Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горин, Функция Мёбиуса на абелевых полугруппах, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 1, 88–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3027>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:12:56

строго меньше 1. Множество $\bar{K}_1 = \{(s, t) \mid s \in D, t \in P, (p_1, s) \leq c_1\}$ выпукло, компактно и содержит K_1 ; поэтому $cc(K_1) \subseteq \bar{K}_1$.

Так как $p \in cc(K)$ и $K = K_1 \cup K_2$, а $cc(K_1)$ и $cc(K_2)$ — выпуклые компакты в $D \times P$, то точка p лежит на отрезке, соединяющем какие-то две точки $x \in cc(K_1)$ и $y \in cc(K_2)$. При этом $p \neq x$ и $p \neq y$, поскольку $c < f(p_2)$. Но это возможно, только если $p_1 \in D \setminus S$. Противоречие. $\square$

Из непрерывности отображения $x \mapsto \alpha(x)$ и утверждений примера 1 вытекают следующие факты.

Утверждение 2. *Отображение F' полунепрерывно снизу.*

Утверждение 3. *Отображение F' не имеет непрерывной селекции.*

Из теоремы Майкла и Намиоки и построенного примера следует, что Y' не является G_δ -подмножеством банахова пространства $\mathbb{R}^2 \times l_2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. A. Michael, Ann. of Math., **63** (1956), 361–382. [2] E. A. Michael, in: Open Problems in Topology, North Holland, Amsterdam, 1990, 271–278. [3] V. V. Filippov, Comment. Math. Univ. Carolinae, **45**:4 (2004), 735–737. [4] В. В. Филиппов, Матем. заметки, **78**:4 (2005), 638–640. [5] I. Namioka, E. A. Michael, Topology Appl., **155**:8 (2008), 858–860. [6] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975. [7] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Изд-во МГУ, М., 1988.

Московский государственный университет
e-mail: mir14mai@inbox.ru

Поступило в редакцию
31 июля 2009 г.

Московский государственный университет
e-mail: vvfil@mech.math.msu.su

УДК 517.588+512.548.2

Функция Мёбиуса на абелевых полугруппах

© 2011. Е. А. Горин

1. Формулы обращения были открыты Мёбиусом в 30-е годы XIX века. Частные случаи встречаются у Гаусса, однако в общем объеме Гаусс их, вероятно, не знал, иначе Мёбиус, который учился у Гаусса (наблюдательной астрономии), не мог на него не сослаться. В середине века они были переоткрыты, в частности, П. Л. Чебышёвым и Б. Риманом (оба ни на кого не ссылаются).

В XX веке были обнаружены многочисленные обобщения, среди которых одним из наиболее удачных является найденное Ротой, который широко применял полученные им формулы к проблемам комбинаторики и геометрии. Теория Роты кратко описана в [1]. В этой теории исходным объектом служит локально конечное частично упорядоченное множество X . Роль ζ -функции играет такая матрица ρ , что $\rho(x, y)$ равно 1 при $x \leq y$ и 0 в остальных случаях. Обратная к ней матрица играет роль функции Мёбиуса. Когда в качестве X берется натуральный ряд с порядком $a|b$ (делимость нацело), формулы Роты согласуются

с классическим теоретико-числовым соотношением между мёбиусовой последовательностью и ζ -функцией Римана (которой в «натуральном» представлении отвечает последовательность, все элементы которой равны 1 (главный характер)).

Наш исходный объект — абелева полугруппа X с операцией $a \times b$ и единицей $\mathbb{I}$. Предполагается, что выполняются следующие условия изолированности единицы и локальной конечности: если $a \times b = \mathbb{I}$, то $a = b = \mathbb{I}$; для каждого $c \in X$ множество пар $\{x, y \in X \mid x \times y = c\}$ конечно.

Здесь в основном мы будем считать Λ полем. Однако теорию можно развивать над произвольным коммутативным кольцом Λ с единицей 1_Λ , и это проделано в подробном тексте для последнего тома «Чебышевского сборника» 2009 г., который до сих пор не вышел (впрочем, в том, что касается определений, различий нет). Существенное исключение: вопрос о существовании целочисленной функции Мёбиуса. Однако этот вопрос можно рассматривать, отправляясь от поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Кстати, для случая $\mathbb{Z}$ -значной функции Мёбиуса довольно громоздкое достаточное условие без предположения коммутативности отмечается в [2, с. 379], на что обратил мое внимание не известный мне рецензент одного из первоначальных вариантов работы. Заметим, что указанное в [2] условие *заведомо нарушается*, если полугруппа содержит идемпотент $\neq \mathbb{I}$. Оказывается, что в случае коммутативных полугрупп оно, наряду с более прозрачными (в частности, отсутствием нетривиальных идемпотентов), будет и необходимым, и достаточным.

О случае $\Lambda = \mathbb{C}$ (поле комплексных чисел) я кратко рассказывал раньше [3]. Этот случай является важным, но не исчерпывающим: существование функции Мёбиуса, вообще говоря, зависит от характеристики поля (кольца) значений.

В свое время я узнал о теории Роты от Р. С. Исмагилова. Я весьма признателен ему также за то, что его конструктивная критика помогла мне сделать данный текст заметно более внятным. Кроме того, я учел ряд замечаний, сделанных рецензентами.

2. Пусть $\mathcal{E}$ — (свободный) Λ -модуль всех функций на X со значениями в Λ . Локальная конечность полугруппы X позволяет наделить $\mathcal{E}$ структурой коммутативной полугрупповой Λ -алгебры: если u, v — функции на X со значениями в Λ , то Λ -линейные операции определяются поточечно, а в качестве умножения берется свертка:

$$(u * v)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \{u(a)v(b) \mid a \times b = x\}.$$

Положим $\varepsilon(x) = 1_\Lambda$ при всех $x \in X$. Далее, как обычно, $\delta(\mathbb{I}) = 1_\Lambda$ и $\delta(x) = 0_\Lambda$ при остальных $x \in X$. Нижний индекс Λ часто опускается. Заметим, что в классической ситуации ζ -функция получается из ε переходом к «преобразованию Фурье» и что δ служит единицей по свертке. Отображения $a \rightarrow \delta_a$ (где δ_a — сдвиг δ -функции в точку a) и $\lambda \rightarrow \lambda \cdot 1_\Lambda$ включают X и Λ в $\mathcal{E}$.

Функцией Мёбиуса μ называется решение уравнения $\varepsilon * \mu = \delta$.

Характерное свойство функции Мёбиуса состоит в том, что для каждой пары f, g функций с конечными носителями имеет место эквивалентность

$$g(x) = \sum_{y \in X} f(x \times y) \iff f(x) = \sum_{y \in X} \mu(y)g(x \times y).$$

Функция Мёбиуса, если она существует, единственна. В частности, если X — натуральный ряд $\mathbb{N}$ с *умножением* в качестве операции, то она совпадает с классической. Ряд других интересных примеров дают подполугруппы полугруппы $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел со *сложением* в качестве операции. В частности, легко убедиться, что для всей этой полугруппы $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = -1$ и $\mu(n) = 0$ при всех остальных (положительных) целых n . Еще к одной серии интересных примеров приводят конечные моногенные (циклические) полугруппы (см., например, [4, с. 38]), дополненные единицей $\mathbb{I}$.

3. По определению Λ -модуль $\mathcal{F}$ состоит из Λ -значных функций на X с *конечными носителями*. Хотя $\mathcal{F}$ составляет часть $\mathcal{E}$, элементы из этих объектов целесообразно *строго различать*, подобно тому как различаются пробные функции и распределения.

В частности, свертка элементов $u \in \mathcal{E}$ и $f \in \mathcal{F}$ определяется равенством $(u \star f)(x) = \sum_{y \in X} u(y)f(x \times y)$ (т.е. определяется и намеренно обозначается иначе, чем свертка двух элементов из $\mathcal{E}$) и является элементом из $\mathcal{F}$. В этих обозначениях эквивалентность, определяющая функцию Мёбиуса, представляется в виде $g = \varepsilon \star f \iff f = \mu \star g$. Аналог в $\mathcal{F}$ сдвинутой в точку $a \in X$ функции Дирака δ_a обозначается через Δ_a . Формально говоря, никакая свертка двух элементов из $\mathcal{F}$ не рассматривается¹⁾.

Элементы $u \in \mathcal{E}$ и $f \in \mathcal{F}$ допускают спаривание: $\langle u, f \rangle = \sum_x u(x)f(x)$, и в таком виде реализуются все Λ -линейные формы на $\mathcal{F}$.

Для любых $u \in \mathcal{E}$ и $f \in \mathcal{F}$ положим $T_u f = u \star f$. Тогда получится точное представление алгебры $\mathcal{E}$ алгеброй $\mathfrak{A}$ операторов T_u в $\mathcal{F}$. Легко проверяется, что u , T_u и T_u^* одновременно обратимы или нет. При $a, b \in X$ положим $\tau_u(a, b) = \langle \delta_a, T_u \Delta_b \rangle$, и к условию обратимости оператора T_u присоединяется условие обратимости матрицы τ_u . В частности, $\tau_\varepsilon(a, b) = \sigma(a, b) \cdot 1_\Lambda$, где $\sigma(a, b)$ — число решений уравнения $a \times x = b$.

4. Алгебраическая операция индуцирует на X *квазипорядок* в соответствии с правилом $a \leq b \iff b = a \times x$ при некотором $x \in X$. Если возникает частичный порядок, то матрица σ совпадает с матрицей ρ .

При $c \in X$ положим $X_c = \{x \mid x \leq c\}$ и $\mathcal{F}_c = \{f \in \mathcal{F} \mid \text{supp}(f) \subset X_c\}$. Заметим, что X_c — конечное множество.

Легко проверить, что $T_u(\mathcal{F}_c) \subset \mathcal{F}_c$ и что T_u обратим тогда и только тогда, когда обратимы все сужения $T_u|_{\mathcal{F}_c}$. В частности, функция Мёбиуса существует тогда и только тогда, когда $\det(\sigma_c) \cdot 1_\Lambda$ обратим при каждом $c \in X$, где σ_c — сужение матрицы σ на $X_c \times X_c$. Положим $\mathfrak{A}_c = \mathfrak{A}|_{\mathcal{F}_c}$.

Идеалом в X называется такое подмножество $I \neq X$, что $a \times x \in I$ для всех $x \in X$, если $a \in I$. Идеал I называется простым, если из $a \times b \in I$ вытекает, что хотя бы один из элементов a , b содержится в I . Эти определения формально не отличаются от тех, которые дают в теории колец, однако наличие лишь одной операции придает этим и многим аналогичным понятиям иное содержание (обсуждение этой темы можно найти, например, в [4]). В частности, в нашем случае, если $X \neq \{\mathbb{I}\}$, то $X \setminus \{\mathbb{I}\}$ — простой идеал.

¹⁾Вероятно, последовательный формалист должен считать различными даже области определения функций из $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, но мы этого все-таки не делаем.

Простым дополнением $Y \subset X$ называется теоретико-множественное дополнение $X \setminus I$ к простому идеалу I .

Простое дополнение Y , как легко видеть, — подполугруппа, причем включение $a \times b \in Y$ имеет место тогда и только тогда, когда оба элемента a, b принадлежат Y (и каждая такая подполугруппа — простое дополнение). Поэтому сужение функции Мёбиуса на простое дополнение — функция Мёбиуса на этой подполугруппе (хотя на какой-то подполугруппе может вообще не быть функции Мёбиуса при наличии ее на X). Прямое слагаемое — простое дополнение, и функция Мёбиуса мультипликативна на независимых парах¹⁾. В частности, классическая функция Мёбиуса сразу выписывается по функции Мёбиуса полугруппы $\mathbb{Z}_+$, так как (по основной теореме арифметики) $\mathbb{N}$ — счетная прямая сумма копий $\mathbb{Z}_+$.

Через $\{\mathbb{F}, \times\}$, где $\mathbb{F}$ — поле, обозначается полугруппа поля $\mathbb{F}$ по умножению (т.е. про сложение «забывается»).

Все гомоморфизмы $\chi: X \rightarrow \{\mathbb{F}, \times\}$, сохраняющие единицу, называются характерами. Очевидно, что $\{x \mid \chi(x) = 0\}$ — простой идеал.

Если поле $\mathbb{F}$ — расширение кольца Λ и χ имеет конечный носитель, то для каждого $u \in \mathcal{E}$ имеет смысл $\hat{u}(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_x u(x)\chi(x)$. В частности, имеет смысл $\hat{\varepsilon}(\chi)$. Эта функция при $\Lambda = \mathbb{C}$ расширяется на суммируемые характеры, что в классическом случае приводит к ζ -функции Римана (берутся характеры $n \rightarrow n^{-s}$, $\text{Re } s > 1$).

5. В этом разделе существенно, что Λ — поле (а не кольцо, это упрощает формулировки).

Фиксируем $c \in X$. Тогда $\mathfrak{A}_c$ — конечномерная Λ -алгебра. Обратимость элемента $A \in \mathfrak{A}_c$ имеет место тогда и только тогда, когда $A \notin M$, где M — (произвольный) максимальный идеал в $\mathfrak{A}_c$. Легко видеть, что поле $\mathbb{F} = \mathfrak{A}_c/M$ — конечное расширение поля Λ . Пусть φ — сквозной гомоморфизм

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_c \rightarrow \mathfrak{A}_c/M = \mathbb{F}.$$

Гомоморфизму φ соответствует характер χ , $\chi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\delta_x)$, причем $\hat{u}(x) = \varphi(u)$ для каждого $u \in \mathcal{E}$. В совокупности эти соображения приводят к следующему результату.

Теорема 1. *Элемент $u \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда обратим, когда $\hat{u}(\chi) \neq 0$ для каждого имеющего конечный носитель характера χ со значениями из какого-нибудь (но произвольного) конечного расширения поля Λ .*

Разумеется, в такой формулировке главное — достаточность. В некоторых важных случаях формулировка упрощается. Например, функция Мёбиуса существует или нет одновременно для всех полей характеристики 0, а ее значения принадлежат $\mathbb{Q}$. Условие $\hat{\varepsilon}(\chi) \neq 0$ в этом случае достаточно проверять только для финитных характеров $\chi: X \rightarrow \{\mathbb{C}, \times\}$.

Вообще, существование $\mathbb{C}$ -функции Мёбиуса вытекает из ее существования для какого-нибудь поля. С другой стороны, существование $\mathbb{Z}$ -функции Мёбиуса влечет за собой ее существование для всех полей (и колец).

¹⁾Независимость $x_1, x_2 \in X$ означает (как в теории вероятностей) возможность такого разложения $X = X_1 \times X_2$, что $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

6. В дальнейшем используется то обстоятельство, что ± 1 и только эти два числа обратимы в $\mathbb{Z}$ и могут быть охарактеризованы тем, что только они $\not\equiv 0 \pmod{p}$ при каждом простом p . Кроме того, для доказательства применяется теорема Фробениуса, согласно которой каждая нетривиальная конечная полугруппа содержит идемпотент $\neq \mathbb{I}$ (см. [4, с. 40]).

Теорема 2. *Существование целозначной функции Мёбиуса эквивалентно каждому из следующих условий: $\det(\sigma_c) = \pm 1$ для любого $c \in X$; на X нет финитных характеров со значениями в полугруппе $\{\mathbb{F}, \times\}$, отвечающей конечному (произвольному) полю $\mathbb{F}$, кроме характера $\chi_0 = \delta$, для которого $\chi_0(\mathbb{I}) = 1$ и $\chi_0(x) = 0$ при остальных $x \in X$; в X нет идемпотентов, кроме $\mathbb{I}$; если $a \times b = a$, то $b = \mathbb{I}$ (тогда квазипорядок будет частичным порядком, и $\sigma = \rho$).*

7. В этом разделе мы проиллюстрируем приведенные выше теоремы примерами.

Пример 1. Этот пример аналогичен стандартному примеру в теории Роты (см., например, [1, формула (2.2.10)]). Пусть X — множество всех конечных подмножеств некоторого множества, включая пустое, с операцией $x \cup y$. Каждое X_c является простым дополнением. Используя σ_c -матрицы и применяя индукцию по $\text{Card}(x)$, легко получить формальное соотношение

$$(-2)^{\text{Card}(x)} \cdot \mu(x) = 1_\Lambda,$$

которое превращается в строгое равенство, если $\text{char}(\Lambda) \neq 2$. Это же соотношение показывает, что при $\text{char}(\Lambda) = 2$ функции Мёбиуса нет.

Пример 2. Пусть X — подполугруппа в $\mathbb{Z}_+$, причем $0 \in X$ и числа из X в совокупности взаимно просты. Тогда X , кроме некоторого конечного набора $\{0, k_1, k_2, \dots, k_r\}$, содержит также все числа, начиная с некоторого m . Если X допускает пару образующих p, q , то $m - 1 = pq - p - q$ (Сильвестр), но в общем случае ситуация сложнее.

Из теоремы 2 вытекает, что X обладает $\mathbb{Z}$ -значной функцией Мёбиуса. Введем формальную ζ -функцию $\zeta_X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in X} z^k$. Ясно, что

$$\zeta_X(z) = 1 + \sum_i z^{k_i} + z^m/(1 - z),$$

так что эта функция является рациональной без нулей и особенностей в окрестности точки 0. Коэффициенты Тейлора функции $1/\zeta_X$ дают функцию Мёбиуса. В частности, при $X = \{0, 3, 4, \dots\}$ функция ζ_X имеет нули в диске $|z| < 1$, так что у μ возникает экспоненциальный рост по k . Степенной рост может быть ровно в том случае, когда в этом диске нет нулей, а на границе есть кратные нули. Ни одного такого примера ζ_X -функции я не знаю. Кстати, вопрос о существовании кратных нулей у классической ζ -функции, кажется, также остается открытым.

Пример 3. Моногенная (циклическая) полугруппа с образующей x определяется соотношением $x^s = x^r$, где $r < s$ и s выбирается минимально возможным. Добавляя $\mathbb{I}$, мы получаем полугруппу X порядка s . $\mathbb{C}$ -значная функция Мёбиуса существует тогда и только тогда, когда $\gcd(r, s) = 1$. Функция Мёбиуса со значениями в простом поле $\mathbb{Z}/(p)$ существует тогда и только тогда, когда дополнительно p не встречается среди делителей s .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970. [2] Ж. Лаллеман, *Полугруппы и комбинаторные приложения*, Мир, М., 1985. [3] Е. А. Горин, Формулы обращения Чебышева–Мёбиуса в контексте абелевых полугрупп, в кн.: IV Международная конференция по теории чисел и прил., Тула (2001), Тезисы докл., Изд-во МГУ, 2001, 48–49. [4] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, т. I, Мир, М., 1972.

Московский педагогический
государственный университет,
кафедра математического анализа
e-mail: evgeny.gorin@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
15 апреля 2010 г.

УДК 517.923+517.956.227

О спектре третьей краевой задачи в области с пиком*

© 2011. С. А. НАЗАРОВ, Я. ТАСКИНЕН

Памяти М. Ш. Бирмана посвящается

Пусть ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Введем пик высоты $d > 0$

$$\Pi_d = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : z \in (0, d), z^{-1-\gamma}y \in \omega\} \quad (1)$$

и область Ω , совпадающую с пиком Π_d внутри цилиндра $\{x : |y| < R, z \in (0, d)\}$, причем $R > 0$, $\overline{\Omega}$ — компакт, $\gamma \geq 0$ — показатель заострения, а граница $\Gamma = \partial\Omega$ заведомо липшицева всюду, кроме вершины пика $\mathcal{O}$. Рассмотрим третью краевую спектральную задачу в вариационной постановке

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (bu, v)_\Gamma = \lambda(u, v)_\Omega, \quad v \in H^1(\Omega) \cap L_2(\Gamma), \quad (2)$$

где ∇ — градиент, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$, λ — спектральный параметр, а b — вещественная измеримая ограниченная функция на Γ , удовлетворяющая при некотором $b_0 \in \mathbb{R}$ соотношению

$$|b(x) - b_0| \leq c_b |x|^\alpha \quad \text{при п. в. } x \in \Gamma, \quad \alpha > 0. \quad (3)$$

Если $\gamma = 0$, то Π_d — конус, Γ — липшицева поверхность и ввиду компактности вложений пространства Соболева $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ билинейная форма $q(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_\Omega + (bu, v)_\Gamma$ в левой части формулы (2) замкнута в $H^1(\Omega)$ и полуограничена, а значит, задаче (2) ставится [1, гл. 10] в соответствие самосопряженный оператор A с дискретным спектром, образующим неограниченную последовательность собственных чисел

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad (4)$$

указанных с учетом кратностей. При $\gamma > 0$ граница Γ перестает быть липшицевой в точке $\mathcal{O}$, а вложения $H^1(\Omega) \subset L_2(\Gamma)$ может не быть (ср. [2], [3] и

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00759) и гранта №127245 Академии Финляндии.