Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Салтыков, Специальная эргодическая теорема для диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 1, 69–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3028>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:08:30

Специальная эргодическая теорема для диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе*

© 2011. П. С. САЛТЫКОВ

В статье приводится усиленный вариант эргодической теоремы Биркгофа для линейных автоморфизмов Аносова на двумерном торе. А именно, доказано, что хаусдорфова размерность множества точек, для которых частичные пределы временных средних сильно (на константу) отличаются от пространственного среднего, строго меньше размерности пространства (т. е. 2).

§1. Введение

Пусть $F: M \rightarrow M$ — непрерывное эргодическое отображение замкнутого многообразия M с мерой μ в себя, причем μ инвариантна под действием F , а $g \in L^1(M, \mu)$ — произвольная интегрируемая по мере μ функция. Эргодическая теорема Биркгофа утверждает, что для почти всех точек p по мере μ существует предел

$$\tilde{g}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(p), \quad \text{где } g_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g \circ F^k(p),$$

равный пространственному среднему функции g :

$$\bar{g} = \int_{T^2} g \, d\mu = \tilde{g} \quad \mu\text{-п.в.} \quad (1)$$

Предположим, что мера Лебега абсолютно непрерывна относительно меры μ ; в этом случае (1) выполняется также почти всюду по мере Лебега. Тогда интересно выяснить, что можно сказать о множестве «исключительных» точек p , для которых эргодическая теорема «сильно нарушается». А именно, для каждого $\alpha > 0$ рассмотрим множество

$$X_{\alpha} = X_{g, \alpha} := \left\{ p \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |g_n(p) - \bar{g}| \geq \alpha \right\}.$$

(Обозначение $X_{g, \alpha}$ мы будем использовать для того, чтобы подчеркнуть зависимость α -исключительного множества от функции g .)

С этого момента мы будем предполагать, что функция g непрерывна: функция из L^1 может быть не определена на любом множестве меры 0, поэтому для произвольной измеримой функции никакого усиления эргодической теоремы получить нельзя.

Для случая, когда F — отображение удвоения окружности, Ю. С. Ильяшенко доказал *специальную эргодическую теорему*. Эта теорема утверждает, что хаусдорфова размерность множества X_{α} меньше размерности окружности.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 07-01-00017-а, 10-01-00739-а.

Теорема 1 (специальная эргодическая теорема для удвоения окружности [3]). Пусть F — отображение удвоения окружности. Тогда для любой непрерывной функции $g \in C(S^1)$ и для любого $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$\dim_H X_{g,\alpha} < 1.$$

В настоящей работе это утверждение обобщается на случай линейных автоморфизмов Аносова на двумерном торе.

Теорема 2 (специальная эргодическая теорема для линейных автоморфизмов Аносова). Пусть F_L — линейный диффеоморфизм Аносова на двумерном торе T^2 , $F_L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, и g — произвольная непрерывная функция на T^2 . Тогда для любого $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$\dim_H X_{g,\alpha} < 2.$$

Замечание 1. Оценка хаусдорфовой размерности исключительного множества при фиксированном α равномерно отделена от 2 для функций из некоторого открытого множества в пространстве $C^0(T^2)$.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 2 видно, что при $\alpha \rightarrow 0$ оценка сверху величины $\dim_H X_\alpha$ стремится к 2; поэтому о хаусдорфовой размерности полного исключительного множества $X = \bigcup_{\alpha>0} X_\alpha$ из теоремы 2 никакого заключения сделать нельзя.

Мы проведем доказательство теоремы 2 для частного случая $F_0(x, y) = (2x + y, x + y)$, а затем опишем минимальные изменения, требующиеся для ее доказательства в общем случае. В ходе рассуждения будет использоваться геометрическое марковское кодирование для диффеоморфизма Аносова. Мы докажем теорему 2 для характеристических функций цилиндров марковского разбиения, воспользовавшись теоремой о больших уклонениях для марковских цепей. Отсюда будет следовать утверждение этой теоремы для ступенчатых функций. Приближая произвольную непрерывную функцию ступенчатой, мы завершаем доказательство.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 существенным образом используется как линейность отображения F_L , так и тот факт, что размерность пространства мала. Поэтому интересно поставить следующие проблемы:

Проблема 1. Пусть $f: S^1 \rightarrow S^1$ — гладкое растягивающее отображение окружности S^1 с мерой μ , причем μ абсолютно непрерывна и инвариантна под действием f . Верен ли аналог теоремы 1 для f , т. е. справедливо ли неравенство

$$\dim_H X_{g,\alpha} < 1$$

для любой непрерывной функции g на S^1 ?

Проблема 2. Пусть $F: T^2 \rightarrow T^2$ — сохраняющий меру Лебега диффеоморфизм Аносова. Верен ли для него аналог теоремы 2?

Проблема 3. Пусть $F: T^n \rightarrow T^n$ — линейный диффеоморфизм Аносова при $n > 2$. Верен ли для него аналог теоремы 2?

Автор благодарит Ю. С. Ильяшенко за постановку задачи и поддержку, а также В. А. Клепцына за ценные замечания и помощь в работе над данной статьей.

§2. Кодирование автоморфизма Аносова

Для дальнейших рассуждений нам потребуется кодирование диффеоморфизмов Аносова. В [5] показано, что для любого транзитивного диффеоморфизма Аносова $F: M \rightarrow M$ существует такое разбиение $M = \bigcup_{i=0}^s B_i$ на конечное число частей, что *отображение судьбы*

$$\Phi: M \rightarrow \{0, \dots, s\}^{\mathbb{Z}}, \quad \Phi(p) = (\omega_j)_{j=-\infty}^{\infty}, \quad \omega_j \in \{0, \dots, s\},$$

такое, что $F^j(p) \in B_{\omega_j}$, переводит динамику отображения F в динамику сдвига Маркова. Более того, для линейного диффеоморфизма Аносова на торе T^2 в работах [1] и [2] было построено *геометрическое марковское разбиение* этого тора, элементы которого — прямоугольники со сторонами, параллельными устойчивым и неустойчивым направлениям. Кодирование Φ при этом переводит меру Лебега в стационарную меру для цепи Маркова (см. [1]). Среди других способов кодирования можно отметить арифметические кодирования линейных автоморфизмов двумерного тора, предложенные Вершиком (см., например, [6]).

Мы напомним для полноты изложения необходимую нам конструкцию Адлера–Вайса для частного случая — отображения $F_0: (x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$; более подробное изложение можно найти в книге [4].

Продолжим два собственных направления автоморфизма F_0 в начале координат и получим прямые $y = (\sqrt{5} - 1)x/2$ и $y = -2x/(\sqrt{5} - 1)$; наибольшее собственное значение $(3 + \sqrt{5})/2$ матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ обозначим через λ . Отрезки этих прямых разобьют тор на два прямоугольника. Обозначим их через $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$. Будем считать «горизонтальными» стороны прямоугольников, расположенные параллельно растягивающему направлению, а «вертикальными» — параллельно сжимающему. Тогда $F_0(R^{(1)})$ состоит из трех компонент, две лежат в $R^{(1)}$ и одна в $R^{(2)}$. Аналогично $F_0(R^{(2)})$ имеет две компоненты, по одной в каждом из прямоугольников.

Рис. 1. Марковское разбиение

Будем использовать эти компоненты для построения кодирования Φ . Обозначим их через $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ (см. рис. 1). Рассмотрим *топологическую матрицу переходов* $A = (a_{i,j})$, где $a_{i,j} = 0$, если $F_0(\Delta_i) \cap \text{int}(\Delta_j) = \emptyset$, и $a_{i,j} = 1$,

если $F_0(\Delta_i) \cap \text{int}(\Delta_j) \neq \emptyset$. Для описанного выше разбиения

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последовательность $w = (\dots \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots)$ называется A -допустимой, если $a_{\omega_i, \omega_{i+1}} = 1$ для всех i . Обозначим через Ω_A множество всех A -допустимых последовательностей. В дальнейшем будем опускать указание на матрицу A , так как она будет фиксированной. Рассмотрим слово $w^0 = (\omega_M^0 \dots \omega_N^0)$ и определим цилиндрическое множество C_{w^0} следующим образом:

$$C_{w^0} = \{w \in \Omega_A \mid \omega_j = \omega_j^0, j = M, \dots, N\}.$$

Для каждой точки, не лежащей на собственных прямых оператора F_0 , кодирование Φ однозначно, так как F_0 сжимает в «вертикальном» направлении при итерациях вперед, а F_0^{-1} сжимает в «горизонтальном» направлении при итерациях назад, при этом границы получающихся прямоугольников лежат строго на собственных прямых. Если точка лежит на собственной прямой, то у нее может возникать неоднозначное кодирование. Но для наших целей это не критично, так как хаусдорфова размерность множества таких точек равна 1, что строго меньше размерности пространства, равной 2.

Обозначим через $h: \Omega_A \rightarrow T^2$ отображение, ставящее в соответствие каждой допустимой последовательности из Ω_A точку, которая кодируется этой последовательностью. Тогда $h \circ \Phi = \text{id}$. Отметим также, что матрица A^n строго положительна при всех натуральных $n > 1$. Из этого следует, что для любых двух допустимых слов $(\omega_0 \dots \omega_k)$ и $(\omega'_0 \dots \omega'_l)$ можно подобрать символ $\bar{\omega}$, такой, что слово $(\omega_0 \dots \omega_k \bar{\omega} \omega'_0 \dots \omega'_l)$ будет допустимым.

Для каждого допустимого слова $w = (\omega_M \dots \omega_N)$ опишем прямоугольник B_w , содержащий все точки, кодирующиеся последовательностями из цилиндра C_w . A именно, таким прямоугольником будет

$$B_w = F_0^{-M}(\Delta_{\omega_M}) \cap \dots \cap F_0^{-N}(\Delta_{\omega_N}).$$

Назовем прямоугольник B_w *марковским*. Для допустимого слова w он всегда непуст.

Рассмотрим прямоугольник $B^1 = B_{(\omega_{-M} \dots \omega_0)}$. При отображении F_0 идет сжатие по «вертикальному» направлению, поэтому вертикальный размер прямоугольника B^1 будет равен вертикальному размеру прямоугольника $\Delta_{\omega_{-M}}$, деленному на λ^M . Значит, верна следующая оценка его вертикального размера:

$$C_0^{-1} \lambda^{-M} < L_{\text{vert}} < C_0 \lambda^{-M}$$

для некоторой константы C_0 , так как вертикальный размер любого из прямоугольников Δ_i строго меньше C_0 и строго больше C_0^{-1} . Для прямоугольника $B^2 = B_{(\omega_0 \dots \omega_N)}$ получим аналогичную оценку его горизонтального размера:

$$C_0^{-1} \lambda^{-N} < L_{\text{hor}} < C_0 \lambda^{-N}. \quad (2)$$

Если мы рассмотрим прямоугольник $B = B^1 \cap B^2$, то получим, что его вертикальный и горизонтальный размеры ограничены сверху величиной $\text{Diam}(B) \leq$

$2C_0\lambda^{-\min(N,M)}$. Отметим, что прямоугольник B кодируется словом $(\omega_{-M} \dots \omega_N)$. Так как все прямоугольники, соответствующие всевозможным допустимым словам такого вида при фиксированных N и M , покрывают T^2 целиком, мы по построению получаем сколь угодно мелкое покрытие тора марковскими прямоугольниками.

Далее введем на пространстве Ω_A меру как прямой образ меры Лебега при отображении кодирования. А именно, для допустимого цилиндра C_w определим его меру формулой $\mu(C_w) = \text{mes}(B_w)$.

Положим для краткости

$$\mu(w) = \mu(C_w). \quad (3)$$

Положим также $\mu(i) = \text{mes}(\Delta_i)$, $\mu(i, j) = \text{mes}(B_{(\omega_0, \omega_1)})$ при $\omega_0 = i$, $\omega_1 = j$. Несложно увидеть, что полученная так мера μ — марковская, со стационарным распределением $p_i = \mu(i)$ и с матрицей переходных вероятностей

$$\pi_{i,j} = \begin{cases} 0, & a_{i,j} = 0, \\ \mu(i, j)/\mu(i), & a_{i,j} = 1. \end{cases}$$

Далее в этой работе мы будем активно пользоваться однозначным соответствием между прямоугольниками марковского разбиения на торе T^2 и цилиндрами построенной марковской цепи, а также совпадением значений площади прямоугольников и меры соответствующих цилиндров.

§3. Сведение теоремы 2 к случаю характеристических функций марковских прямоугольников

Предположим, что выполняется следующее утверждение:

Лемма 1. Пусть B — прямоугольник, соответствующий некоторому цилиндру марковской цепи. Тогда для любого $\alpha > 0$ выполнена оценка

$$\dim_H X_{\chi_B, \alpha} < 2.$$

Доказательство леммы 1 будет дано в следующем параграфе. Здесь мы выведем из нее теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию g и зафиксируем $\alpha > 0$. Пусть $\{B_i^N\}$, $1 \leq i \leq m_N$, — разбиение тора T^2 на прямоугольники, кодирующиеся всевозможными допустимыми словами вида $(\omega_{-N} \dots \omega_N)$. Выберем и зафиксируем N (и, следовательно, разбиение $\{B_i^N\}$) так, что для всех элементов B_i^N этого разбиения

$$\max_{p \in B_i^N} g(p) - \min_{p \in B_i^N} g(p) \leq \alpha/3.$$

Это возможно, поскольку $\text{Diam } B_i^N \rightarrow 0$ равномерно при $N \rightarrow \infty$, а функция g равномерно непрерывна. Также выберем точки $a_i \in B_i^N$, и пусть $g_i^N = g(a_i)\chi_{B_i^N}$. Тогда

$$-\frac{\alpha}{3} \leq \sum_{i=1}^{m_N} g_i^N - g \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Положим $\beta = \alpha/3m_N$. Заметим, что

$$X_{g, \alpha} \subseteq \bigcup X_{g_i^N, \beta}.$$

Действительно, если точка (x, y) не лежит ни в одном из множеств $X_{g_i^N, \beta}$, то

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n(x, y) &\leq \alpha/3 + \sum \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_{i,n}^N(x, y) \leq \alpha/3 + \sum [g(a_i)\mu(B_i) + \beta] \\ &= \alpha/3 + m_N\beta + \sum g(a_i)\mu(B_i) \leq \alpha/3 + (\bar{g} + \alpha/3) + \alpha/3 = \bar{g} + \alpha. \end{aligned}$$

Значит, верхний предел для временных средних такой точки x не превосходит $\bar{g} + \alpha$. Аналогично проводится рассуждение для оценки нижнего предела.

С другой стороны, как следует из леммы 1, $d_i := \dim_H X_{g_i^N, \beta} < 2$. Тем самым получаем, что

$$\dim_H(X_{g, \alpha}) \leq \max_{1 \leq i \leq m_N} d_i < 2. \quad \square$$

Замечание 3. Из доказательства теоремы 2 прямо следует замечание 1, так как все близкие функции можно равномерно приблизить одними и теми же ступенчатыми функциями.

§4. Доказательство леммы 1

В этом параграфе мы докажем лемму 1, опираясь на теорему о больших отклонениях, которую можно найти, например, в обзоре Варадана [7].

Теорема 3 (о больших отклонениях). Пусть Q — марковская цепь на конечном пространстве состояний Y с матрицей переходов Π , все элементы которой положительны. Пусть ν — соответствующая стационарная мера на Y , P — мера на пространстве реализаций, соответствующая стационарной мере ν , $V: Y \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная функция и $\bar{V}$ — ее среднее по мере ν . Тогда для функции V выполняется принцип больших отклонений. А именно, если $Y_i, i = 1, \dots, n$, — реализация марковского процесса, то

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} V(Y_i) - \bar{V}\right| > \varepsilon\right) < C e^{-nH},$$

где C и H — некоторые константы, зависящие от ε , Π и V .

Доказательство леммы 1. Рассмотрим прямоугольник, кодирующийся словом $(\omega_{-M} \dots \omega_N)$:

$$B_{(\omega_{-M} \dots \omega_N)} = \{(x, y) \mid F_0^i(x, y) \in \Delta_{\omega_i}, i = -M, \dots, N\}.$$

Заметим, что для любой непрерывной функции φ замена $g = \varphi$ на $g = \varphi \circ F_0$ соответствует сдвигу в последовательности итераций и поэтому не влияет на верхний и нижний пределы временных средних. Значит, выполнено соотношение

$$X_{\varphi \circ F_0, \alpha} = X_{\varphi, \alpha}.$$

Следовательно, хаусдорфовы размерности множеств $X_{\chi_{B_{(\omega_{-M} \dots \omega_N)} \circ F_0^k, \alpha}}$ и $X_{\chi_{B_{(\omega_{-M} \dots \omega_N)}}, \alpha}$ будут совпадать для любого k . Поэтому достаточно доказать лемму 1 для прямоугольников следующего вида:

$$B_{(u_0 \dots u_N)} = \{(x, y) \mid F_0^i(x, y) \in \Delta_{u_i}, i = 0, \dots, N\}.$$

Зафиксируем N и прямоугольник $B = B_{(u_0 \dots u_N)}$. Частота попадания итераций точки $(x, y) \in T^2$ в прямоугольник B равна частоте вхождения слова $u = (u_0 \dots u_N)$ в последовательность $w = (\omega_0 \dots \omega_N \dots)$, кодирующую будущее

точки (x, y) . Для того, чтобы оценить эту частоту, разобьем натуральный ряд на $N + 2$ арифметических прогрессий, каждая из которых состоит из чисел, дающих одинаковый остаток от деления на $N + 2$. Положим

$$Z_\alpha = \left\{ (x, y) \in T^2 : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_B \circ F_0^{(N+2)k}(x, y) - \text{mes}(B) \right| > \alpha \right\}.$$

Тогда справедливо следующее

Предложение 1. *Имеет место включение*

$$X_{\chi_B, \alpha} \subseteq \bigcup_{i=0}^{N+1} F_0^i(Z_\alpha). \quad (4)$$

Доказательство. Разобьем число попаданий точки (x, y) в B за $k(N + 2)$ итераций в сумму чисел попаданий в каждый из $N + 2$ классов:

$$\# \{0 \leq n < k(N + 2) \mid F_0^n(x, y) \in B\} = \sum_{j=0}^{N+1} \# \{0 \leq m < k \mid F_0^{m(N+2)+j}(x, y) \in B\}.$$

Поэтому частота попадания в прямоугольник B является средним арифметическим соответствующих частот:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k(N + 2)} \# \{0 \leq n < k(N + 2) \mid F_0^n(x, y) \in B\} \\ &= \frac{1}{N + 2} \sum_{j=0}^{N+1} \left(\frac{1}{k} \# \{0 \leq m < k \mid F_0^{m(N+2)+j}(x, y) \in B\} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что точка (x, y) не принадлежит множеству в правой части формулы (4). Значит, каждая из частот в правой части формулы (5) в пределе отклоняется от $\text{mes}(B)$ не больше, чем на α , и это же верно в отношении частоты в левой части формулы (5). Таким образом, $(x, y) \notin X_{\chi_B, \alpha}$. $\square$

Так как F_0 — диффеоморфизм, то $\dim_H F_0^i(Z_\alpha) = \dim_H Z_\alpha$ для любого i . Поэтому лемма 1 будет доказана, как только мы докажем следующее

Предложение 2. *Рассмотрим произвольный марковский прямоугольник $B = B_{(u_0 \dots u_N)}$. Тогда для любого $\alpha > 0$ хаусдорфова размерность множества Z_α строго меньше 2:*

$$\dim_H Z_\alpha < 2.$$

Доказательство. Для каждого натурального m рассмотрим множество точек U^m , для которых частота попаданий в B под действием отображения F_0^{N+2} до момента времени m отклоняется от $\text{mes}(B)$ не менее, чем на α :

$$U^m = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{m} \# \{0 \leq k < m \mid F_0^{k(N+2)}(x, y) \in B\} \notin (\text{mes}(B) - \alpha, \text{mes}(B) + \alpha) \right\}. \quad (6)$$

Из определения следует, что множество Z_α содержится в объединении множеств U^m по всем $m > M$, где M — произвольное число:

$$Z_\alpha \subseteq \bigcap_{M > 0} \bigcup_{m \geq M} U^m.$$

Воспользуемся следующими утверждениями.

Предложение 3. 1. Множество U^m состоит из объединения марковских прямоугольников вида B_w , кодирующихся словами $w = (\omega_0 \dots \omega_{m(N+2)+N})$ длины $m(N+2) + N + 1$ из некоторого множества допустимых слов W^m .

2. Существуют константы C , H , не зависящие от m , такие, что мера множества U^m не превосходит Ce^{-mH} .

Предложение 4. Пусть $n = m(N+2) + N$ и $r = 2C_0\lambda^{-n}$. Любой прямоугольник $B_w \in U^m$ имеет меру, не меньшую $C_0^{-2}\lambda^{-n}$, и может быть покрыт не более чем λ^n шарами радиуса r .

Предложение 4 прямо следует из оценок (2) размера марковского прямоугольника, предложение 3 будет доказано ниже.

Напомним, что d -мерным объемом $V_d(L)$ покрытия L множества X шарами радиусами r_i называется сумма вида $\sum r_i^d$, а хаусдорфовой размерностью множества называется точная нижняя грань тех d , для которых существует покрытие множества X шарами со сколь угодно малым d -мерным объемом:

$$\dim_H X = \inf\{d: \text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ существует покрытие } L, \text{ такое, что } V_d(L) \leq \varepsilon\}.$$

Оценим d -мерный объем покрытия множества U^m шарами радиуса $r = 2C_0\lambda^{-n}$, используя оценки из предложений 3 и 4:

$$\begin{aligned} V_d(U^m) &\leq [\mu(U^m)/(C_0^{-2}\lambda^{-n})]\lambda^n r^d \\ &\leq Ce^{-mH} C_0^2 \lambda^{m(N+2)+N} \lambda^{m(N+2)+N} (2C_0\lambda^{-[(N+2)m+N]})^d \\ &= C_1 e^{-mH} \lambda^{(N+2)m(2-d)} = C_1 e^{m[(N+2)\log \lambda(2-d)-H]}. \end{aligned}$$

Получаем следующую оценку сверху d -мерного объема покрытия $\bigcup_{m>M} U^m$:

$$V_{d,M} Z_\alpha \leq \sum_{m \geq M} V_d(U^m) = C_1 \sum_{m \geq M} e^{m[(N+2)\log \lambda(2-d)-H]}. \quad (7)$$

Если число d удовлетворяет неравенству

$$2 - \frac{H}{(N+2)\log \lambda} < d < 2,$$

то ряд (7) сходится. Более того, при M , стремящемся к бесконечности, будет стремиться к нулю и d -мерный объем: $V_{d,M}(Z_\alpha) \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$. Следовательно, по определению

$$\dim_H Z_\alpha \leq d < 2.$$

Тем самым предложение 2 выведено из предложения 3. $\square$

Доказательство предложения 3. Первое утверждение предложения 3 прямо следует из определения множества U^m , см. (6).

Для оценки меры множества U^m перейдем к интерпретации динамики в терминах цепей Маркова. Определим марковскую цепь Z на множестве состояний Y , где Y — множество всех допустимых слов длины $N+1$. А именно, рассмотрим меру ν на множестве $Z = Y^{\mathbb{Z}}$, являющуюся образом меры μ под действием отображения

$$\mathcal{H}: (\omega_i) \mapsto (\zeta_j), \quad \zeta_j = (\omega_{j(N+2)} \dots \omega_{j(N+2)+N}).$$

Несложно увидеть, что эта мера — марковская: при фиксированном ζ_0 прошлые и будущие состояния ζ_k зависят только от соответствующих им состояний ω_j , а последние независимы при фиксированных $(\omega_0 \dots \omega_N)$ в силу марковости меры μ . В обозначениях (3) ее стационарное распределение имеет вид

$$\nu(\zeta) = \mu(\omega_0 \dots \omega_N), \quad \zeta = (\omega_0 \dots \omega_N) \in Y,$$

а вероятности перехода равны

$$\pi_{\zeta, \zeta'} = \sum_{\omega_j} \mu(w\omega_j w') / \mu(w), \quad \zeta = \mathcal{H}(w), \quad \zeta' = \mathcal{H}(w').$$

В последней формуле w и w' — допустимые слова длины $N+1$, а суммирование ведется по всем символам ω_j , таким, что слово $w\omega_j w'$ допустимо. Более того, вероятность $\pi_{\zeta, \zeta'}$ положительна для любых допустимых слов w и w' , поскольку все элементы матрицы A^2 положительны.

Введем для фиксированного $\bar{\zeta} \in Y$ функцию $V_{\bar{\zeta}}: Y \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $V_{\bar{\zeta}}(\zeta) = 1$, если $\zeta = \bar{\zeta}$, и $V_{\bar{\zeta}}(\zeta) = 0$, если $\zeta \neq \bar{\zeta}$. К цепи Z и функции $V_{\bar{\zeta}}$ может быть применена теорема о больших отклонениях (теорема 3). Следовательно, мера α -исключительных слов длины m цепи Z , т.е. слов, попадающих в состояние $\bar{\zeta} = (u_0 \dots u_N)$ с частотой, не принадлежащей интервалу $(\text{mes}(B) - \alpha, \text{mes}(B) + \alpha)$, не превосходит Ce^{-mH} . Обозначим множество таких слов через $Z_{\alpha, m}$.

Рассмотрим марковский прямоугольник B_w , где $w = (\omega_0 \dots \omega_{m(N+2)+N})$. Из определения множества U^m следует, что этот прямоугольник содержится в нем тогда и только тогда, когда соответствующее слову w слово $z = (\zeta_0 \dots \zeta_m)$ лежит в множестве $Z_{\alpha, m}$. Действительно, $F_0^{k(N+2)}(x, y) \in B$ тогда и только тогда, когда $\zeta_k := (\omega_{k(N+2)} \dots \omega_{k(N+2)+N}) = \bar{\zeta}$, иными словами, когда, $V_{\bar{\zeta}}(\zeta_k) = 1$. Беря среднее по всем допустимым k , получаем искомое.

Значит, для оценки меры множества точек, частота попадания которых в прямоугольник B под действием отображения F_0^{N+2} за первые m итераций сильно отличается от $\text{mes}(B)$, нам достаточно подсчитать меры μ всех слов, которым сопоставляются слова из $Z_{\alpha, m}$. Эта мера равна $\nu(Z_{\alpha, m})$ по построению меры ν и, как показано выше, не превосходит Ce^{-mH} . Следовательно,

$$\mu(U^m) = \nu(Z_{\alpha, m}) \leq Ce^{-mH}.$$

Предложение 3 доказано. □

Лемма 1 для случая $F_0(x, y) = (2x + y, x + y)$ доказана полностью, следовательно, доказан и частный случай теоремы 2. □

§5. Общий случай

Для доказательства теоремы 2 для произвольных линейных автоморфизмов двумерного тора достаточно доказать лемму 1 для произвольного F_L . Вывод из нее теоремы 2 повторяется дословно. Напомним, что диффеоморфизм F_L транзитивен. (Проще всего это выводится из всюду плотности в торе устойчивого и неустойчивого слоений, являющихся в данном случае иррациональными обмотками тора.)

Для линейного автоморфизма F_L существует конечное марковское разбиение тора T^2 на прямоугольники Δ_i , $T^2 = \bigcup_{i=0}^s \Delta_i$, и отображение, сопрягающее F_L

и сдвиг марковской цепи, см. [1]. Пусть A_L — соответствующая топологическая матрица переходов полученной марковской цепи. Из транзитивности автоморфизма F_L следует, что существует минимальное l , такое, что у матрицы A_L^l все элементы положительные. Тогда мы повторяем доказательство леммы 1 по модулю следующих изменений. Вводим

$$Z_{L,\alpha} = \left\{ (x, y) \in T^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_B \circ F_L^{(N+l)k}(x, y) - \text{mes}(B) \right| > \alpha \right\}.$$

Далее дословным повторением доказываются аналоги предложений 1, 2 и 4. Доказательство аналога предложения 3 переписывается со следующим изменением: всюду выражение $N+2$ меняется на $N+l$. Тем самым теорема 2 доказана полностью.

Отметим известные специалистам трудности, которые не позволяют распространить полученный результат на линейные отображения большей размерности, а также на нелинейные отображения. В первом случае невозможно доказать аналог предложения 4 из-за неравномерного растяжения в разных размерностях. Во втором случае мера Лебега может не быть мерой с марковским образом и, значит, может не выполняться аналог предложения 3.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. L. Adler, B. Weiss, *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **57** (1967), 1573–1576.
- [2] R. L. Adler, B. Weiss, *Similarity of automorphisms of the torus*, Mem. Amer. Math. Soc., **98** (1970).
- [3] Yu. Plyashenko, V. Klepstin, P. Saltykov, *Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins*, J. Fixed Point Theory Appl., **3:2** (2008), 449–463.
- [4] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [5] Я. Г. Синай, *Построение марковских разбиений*, Функц. анализ и его прил., **2:3** (1968), 70–80.
- [6] N. Sidorov, A. Vershik, *Bijective arithmetic codings of hyperbolic automorphisms of the 2-torus, and binary quadratic forms*, J. Dynam. Control Systems, **4:3** (1998), 365–399.
- [7] S. R. S. Varadhan, *Large deviations*, Ann. Probab., **36:2** (2008), 397–419.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: p_saltykov@pochta.ru

Поступило в редакцию
9 ноября 2009 г.