н.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Problem 106 (S. Banach)*, in: The Scottish Book. Mathematics from Scottish Cafe (ed. R. D. Mauldin), Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1981.
- [2] W. Banaszczyk, *Steinitz theorem on rearrangement of series for nuclear spaces*, J. Reine Angew. Math., **403** (1990), 187–200.
- [3] M.-J. Chasco, S. A. Chobanyan, *On rearrangements of series in locally convex spaces*, Mich. Math. J., **44**:3 (1997), 607–617.
- [4] С. А. Чобанян, *Структура множества сумм условно сходящегося ряда в нормированном пространстве*, Матем. сб., **128(170)**:1(9) (1985), 50–65.
- [5] S. A. Chobanyan, *Convergence a.s. of rearranged random series in Banach spaces and associated inequalities*, in: Probability in Banach Spaces, 9, Proc. of 9th International Conference on Probability in Banach Spaces, Sandbjerg, 1993, Prog. Probab., vol. 35, Birkhäuser, Boston, MA, 1994, 3–29.
- [6] S. Chobanyan, G. Giorgobiani, *A problem on rearrangements of summands in normed spaces and Rademacher sums*, in: Probability theory on vector spaces IV, Proc. of Conference, Lancut, 1987, Lecture Notes of Math., vol. 1391, Springer-Verlag, Berlin, 33–46.
- [7] S. Chobanyan, G. Giorgobiani, *Almost sure permutational convergence of vector random series and Kolmogorov problem*, in: New Trends in Probability and Statistics, Proc. of 23rd Bakuriani Colloq., Bakuriani 1990, vol. 1, VSP, Utrecht, 1991, 93–105.
- [8] S. Chobanyan, S. Levental, V. Mandrekar, *Prokhorov blocks and strong law of large numbers under rearrangements*, J. Theoret. Probab., **17**:3 (2004), 647–672.
- [9] S. Chobanyan, V. Mandrekar, *Almost everywhere convergence and SLLN under rearrangements*, in: Stochastic processes and related topics, Trends Math., Birkhauser, Boston, 1998, 25–34.
- [10] S. Chobanyan, V. Mandrekar, *On Kolmogorov SLLN under rearrangements for “orthogonal” random variables in a B-space*, J. Theoret. Probab., **13**:1 (2000), 135–139.
- [11] В. П. Фонф, *Условно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом банаховом пространстве*, Матем. заметки, **11**:2 (1972), 209–214.
- [12] A. Garsia, *Existence of almost everywhere convergent rearrangements for Fourier series of L_2 functions*, Ann. of Math., **79** (1964), 623–629.
- [13] A. Garsia, *Topics in Almost Everywhere Convergence*, Markham Publ. Co., Chicago, 1970.
- [14] З. Г. Горгадзе, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Гауссовские ковариации в банаховых подрешетках пространства $L_0(T, \Sigma, \nu)$* , Докл. АН СССР, **241**:3 (1978), 528–531.
- [15] М. И. Кадец, *Об условно сходящихся рядах в пространстве L^p* , УМН, **9**:1 (1954), 107–109.

- [16] M. I. Kadets, V. M. Kadets, *Series in Banach Spaces: Conditional and Unconditional Convergence*, Birkhauser, Boston, 1997.
- [17] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.
- [18] С. В. Конягин, *О равномерно сходящихся перестановках тригонометрических рядов Фурье*, в кн.: Теория функций, СМФН, vol. 25, РУДН, М., 2007, 80–87.
- [19] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces. Isometry and Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [20] S. Levental, *A maximal inequality for real numbers with application to exchangeable random variables*, ТВП, **45**:3 (2000), 615–621.
- [21] В. Линде, А. Пич, *Отображения гауссовских цилиндрических мер в банаховых пространствах*, ТВП, **19** (1974), 472–487.
- [22] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, II, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
- [23] Р. П. Малеев, *Об условно сходящихся рядах в некоторых банаховых решетках*, С. R. Acad. Bulgare Sci., **32**:8 (1979), 1015–1018.
- [24] B. Maurey, *Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionnelles*, in: Séminaire Maurey–Schwartz 1973–1974, Exp. 24, 25, Centre Math., École Polytech., Paris, 1974.
- [25] B. Maurey, G. Pisier, *Remarques sur l'exposé de P. Assouad "Espaces p -lisses, réarrangements"*, in: Séminaire Maurey–Schwartz 1974–1975, Annexe 1, Centre Math., École Polytech., Paris, 1975.
- [26] Е. М. Никишин, *О сходящихся перестановках функциональных рядов*, Матем. заметки, **1**:2 (1967), 129–136.
- [27] Е. М. Никишин, *О перестановках рядов в L_p* , Матем. заметки, **14**:1 (1973), 31–38.
- [28] Д. В. Печерский, *Перестановки рядов в банаховых пространствах и расстановки знаков*, Матем. сб., **135(177)**:1 (1988), 24–35.
- [29] Sz. Gy. Révész, *Rearrangement of Fourier series and Fourier series whose terms have random signs*, Acta Math. Hungar., **63**:4 (1994), 395–402.
- [30] E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, J. Reine Ang. Mathematik, **143** (1913), 128–175; **144** (1914), 1–40; 1916, 1–52.
- [31] С. Л. Троянский, *Условная сходимость рядов и некоторые F -пространства*, Теория функций и функц. анализ и прилож., **5** (1967), 102–107.
- [32] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985.

Michigan State University
e-mail: levental@stt.msu.edu

Поступило в редакцию
26 августа 2009 г.

Michigan State University
e-mail: mandrekar@stt.msu.edu

Институт вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили
e-mail: chobanyan@stt.msu.edu